МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} \left(x + 5\sqrt{2}\cos\alpha\right)\left(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha\right) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 169. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

1) все четырёхзначные числа A можно представить в виде:

$$A = n \cdot 1111, \text{ где } n = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

Разложим 1111 на простые множители: $1111 = 11 \cdot 101$

2) $A \cdot B \cdot C$ - квадрат натурального числа, поэтому, если он делится на 101, то он должен делиться и на 101^2, значит:
(т.к. $A \vdots 101$, но $A \not\vdots\, 101^2$)
хотя бы одно из чисел: $n, B, C \vdots 101$

n ни при каком значении не делится на 101, как и C ($0 < n < C < 101$), значит $B \vdots 101$. Рассмотрим все числа $100 \leq B \leq 999$, делящиеся на 101:

101	404	707
202	505	808
303	606	909

Из них 6 содержит только 606, значит $B = 606$

3) $A \vdots 11 \Rightarrow A \cdot B \cdot C \vdots 11$, но $A \cdot B \cdot C$ должно делиться на $11^2 \Rightarrow$
$B \not\vdots\, 11$
$\Rightarrow C \vdots 11$, рассмотрим все двузначные $C \vdots 11$:

11	44	77
22	55	88
33	66	99

Из них содержит 3 только 33, значит $C = 33$

4) $A \cdot B \cdot C = n \cdot 11 \cdot 101 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 2 \cdot n \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2$, чтобы $A \cdot B \cdot C$ был квадратом $2 \cdot n$ должен быть квадратом (т.к. $3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2$ - уже квадрат) из всех возможных n нам подходят только $n = 2$ и $n = 8$, при других n $A \cdot B \cdot C$ не является квадратом натурального числа.

Ответ: (2222; 606; 33) и (8888; 606; 33)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{5}{xy}=\frac{x+y+5}{xy}$; $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{y+2}+\frac{5}{(x-2)(y+2)}=\frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$

по условию: $\frac{x+y+5}{xy}=\frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$

$\frac{(x+y+5)((x-2)(y+2)-xy)}{xy(x-2)(y+2)}=0 \Rightarrow \begin{cases}(x+y+5)(2x-2y-4)=0\\ xy(x-2)(y+2)\neq 0; \ x,y>0 \text{ (усл.)}\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+y+5=0\\ x-y-2=0\end{array}\right.\\ x\neq 2\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+y=-5;\\ x-y=2\end{array}\right.\\ x\neq 2 \text{ при } x=2 \text{ выражение}\end{cases}$ $\begin{array}{l}x>0\\ y>0\end{array} \Rightarrow x+y>0$, но $-5<0 \Rightarrow$ противоречие усл.

$\begin{cases}x-y=2\\ x=2; \ x\neq 2 \text{ (из условия)}\end{cases} \Rightarrow x-y=2$ изначально не имеет смысла

2) $M=x^3-y^3-6xy=(x-y)(x^2+xy+y^2)-6xy=(x-y)((x-y)^2+3xy)-6xy=$

$=(x-y)^3+xy(3(x-y)-6)$, подставляем $x-y=2$

$2^3+xy(3\cdot 2-6)=2^3=8$

Ответ: $M=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

а) $(\sin \pi x + \sin \pi y)\sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y)\cos \pi x$

$$2\sin\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right)\sin \pi x = -2\sin\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right)\cos \pi x$$

$$\sin\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right)\left(\sin \pi x \cdot \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) + \cos \pi x \sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right)\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(2x+x-y)\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}(3x-y)\right) = 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}(x+y) = \pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2}(3x-y) = \pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\cancel{\begin{array}{l} x+y = \frac{k}{2} \\ 3x-y = \frac{k}{2} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{l} x+y = 2k,\ k\in\mathbb{Z} \\ 3x-y = 2k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} y = x-2k,\ k\in\mathbb{Z} \\ y = 3x-2k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $(x; x-2k)$; $(x; 3x-2k)$, где $k\in\mathbb{Z}$, x-действительное (по усл.)

б) $\arcsin\frac{x}{6} + \arcsin\frac{y}{2} < \pi$; $x, y \in \mathbb{Z}$

ОДЗ: $x\in[-6;6]$ $y\in[-2;2]$

1) $y = x - 2k$

• $x = 6 \Rightarrow y = 6; 4; 2; 0; -2; -4; -6 \ldots$ − подходят только $-2; 0; 2$

$\arcsin 1 + \arcsin 1 > 0$ $(\arcsin 1 = \frac{\pi}{2})$

$+ \arcsin 0 > 0$ $(\arcsin 0 = 0)$

$+ \arcsin -1 = 0$ $(\arcsin -1 = -\frac{\pi}{2})$

• $x = 5 \Rightarrow y = 5; 3; 1; -1; -3; -5 \ldots$ − подходят только ± 1

$\arcsin\frac{5}{6} + \arcsin\frac{1}{2} > 0$ $(\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6})$

$> \frac{\pi}{4}$ $+ \arcsin -\frac{1}{2} > 0$ $(\arcsin -\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6})$

№3 (б пункт)

б) $\arcsin\frac{x}{6}+\arcsin\frac{y}{2}<\pi$; $x,y\in\mathbb{Z}$

$x\in[-6;6]$ $y\in[-2;2]$

$\arcsin\alpha\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ значит сумма двух арксинусов всегда $<\pi$, кроме случая, когда они оба равны $\frac{\pi}{2}$, рассмотрим такие случаи:

$\arcsin\frac{x}{6}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{x}{6}=1\Rightarrow x=6$

$\arcsin\frac{y}{2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{y}{2}=1\Rightarrow y=2$ значит нам подходят все пары $(x;x-2k)$, $(x;3x-2k)$, где $x\in\mathbb{Z}$, $x\in[-6;6]$, $k\in\mathbb{Z}$, кроме пары $(6;2)$

Выпишем их:

$(6;2)$ $(5;1)$ $(4;2)$ $(3;1)$ $(2;2)$ $(1;-1)$ $(0;2)$ $(-1;1)$ $(-2;2)$

$(6;0)$ $(5;-1)$ $(4;0)$ $(3;-1)$ $(2;0)$ $(1;1)$ $(0;0)$ $(-1;-1)$ $(-2;0)$

$(6;-2)$ $(4;-2)$ $(2;-2)$ $(0;-2)$ $(-2;-2)$

$(-3;-1)$ $(-4;2)$ $(-5;1)$ $(-6;2)$ всего 33

$(-3;-1)$ $(-4;0)$ $(-5;-1)$ $(-6;0)$ подходят 32

$(-4;-2)$ $(-6;-2)$

Множества $(x;x-2k)$ охватывает мн-во $(x;3x-2k)$

Ответ: 32

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4

Пусть a – кол-во одиннадцатиклассников, а x – кол-во билетов, которое выдали в конце $(x>4)$

1) Найдём начальную вероятность:
Всего вариантов раздать ученикам билеты:
$C_a^4 = \frac{a!}{4!(a-4)!}$. Чтобы найти кол-во вариантов, когда у Пети и Васи есть билеты, предположим, что они их получили, и тогда останется раздать 4-2 билета на a-2 ученика: $C_{a-2}^2 = \frac{(a-2)!}{2!(a-4)!}$

$P_1 = \frac{(a-2)!}{2!(a-4)!} : \frac{a!}{4!(a-4)!} = \frac{3\cdot 4}{(a-1)\cdot a}$ – начальная вероятность

2) Аналогично найдем конечную вероятность:
$C_a^x = \frac{a!}{x!(a-x)!}$ – всего вариантов
$C_{a-2}^{x-2} = \frac{(a-2)!}{(x-2)!(a-x)!}$ – благоприятных вариантов
Чтобы найти вероятность делим кол-во благоприятных вариантов на общее количество:
$P_2 = \frac{(a-2)!}{(x-2)!(a-x)!} : \frac{a!}{x!(a-x)!} = \frac{(x-1)x}{(a-1)\cdot a}$ – конечная вероятность

3) По условию: $6P_1 = P_2$
$\frac{6\cdot 3\cdot 4}{(a-1)\cdot a} = \frac{(x-1)x}{(a-1)\cdot a} \Rightarrow x^2 - x = 72$; $x^2 - x - 72 = 0$
$D = 1+72\cdot 4 = 289$
$x = \frac{1\pm 17}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=-8 \end{array}\right.$

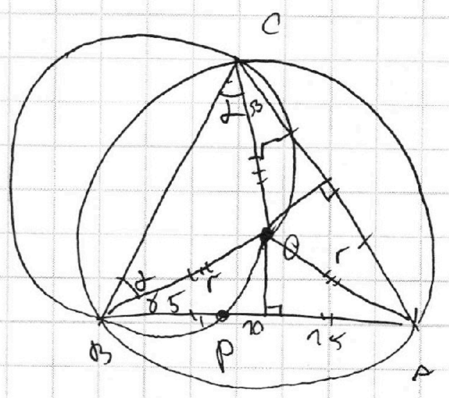
$x=-8$ не подходит по смыслу задачи

Ответ: 9

№5

$$2r = \frac{30}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$2r = \frac{35}{\sin(\alpha+\gamma)}$$



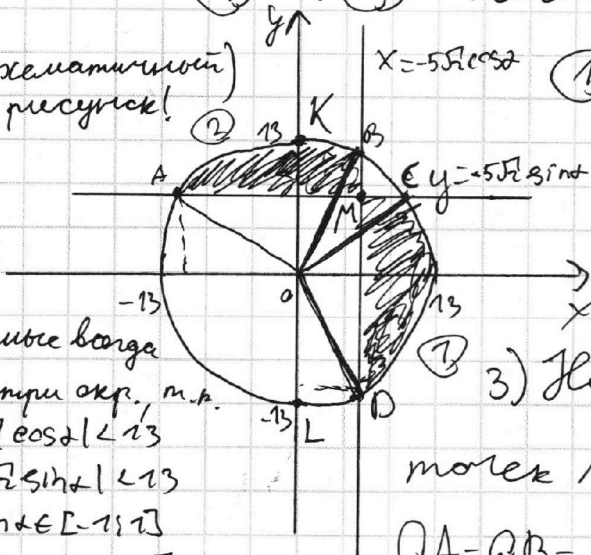
№ 6

1) $x^2+y^2=169$ – график окружности с центром в точке $(0;0)$ и радиусом 13. Для условия ≤ 169 подходят все точки внутри окружности, и на ней

2) $(x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha)=0$ – две прямые параллельные осям OX и OY: $x=-5\sqrt{2}\cos\alpha$
$y=-5\sqrt{2}\sin\alpha$

Для ≤ 0 подходят все точки на прямых и т. в ① и ② областях:

(схематичный рисунок!)



① – правее $x=-5\sqrt{2}\cos\alpha$ и ниже $y=-5\sqrt{2}\sin\alpha$

② левее $x=-5\sqrt{2}\cos\alpha$ и выше $y=-5\sqrt{2}\sin\alpha$

прямые всегда внутри окр., т.к.
$|-5\sqrt{2}\cos\alpha|<13$
$|-5\sqrt{2}\sin\alpha|<13$
$\sin\alpha\in[-1;1]$
$\cos\alpha\in[-1;1]$

3) Найдём координаты точек A, B, C, D, чтобы найти AC и BD:
$OA=OB=OC=OD=13$ (радиус)

у A и C по y: $-5\sqrt{2}\sin\alpha$

у B и D по x: $-5\sqrt{2}\cos\alpha$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора находим нужные координаты

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

у A и C по x: $-\sqrt{169-50\sin^2\alpha}$ и $\sqrt{169-50\sin^2\alpha}$

у B и D по y: $\sqrt{169-50\cos^2\alpha}$ и $-\sqrt{169-50\cos^2\alpha}$

Значит длина $AC = 2\cdot\sqrt{169-50\sin^2\alpha}$

$BD = 2\cdot\sqrt{169-50\cos^2\alpha} = 2\sqrt{119+50\sin^2\alpha}$

4) Заметим, что дуги (меньшие) $\smile AK$ и $\smile KC$, $\smile KB$ и $\smile LD$ равны (видно из координат точек), если мысленно перенести $\smile AK$ в $\smile KC$, а $\smile KB$ в $\smile LD$, то они в сумме по длине с $\smile DC$ будут давать половину длины окружности, т.е. $\pi r = 13\pi$

5) Т.к. ~~...~~ периметр по дугам постоянный и равен 13π, надо найти при каком α $AC+BD$ — максимальна: $\sin^2\alpha\in[0;1]$, заметим, что $169-50=119$ и крайние значения $\sin^2\alpha$ дают наименьшие значения суммы. $AC+BD$ — максимально при $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$, т.е. $\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$, тогда сумма: $4\sqrt{144}=48$, а периметр $M=48+13\pi$. Ответ: $M=48+13\pi$, достигается при $\alpha=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

• $x = 4 \Rightarrow y = -2; 0; 2$

$\arcsin\frac{2}{3} + \arcsin 1 > 0$

$(\frac{\pi}{6} < \arcsin\frac{2}{3} < \frac{\pi}{2})$ $+ \arcsin 0 > 0$

$+ \arcsin -1 < 0$

• $x = 3 \Rightarrow y = \pm 1$

$\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{2} > 0$

$+ \arcsin -\frac{1}{2} = 0$

• $x = 2 \Rightarrow y = -2; 0; 2$

$\arcsin\frac{1}{3} + \arcsin +1 > 0$

$(0 < \arcsin\frac{1}{3} < \frac{\pi}{6})$ $+ \arcsin 0 > 0$

$+ \arcsin -1 < 0$

$x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

$\arcsin(\frac{1}{6}) + \arcsin\frac{1}{2} > 0$

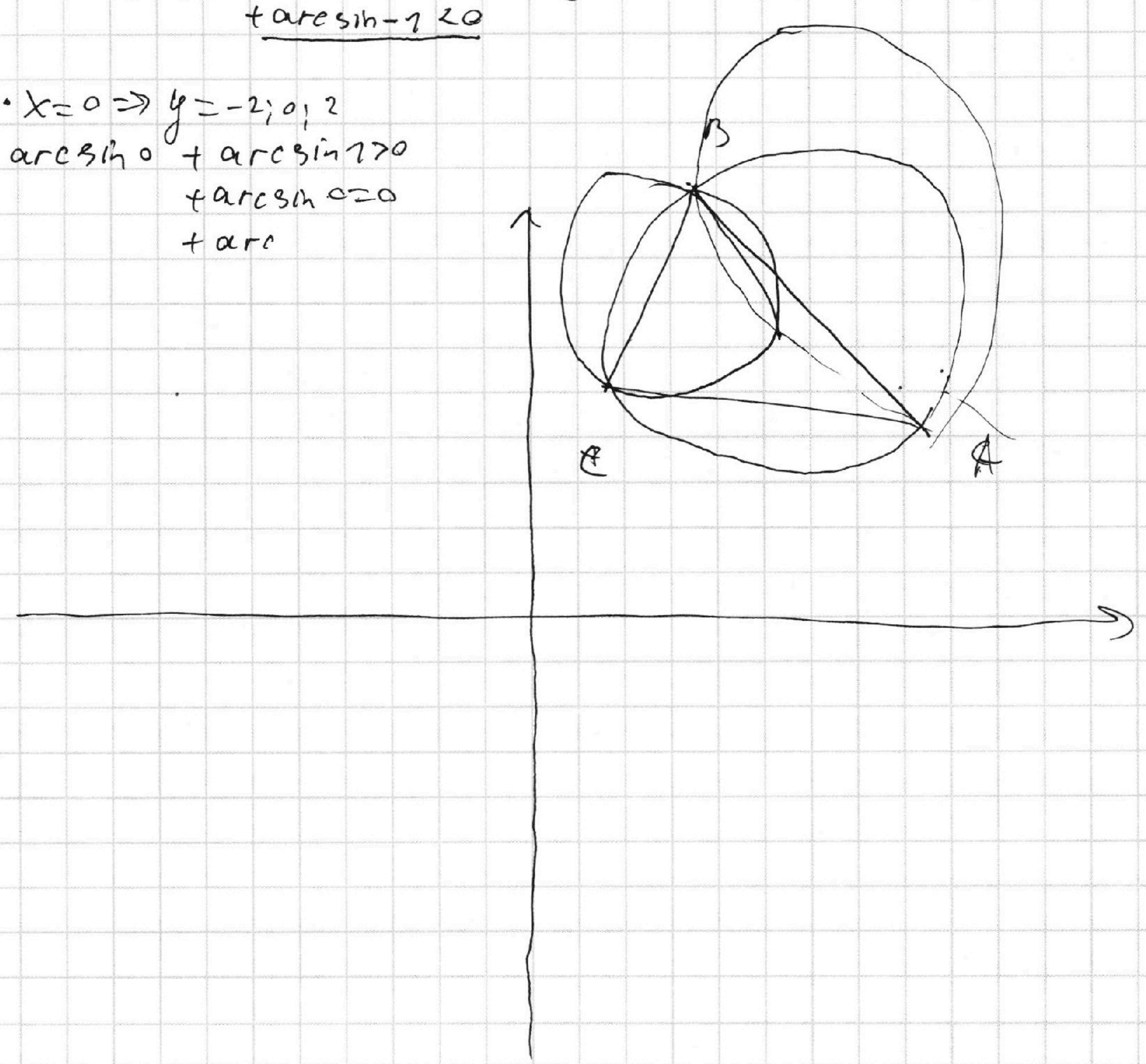
$(0 < \arcsin\frac{1}{6} < \frac{\pi}{6}) + \arcsin -\frac{1}{2} < 0$

• $x = 0 \Rightarrow y = -2; 0; 2$

$\arcsin 0 + \arcsin 1 > 0$

$+ \arcsin 0 = 0$

$+ \text{arc}$



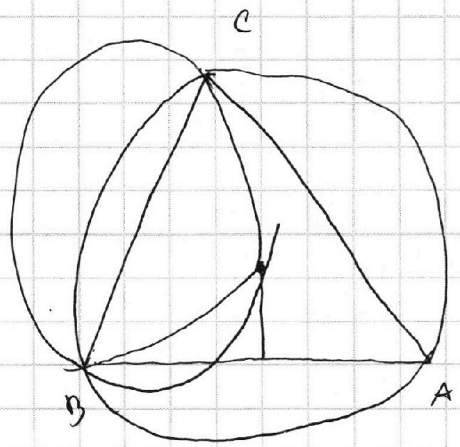
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

б) $(x; x-2k)$

$\frac{x}{6}\sqrt{1-(x-2k)^2}+\frac{x-2k}{2}\sqrt{1-x^2}<0$

$6 \to 2$, $\to 0$, $\to -2$

$5 \to$ ~~..~~, $\to 1$, $\to -1$

$4 \to 2$, $\to 0$, $\to -2$

$\arcsin\frac{x}{6}$ + ~~arcsin~~

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ $\arcsin -\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$

$\arcsin 1$ спросить про конечную.

$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ $\arcsin -1 = -\frac{\pi}{2}$

$\arcsin 0 = 0$

x – чёт $\pm\frac{\pi}{2}$, 0

x – нечет. $\pm\frac{\pi}{6}$

$6: \frac{\pi}{6}$ x

$4: \frac{1}{3}$ $-\frac{\pi}{2}$

$2: \frac{1}{3}$ $-\frac{\pi}{2}$

$0: -\frac{\pi}{2}$

$-2: -\frac{\pi}{2}$

$-4: -\frac{\pi}{2}$

$-6: -\frac{\pi}{2}$

$5: >\frac{\pi}{4}$ x

$3: \frac{1}{2}$ x

1 $-\frac{\pi}{6}$

-1 $-\frac{\pi}{6}$

-3 $\pm\frac{\pi}{6}$

-5 $\pm\frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$

$360-180+2\alpha-180-\alpha-\beta$

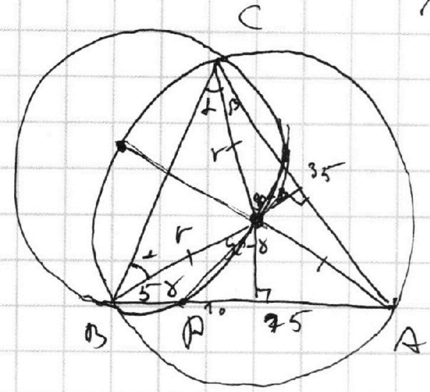
$\cancel{24}+12=33$ $180-2\alpha-\gamma-\beta$

$2r=\frac{30}{\sin\alpha\frac{35}{2r}+\cos\alpha\frac{h_1}{r}}=$

35

$2r=$

$r=\frac{15r}{35\sin\alpha+2h_1\cos\alpha}$



$35\sin\alpha+2h_1\cos\alpha=15$

$\frac{r}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin(180-2\alpha)}$

$2r=\frac{a}{\sin(180-2\alpha-\gamma-\beta)}$

~~...~~

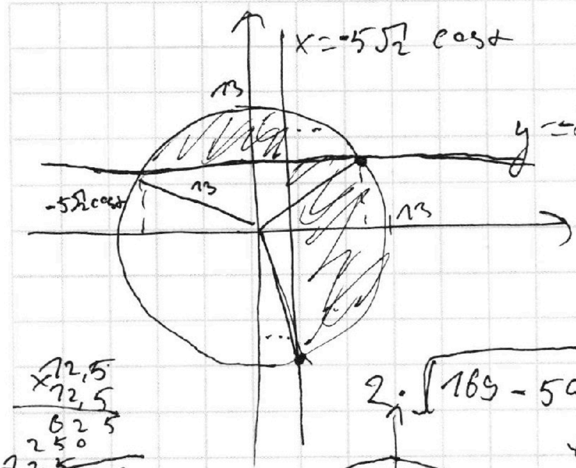
$2\cancel{0}+30+35=85$

$\sqrt{\cancel{30\cdot 85}\cdot 60\cdot\cancel{..}}$ $85\cdot 55\cdot 50$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$x=-5\sqrt{2}\cos\alpha$

$y=-5\sqrt{2}\sin\alpha$

$S=\pi r$ – всегда!

~~$\cos = \sin$~~

$-5\sqrt{2}\cos\alpha = -5\sqrt{2}\sin\alpha = 0$

$$2\cdot\sqrt{169-50\sin^2\alpha}+2\sqrt{169-50\cos^2\alpha} = S -$$

$12{,}5 \times 12{,}5 = 156{,}25$

$156{,}5$

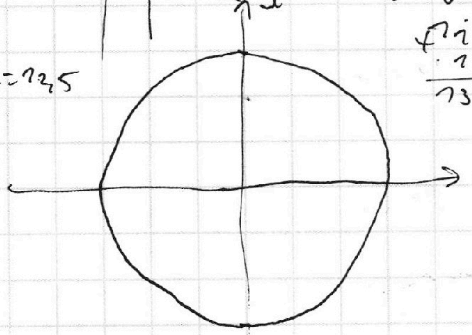
$11{,}5 \times 11{,}5 = 132{,}25$

$119 + 12{,}5 = 131{,}5$

$169 - 37{,}5 = 131{,}5$

$119 + 37{,}5 = 156{,}5$

$\sin^2\alpha \in [0;1]$



$$2\sqrt{169-50\sin^2\alpha}+2\sqrt{169-50+50\sin^2\alpha} = 2\sqrt{169-50\sin^2\alpha}+2\sqrt{119+50\sin^2\alpha} =$$

$$\left(2\sqrt{169-50\sin^2\alpha}+2\sqrt{119+50\sin^2\alpha}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\ }}\ \ \frac{\ }{2}\sin\alpha\ 50\cos\alpha$$

$0: 2\sqrt{169}+2\sqrt{119} \approx 26+22=48$

$\frac{1}{4}: 2\sqrt{156{,}5}+2\sqrt{131{,}5} \approx 25+23 \approx 48$

$\frac{3}{4}: 2\sqrt{131{,}5}+2\sqrt{156{,}5} \approx 48$

$1: 2\sqrt{119}+2\sqrt{169} \approx 48$

$\frac{2}{4}: 2\sqrt{144}+2\sqrt{144} = 48$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

б) $\left(x; \frac{k}{2}-x\right)$ $\left(x; 3x-\frac{k}{2}\right)$ - ?

6

1) $\arcsin\frac{x}{6} + \arcsin\frac{y}{2} < \pi$

$\sin(\arcsin\alpha + \arcsin\beta) = \alpha\sqrt{1-\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2}$

$\arcsin\frac{x}{6} + \arcsin\frac{k-2x}{4} < \pi \,|\sin$

$\frac{x}{6}\sqrt{1-\frac{(k-2x)^2}{16}} + \frac{k-2x}{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{36}} < 0$

$\frac{x}{6}\cdot\frac{\sqrt{1-k^2+4kx-4x^2}}{4} + \frac{k-2x}{4}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{6} < 0$

$x\sqrt{(1-k+2x)(1+k-2x)} + (k-2x)\sqrt{(1-x)(1+x)} < 0$

$x^2(\;)(\;) < (k-2x)^2(\;)(\;)$

4) a - кол-во учеников $C_a^4 = \frac{a!}{4!(a-4)!}$ - всего вариантов

$C_{(a-2)}^2 = \frac{(a-2)!}{2!(a-4)!}$ - нам подходят:

$P_1 = \frac{(a-2)!}{2!(a-4)!} : \frac{a!}{4!(a-4)!} = \frac{3\cdot 4}{(a-1)\cdot a}$

в конце: $C_a^{x>4} = \frac{a!}{x!(a-x)!}$ - всего

$C_{(a-2)}^{x-2} = \frac{(a-2)!}{(x-2)!(a-x)!}$ - подходят:

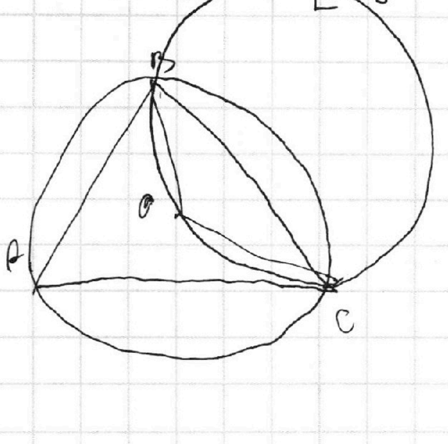
$P_2 = \frac{(a-2)!}{(x-2)!(a-x)!} : \frac{a!}{x!(a-x)!} = \frac{(x-1)x}{(a-1)\cdot a}$

$4 \to 9$

$\frac{72}{(a-1)\cdot a} = \frac{(x-1)x}{(a-1)a} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=-8 \end{array}\right.$

$1+72\cdot 4 = 289$

17



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) $1111 = 11 \cdot 101$

$A = x \cdot 11 \cdot 101$

$B \vdots 101 \Rightarrow B = 6a6$ $\quad 6a6 = 6 \cdot 101$

$A \cdot B \cdot C = x \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot 6 \cdot C \Rightarrow C = 33$

$x \in [1; 9]$

$A \cdot B \cdot C = x \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \Rightarrow x = 2,\ x = 8$

2222 606 33
8888 606 33

2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$

$\frac{x+y+5}{x \cdot y} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow \quad \frac{x+y+5}{x \cdot y} = \frac{x+y+5}{xy+2x-2y-4}$

$\frac{(x+y+5)(xy+2x-2y-4-xy)}{xy(x-2)(y+2)} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+5=0 \Rightarrow x+y=-5\ \varnothing \\ x-y-2=0 \Rightarrow x-y=2 \end{array}\right.$

$x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2+xy+y^2) - 6xy = 2 \cdot ((x-y)^2 + 3xy) - 6xy = 2 \cdot 4 = 8$

3) $(\sin \pi x + \sin \pi y)\sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y)\cos \pi x$

$\sin \underbrace{\alpha+\beta}_{x} + \sin \underbrace{\alpha-\beta}_{y} = 2\sin\alpha\cos\beta = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos \underbrace{\alpha+\beta}_{x} - \cos \underbrace{\alpha-\beta}_{y} = -2\sin\alpha\sin\beta = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ $\quad \cos\alpha = \sin\frac{\pi}{2} - \alpha$

$2\sin\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right)\sin\pi x = -2\sin\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right)\cos\pi x$

$\sin\frac{\pi(x+y)}{2}\left(\sin\pi x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(x-y)}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos\pi x\right)$

$\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi(x-y)}{2}\right)}$

$\sin\frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin\left(\pi x + \frac{\pi(x-y)}{2}\right) = 0$ $\quad \pi\left(\frac{x + x - y}{2}\right) = \frac{\pi(3x-y)}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = 0 \\ \sin\frac{\pi(3x-y)}{2} = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}(x+y) = \pi k \Rightarrow \\ \frac{\pi}{2}(3x-y) = \pi k \Rightarrow \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x+y = \frac{k}{2} \\ 3x-y = \frac{k}{2} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y = \frac{k}{2} - x \\ y = 3x - \frac{k}{2} \end{array}\right.$

$\cancel{\left(x; \frac{k}{2} - x\right)\left(x; 3x - \frac{k}{2}\right)}$ $\quad (x; x-2k) \quad (x; 3x-2k)$