МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$A = 1111 \cdot a$, где $1 \le a \le 9$; $a \in \mathbb{N}$

$1111 = 11 \cdot 101$; 11, 101 – простые числа

$\Downarrow$

$A \cdot B \cdot C \,\vdots\, 101^2$

$$\begin{cases} A \,\vdots\, 101 \\ A \not\vdots\, 101^2 \\ C < 101 \end{cases} \Rightarrow B \,\vdots\, 101$$

причем, B сод. цифру 7, значит $B = 707$, $b = 7$

$B = 101 \cdot b$, где $1 \le b \le 9$; $b \in \mathbb{N}$

$ABC \,\vdots\, 11$; ABC – точный квадрат

$\Downarrow$

$ABC \,\vdots\, 11^2$

$$\begin{cases} A \,\vdots\, 11 \\ A \not\vdots\, 11^2 \\ B \not\vdots\, 11 \end{cases} \Rightarrow C \,\vdots\, 11$$

при этом C содержит хотя бы 1 цифру 1 и явл. двузначным, а значит $C = 11$, тогда:

$A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot a \cdot b =$

$101^2 \cdot 11^2 \cdot 7a$, значит $a = 7k^2$, где k – натур.

$a=7$ $\quad 1 \le 7k^2 \le 9$
$k = 1$

Значит, $A = 1111 \cdot 7 = 7777$

$B = 101 \cdot 7 = 707$

$C = 11 \cdot 1 = 11$

Ответ: $(A; B; C) \in \{(7777; 707; 11)\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

По условию

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{xy}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{y+4}+\frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy}=\frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$(y+x+3)\left(\frac{1}{xy}-\frac{1}{(x-4)(y+4)}\right)=0$$

$$(y+x+3)\left(\frac{4x-4y-16}{xy(x-4)(y+4)}\right)=0$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} y+x=-3 \ \varnothing \ y+x>0 \\ x-y=4 \quad (1)\end{array}\right. \\ x,\cancel{y\neq0},\ y\neq0;-4 \ (!) \\ x\neq0,4\end{cases}$$

т.к. $x,y>0$

с уч. $x,y>0$: $x\neq4$

Ответ: $M\in(-\infty;64)$

~~$y+x=-3$: $y=-x-3$~~

~~$M=x^3-(-x-3)^3-12x(-x-3)=$~~

~~$=x^3+(x+3)^3+12x(x+3)$~~

(1): $x-y=4$: $x=y+4$

$M=(y+4)^3-y^3-12y(y+4)=$

$4((y+4)^2-(y+4)y+y^2)-12y(y+4)=$

$=4(y^2+4y+16)-12y(y+4)=$

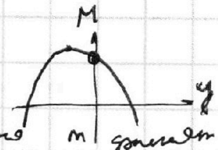
$=4(-2y^2-8y+16)=-8(y^2+4y\mp8)=$

$=-8((y+2)^2-12)=96-8(y+2)^2$

При $y>0$:

$M=96-8(y+2)^2<96-8(0+2)^2=64$

Поскольку $M(y)$ – гр. парабол с $a<0$ и вершина при $y<0$



на нашем значения M убывают, при $y>0$; $x=y+4>4$ и пр. выполняется

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

а) $(\sin\pi y - \sin\pi x)\sin\pi y = (\cos\pi y + \cos\pi x)\cos\pi y$

$\sin^2\pi y - \sin\pi x\sin\pi y = \cos^2\pi y + \cos\pi x\cdot\cos\pi y$

$-\cos(\pi x - \pi y) = \cos^2\pi y - \sin^2\pi y$

$\cos(\pi x - \pi y + \pi) = \cos(2\pi y)$

$$\left[\begin{array}{l}\pi x - \pi y + \pi = 2\pi y + 2\pi k\\ \pi x - \pi y + \pi = -2\pi y + 2\pi k\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l}x - y + 1 = 2y + 2k\\ x - y + 1 = -2y + 2k\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z} \longrightarrow \left[\begin{array}{l}x - 3y = 2k - 1\\ x + y = 2k - 1\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$$ если x, y - целые, то они разной чётности

Для любого x:

$$\left[\begin{array}{l}y = \dfrac{x+1-2k}{3}\\ y = 2k - x - 1\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $(x;y)\in\left\{\left(n;\dfrac{n+1-2k}{3}\right);(n;\,2k-n-1)\ \middle|\ k\in\mathbb{Z};\ n\in\mathbb{R}\right\}$

б) $0\le\arccos\frac{x}{7}\le\pi$ $\quad -\frac{\pi}{2}\le\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4}\le\frac{3\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}\le\arcsin\frac{y}{4}\le\frac{\pi}{2}$

т.е необходимо исключить только сл. $\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$

$$\cancel{\left\{\begin{array}{l}\arccos\frac{x}{7}\ne 0\\ \arcsin\frac{y}{4}\ne\frac{\pi}{2}\end{array}\right.\quad x\ne 7\quad y\ne}$$

Для вып. огр. достаточно вып. одного из усл.: учтём определение arccos и arcsin:

$$\left[\begin{array}{l}\arccos\frac{x}{7}\ne 0\\ \arcsin\frac{y}{4}\ne\frac{\pi}{2}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x\ne 7\\ y\ne 4\end{array}\right.$$ при этом $-7\le x\le 7\to 15$ целых, $-4\le y\le 4\to 5$ целых

Зам. что под условие а) подходят все пары на огр. где x, y разной чётности:

N(кол-во пар) $= 8\cdot 5$ (x-неч.; y-чет.) $+ 7\cdot 4$ (x-чет.; y-нечет.)

-1 ($y=4$; $x=7$) $= 40+28-1 = 67$

Ответ: 67 пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 4 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

Вероятность в первом случае это отношение кол-ва наборов из 4-ех учеников с Васей и Петей в них к общему кол-ву наборов из 4-ех детей, пусть n - кол-во в группе 11-классников:

$$p_1 = \frac{C_{n-2}^{2}}{C_n^4} = \frac{(n-2)(n-3)\cdot 4!}{2!\,n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{3\cdot 4}{n(n-1)}$$

Также устроено при выборе с n до k:

$$p_2 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)(n-3)\dots(n-2-k+2+1)\cdot k!}{(k-2)!\,n(n-1)\dots(n-k+1)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$p_2 = 11 p_1$: $$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{11\cdot 3\cdot 4}{n(n-1)}$$

$$k(k-1) = 11\cdot 12$$

по $k>4$ → подх.

$$k = 12$$

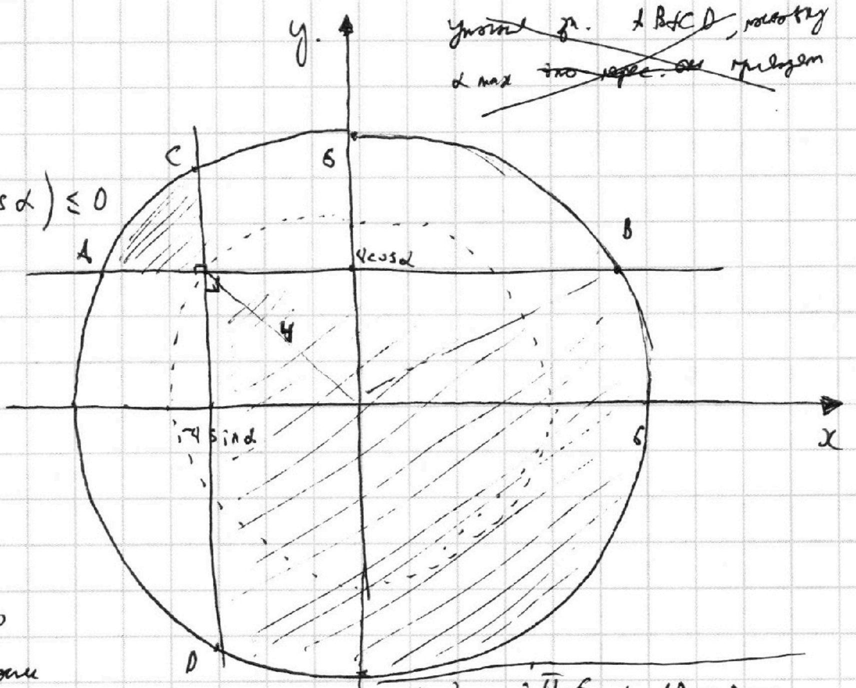
Ответ: 12

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Задача 6

$\Phi(\alpha)$:

$$\begin{cases}(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0\\ x^2+y^2\le 36\end{cases}$$



~~Угол к. AB+CD, поэтому α max это перес. они проходят~~

$x^2+y^2\le 36$ → в координатах $OX;OY$ это множество точек принадлежащих кругу с центром $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{36}=6$

$(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0$ это два „квадранта" между YOX левый верхний и правый нижний кр.

~~$\max\{M\} = \frac{2\pi\cdot 6}{2} + AB+CD = 6\pi + \sqrt{282+32\sqrt{73}}$ достигается при $\alpha=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z$~~

прямые $y=4\cos\alpha$ и $x=-4\sin\alpha$

Зам. что точка $(x;y)=(4\cos\alpha;-4\sin\alpha)$ удалена от $0;0$ на:

$\sqrt{(-4\sin\alpha)^2+(4\cos\alpha)^2}=4$, значит не меньше окр. с центром $(0;0)$ и рад. 4 это пересечение при разных α проходит.

Зам. теперь, что подсчёт дуг границ фигуры $\Phi(\alpha)$ равна 90°, поэтому эти окр. все 2 хорды перес. под углом 90° (смотря хорд. эквивалентные!), а значит сумма дуг равна половине длины окружности. Значит задача максимизации периметра сводится к задаче максимизации хорд.

длина хорд в зав. от α найдём по т. Пифагора:

пусть гор. хорда AB, верт. — CD, тогда:

$AB=2\sqrt{6^2-4\cos^2\alpha}$

$CD=2\sqrt{6^2-4\sin^2\alpha}$

$AB^2+CD^2=144\cdot 2-16(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=288-16=282$

~~AB~~ $= AB\cdot CD = 4\sqrt{6^4-6^2\cdot 4(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+16\sin^2\alpha\cos^2\alpha} =$

~~$4\sqrt{6^4-6^2\cdot 4+16\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$ ↗ но $\sin^2\alpha\cos^2\alpha\le 1$ $\quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ при $\alpha=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}n$!~~

~~$AB\cdot CD\le 4\cdot\sqrt{6^4-6^2\cdot 4+16} = 4\cdot\sqrt{(36-4)^2+6^2\cdot 4} =$~~

~~$=4\sqrt{32^2+12^2} = 16\sqrt{8^2+3^2} = 16\sqrt{73}$~~

$AB+CD\to\max$

$(AB+CD)^2\to\max$

$AB^2+CD^2+2AB\cdot CD\to\max$

$282+2AB\cdot CD\to\max$

~~$AB\cdot CD\to\max$ $\quad (AB+CD)\le\sqrt{282+32\sqrt{73}} =$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 6 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 продолжение

$AB \cdot CD = \sqrt{6^4 - 6^2 \cdot 4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 16\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$ ↑ по $4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha \leq 1$

$4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \sin^2 2\alpha \leq 1$

$AB \cdot CD \leq \sqrt{6^4 - 6^2 \cdot 4 + 4} = \sqrt{(\cancel{6^2}\ 34 - 2)^2} = 3\cancel{6}2$, ~~будет~~

данное значение достигается при ~~$AB, CD \geq 6$~~

$\sin^2 2\alpha = 1$

$\sin 2\alpha = \pm 1$

$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

$AB + CD = \sqrt{(AB + CD)^2} \leq \cancel{232 + 38}\ 2 \cdot 34$

$\leq 232 + 2 \cdot 30 = \sqrt{332}$

Тогда $\max\{M\} = \frac{\pi r \cdot 2}{2} + \max(AB + CD) = 6\pi + \sqrt{332}$, достигается при

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

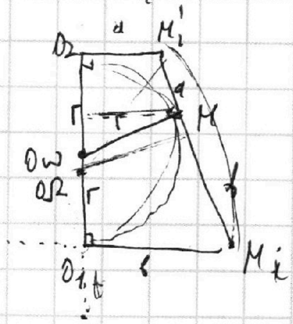
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 4 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.

Высота усеч. пирамиды как расст. между двумя гранями является $= 2r$, где r радиус ω. Тогда расс. проекцию касания для данной пирамиды с ω: пусть O_1 и O_2 центры верхней и нижней граней;



В силу „правильности" пирамиды касание будет проходить по линиям сод. середины граней больших граней; назовем их соот M_i и M_i'. Пусть $O_2M_i' = a$; $O_1M_i = b$, тогда проведем радиусы $O\omega O_1$; $O\omega O_2$ и $O\omega H$, где H касание с M_iM_i', тогда треуг. $\Delta O\omega O_2 M_i' = \Delta O\omega M_i' H$ по гипотенузе и общ. катету, аналогично $\Delta O\omega H M_i = \Delta O\omega O_1 M_i$, значит, $M_i'M_i = a+b$; треуг. $\Delta M_i' O\omega M_i$ прямоуг. и $O\omega H$ — высота к гип. в нем, если $O\Omega \in$ отр. O_1O_2 равна $\sqrt{ab}$, тогда $r = \sqrt{ab}$

Теперь рассмотрим вторую из сфер: Ω она имеет центр на прямой O_2O_1 в силу равноуд. от вершин и „правильности" пирамиды и проходит через M_1' и M_i, так как касается всех ребер в значит их середин (в основаниях). Прямые O_2M_1' и O_1M_i это катеты перп. хорд в окр. нового сечения (проход. через центр.) для Ω, а значит $\frac{O_2O\Omega}{O_1O\Omega} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$

т.е: $a^2 + \left(\frac{2\sqrt{ab}\cdot b}{a+b}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{2\sqrt{ab}\,a}{a+b}\right)^2$

$$a^2 + \frac{4ab\,b^2}{(a+b)^2} = b^2 + \frac{4ab\,a^2}{(a+b)^2}$$

$$(a^2-b^2)(a+b)^2 = 4ab(a^2-b^2)$$

$$(a+b)^2 = 4ab \qquad a = b \text{ невозможно, иначе было бы то кубом}$$

$$(a-b)^2 = 0$$

$O\Omega$ вне отрезка O_1O_2, тогда:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

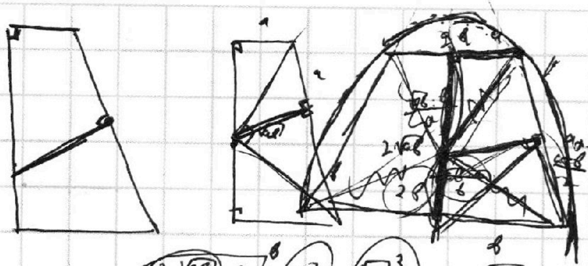
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

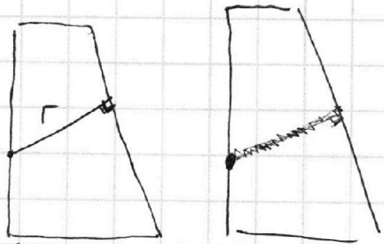
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

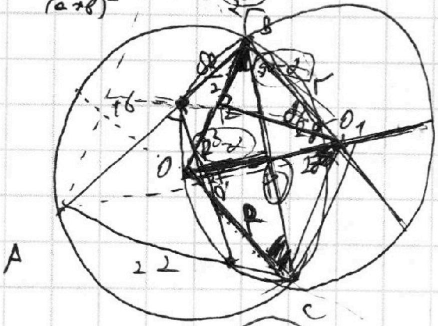


5;7

$\frac{2\sqrt{ab}\cdot a}{(a+b)}$ $+b^2$ $\frac{\sqrt{a}^3}{b}$ $\sqrt{a^2}$

$\frac{4ab\,a^2}{(a+b)^2}+b^2=r^2$

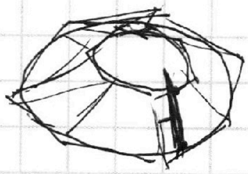




$\frac{abc}{4R}=\frac{R}{2}$

$\sin\alpha=\frac{R}{2}/r$

$\frac{R\cdot R}{2r}$



$\frac{16}{22}=\frac{r}{24}$ $4^2-r^2=24\cdot16$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

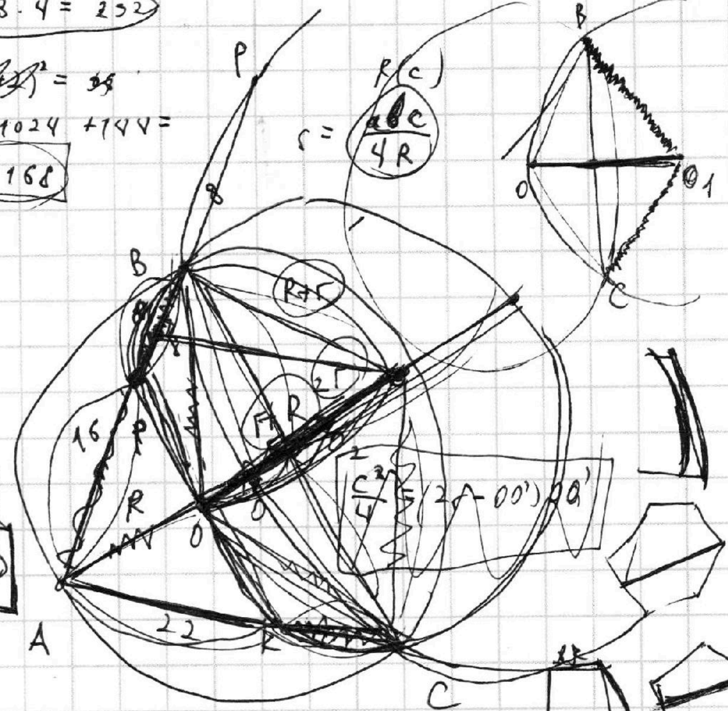
$\sqrt{2\cdot 82 + 32\sqrt{83}}$

$83\cdot 4 = 232$

$16\sqrt{2}$

$1024 + 144 = 1168$

$S = \frac{abc}{4R}$



$20 = \frac{SP^2}{4}$

$SO = 180$

$(R+2r)R = 24\cdot 16$

$24\cdot 16 = 22\cdot AK$

$AK = \frac{24\cdot 16}{22} = \frac{12\cdot 16}{11}$

$\frac{12\cdot 16}{11}\cdot 22$

$\sin\alpha (a+b)$

$\frac{(a+b)^2}{b t} = \frac{2\sqrt{ab}}{a + \frac{ab}{a+b}} = \frac{2\sqrt{ab}(a+b)}{a(a+b)+ab}$

$a^2 + 2ab$