МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1 A - четырехзначное из одинаковых цифр => $A = k \cdot 1111$, где $k \in \{1, 2, 3 \dots 9\}$

$A \cdot B \cdot C = k \cdot 1111 \cdot B \cdot C$

(это можно проверить т.к. 101 не делится на простые числа $< \sqrt{101} < 11$)

$1111 = 11 \cdot 100 + 11 = 11 \cdot 101$ где 101 - простое

т.к. $A \cdot B \cdot C$ квадрат натурального числа и $k < 11$ =>

=> $k \cdot 11 \cdot 101 = \frac{B \cdot C}{x}$ где x - квадрат натурального числа

(Все простые множители числа $A \cdot B \cdot C$ должны иметь четную степень)

т.к. C - двузначное => $B \vdots 101$ а т.к. одна цифра 7 =>

=> $B = 707$

$B \not\vdots 11$, т.к. иначе $B \geq \underbrace{101 \cdot 11}_{\text{четырехзначное}}$ => $C \vdots 11$

т.к. ~~двузначное~~ и одна из цифр 1 =>

=> $C = 11$

$707 \cdot 11 \cdot k \cdot 11 \cdot 101$ - полный квадрат

=>

$k = 7 \cdot y$ где y - полный квадрат

т.к. $k < 9$ => $k = 7$, $y = 1$, $x = 1$

тогда $\boxed{A = 7777 \quad B = 707 \quad C = 11}$

Ответ

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 707 \\ 11 \end{array} \\ \hline 707 \\ 707 \end{array}$$

Получаем, что такая тройка чисел только одна

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2 $x, y > 0$ $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$M - ?$

$M = x^3 - y^3 - 12xy$

$$K = \frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow \frac{y+x+3}{x \cdot y} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow xy = (x-4)(y+4)$ x и y – положительные $\Rightarrow$
$\Rightarrow x-4>0 \Rightarrow x>4$

$xy = xy + 4x - 4y - 16 \Rightarrow 4x - 4y = 16$

$x - y = 4$

$x = 4 + y$

$(4+y)(16+8y+y^2) =$

$= 4 \cdot 16 + \underline{32y} + 4y^2 + \underline{16y} + 8y^2 + y^3 = 4 \cdot 16 + 48y + 12y^2 + y^3$

$$M = (4+y)^3 - y^3 - 12(4+y)y = 4 \cdot 16 + 48y + 12y^2 - 12(4y + y^2) =$$

$$= 4 \cdot 16 + 48y + 12y^2 - 48y - 12y^2 = 4 \cdot 16 = 64$$

$M = 64$ при любых x и y, удовлетворяющих условию

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

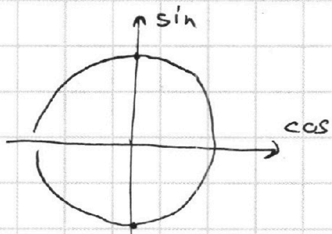
$$(\sin\pi y - \sin\pi x)\sin\pi y = (\cos\pi y + \cos\pi x)\cos\pi y$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$2\cos\pi\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\pi\left(\frac{y-x}{2}\right)\sin\pi y = 2\cos\pi\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\pi\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\pi y$$

$$\left[\begin{aligned} &\sin\pi\left(\frac{y-x}{2}\right)\cdot\sin\pi y = \cos\pi\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\pi y \\ &\cos\pi\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0 \end{aligned}\right.$$



$$\pi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \text{ целое}$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + k \Rightarrow \boxed{x+y = 1+2k}$$

$$\underbrace{\cos\pi\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\pi y - \sin\pi\left(\frac{y-x}{2}\right)\cdot\sin\pi y}_{} = 0$$

по формулы косинуса суммы

$$\cos\pi\left(\frac{3y-x}{2}\right) = 0$$

$$\pi\left(\frac{3y-x}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{3y - x = 1 + 2n}$$

Получаем:

$$\left[\begin{aligned} &3y - x = 1 + 2n \\ &x + y = 1 + 2k \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} &x = 3y - 1 - 2n \\ &x = 1 + 2k - y \end{aligned}\right.$$

где n и k любые целые

$$\arccos\frac{3y-1-2n}{7} - \arcsin\frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 4

Пусть выделено a билетов, а одиннадцатиклассников всего x

Тогда кол-во вариантов групп людей, которые пойдут на концерт: (группа Петя, Вася и Вася, Петя одинаковые)

$$b = \frac{x!}{a!(x-a)!}$$

При этом кол-во групп, в которых может оказаться конкретный человек (например, Петя) будет равно:

$$\frac{(x-1)!}{(a-1)!(x-1-(a-1))!} = \frac{(x-1)!}{(a-1)!(x-a)!}$$

то же самое для двух людей:

$$\frac{(x-2)!}{(a-2)!(x-a)!} = c$$

Тогда $\frac{c}{b}$ – вероятность, что два выбранных человека пойдут на концерт

$$\frac{c}{b} = \frac{(x-2)!}{(a-2)!} \cdot \frac{a!}{x!} = \frac{a(a-1)}{x(x-1)}$$

$a_1 = 4$ – в начале месяца

$a_2 - ?$ $\quad x = const$

По условию: $\frac{4(4-1)}{x(x-1)} \cdot \frac{x(x-1)}{a_2(a_2-1)} = \frac{1}{11}$

$$\frac{4 \cdot 3}{a_2(a_2-1)} = \frac{1}{11} \Rightarrow a_2^2 - a_2 = 11 \cdot 12$$

$$a_2(a_2-1) = 11 \cdot 12 \Rightarrow a_2 = \left[\begin{array}{l} 12 \\ -11 \end{array}\right.$$

т.к. $a_2 > 0$ $\Downarrow$ $a_2 = 12$

Было выделено 12 билетов

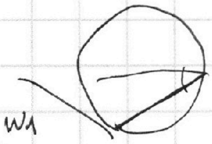
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

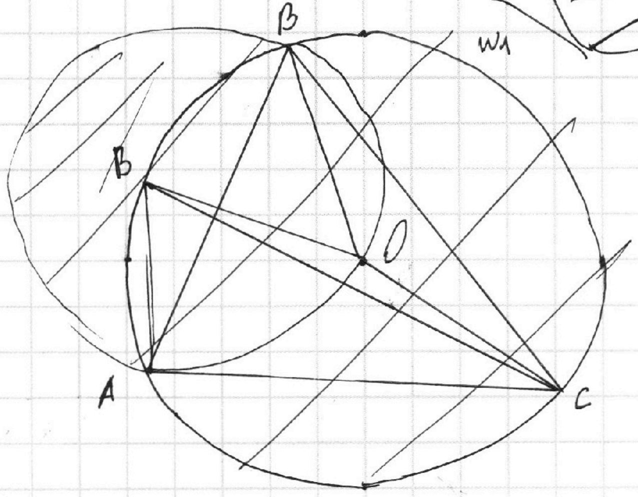
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 5





$AP=16$

$BP=8$

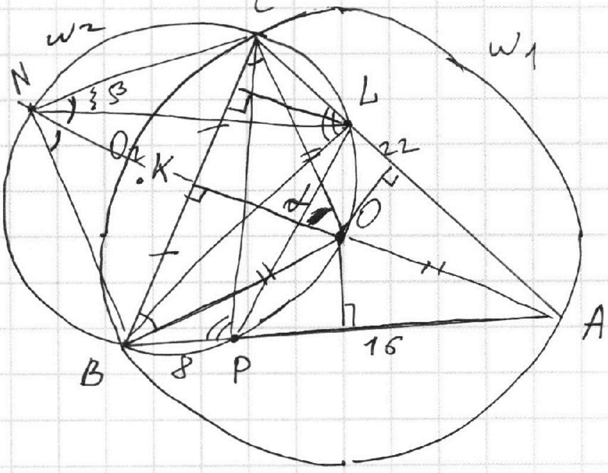
$AC=22$

т.к. O — центр описанной окружности $\triangle ABC \Rightarrow$ т. O — пересечение серединных $\perp$ к сторонам $\triangle ABC \Rightarrow OK \perp BC \Rightarrow$ $\Rightarrow K$ — середина $BC \Rightarrow$ $\Rightarrow OK$ — медиана и высота в $\triangle BOC$

$OA = CO = BO$ (радиусы w_1)

для w_2:

$\smile CO = \smile BO$



Из св-ва секущей:

$AL \cdot AC = AP \cdot BA$

$AL \cdot 22 = 16 \cdot 24$

$AL = \frac{16\cdot 24}{22} = \frac{8\cdot 24}{11}$

$CL = 22 - \frac{8\cdot 24}{11}$

$24 \times 8 = 192$

$192 : 11 = 17\frac{5}{11} = AL$

Т.к. KO — ср.пер. к $BC \Rightarrow$

$\Rightarrow O_2 \in KO$ где O_2 центр $w_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow ON$ — диаметр w_2

$OK \cap w_2 =$ т. N

$$S = \frac{22\cdot 24\cdot BC}{4OA} = 22\cdot 6\cdot \frac{BC}{OC} = 12\cdot 22\cdot \sin\alpha$$

$NC = OC$

$\angle NLC = \angle NOC = \alpha$ опираются на одну дугу

$$\frac{NC}{\sin\alpha} = \frac{CL}{\sin\beta} = 2R_{w_2} = NO$$

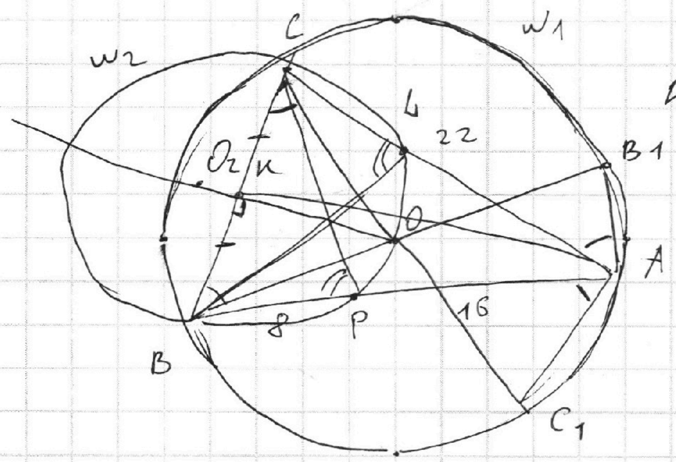
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 5



AK - медиана к BC

$KA = \frac{\sqrt{2\cdot 22^2+2\cdot 16^2-BC^2}}{2}$

BC - диаметр $w_2 \Rightarrow \angle CLB = 90^\circ$

$BL = \sqrt{24^2-\left(\frac{8\cdot 24}{11}\right)^2} = 24\cdot\sqrt{\frac{3}{11}}$

$BC = \sqrt{CL^2+BL^2} = \sqrt{\frac{50^2}{11^2}+24^2\cdot\frac{3}{11}} = \frac{2500+24^2\cdot 33}{11^2}$

$\frac{22\cdot 11-192}{11}$

$BC^2 = 2OC^2$

$\begin{array}{r} \times\ 22 \\ 11 \\ \hline 22 \\ 22 \end{array}$ $\begin{array}{r} -\ 242 \\ 192 \\ \hline 50 \end{array}$

$\frac{\sqrt{\frac{50^2}{11^2}+24^2\cdot\frac{3}{11}}}{2} = OC$

$S = \frac{22\cdot 24\cdot BC}{4OC}$

Ответ

№6

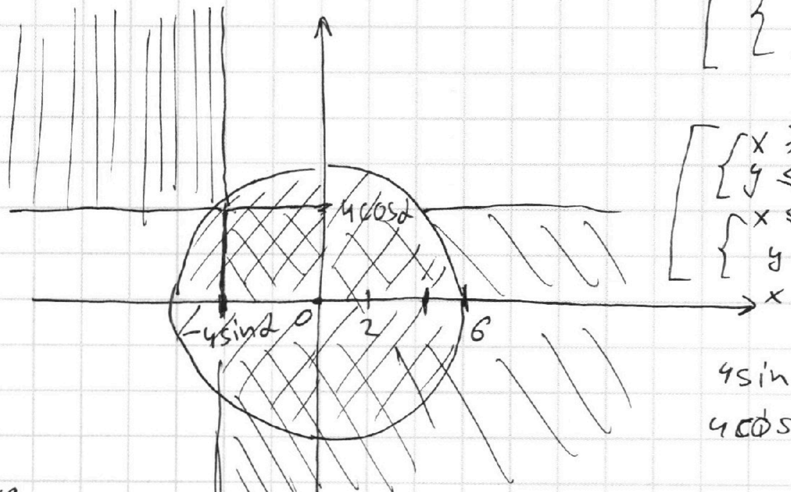
$$\begin{cases}(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0\\ x^2+y^2\le 36\ (1)\end{cases}$$

уравнение окружности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+4\sin\alpha\ge 0\\ y-4\cos\alpha\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+4\sin\alpha\le 0\\ y-4\cos\alpha\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -4\sin\alpha\\ y\le 4\cos\alpha\end{cases}\ (2)\\ \begin{cases}x\le -4\sin\alpha\\ y\ge 4\cos\alpha\end{cases}\ (3)\end{array}\right.$$



$4\sin\alpha\in[-4;4]$

$4\cos\alpha\in[-4;4]$

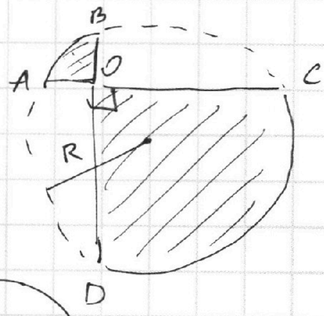
пример

(1)

(2)

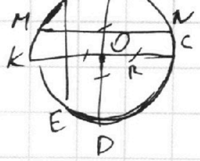
(3)

полученная фигура $\Phi(\alpha)$ имеет вид:



её периметр равен сумме двух хорд и двух дуг образованных вертикальными углами ($BD\perp AC$)

$\cup DC+\cup AB=\pi R$ при любых α т.к.



$\cup AC=\cup EC$
$\cup AK=\cup KE$
$\Rightarrow \cup AK+\cup EC=\pi R$

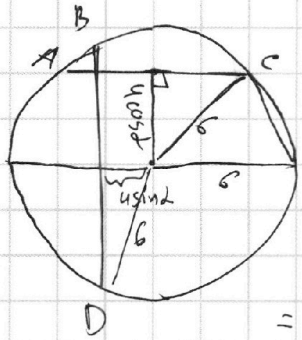
$\cup BN=\cup BM$

~~$\cup MK+BK$~~

$\cup AM+$ ~~$\cup EN=\pi R=\cup NC+CD+\cup ED+$~~ $\cup AM$

№6 (продолжение)

нужно максимизировать сумму длин хорд



$AC = 2\sqrt{36-16\cos^2\alpha} = 2\sqrt{20+16\sin^2\alpha}$

$BD = 2\sqrt{36-16\sin^2\alpha} = 2\sqrt{20+16\cos^2\alpha}$

$\cancel{(AC\cdot BD)^2} =$

$= 2\cancel{AC\cdot BD + 4(36-16\cos^2\alpha + 36-16\sin^2\alpha)}$

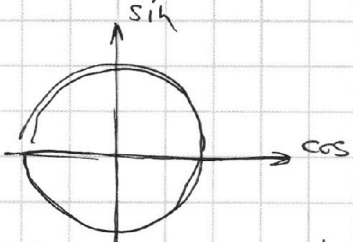
$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$

$AC = 2\sqrt{36-16(1-\sin^2\alpha)} = 2\sqrt{20+16\sin^2\alpha}$

$AC+BC = 2\sqrt{20+16\cdot\sin^2\alpha} + 2\sqrt{36-16\sin^2\alpha} = f(\alpha)$

$f'(\alpha) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{20+16\sin^2\alpha}}\cdot 16\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{36-16\sin^2\alpha}}\cdot(-16\cdot 2\cdot\sin\alpha\cos\alpha)$

$f'(\alpha) = 0$ при $\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0\\ \cos\alpha = 0\end{array}\right.$ или при $\frac{1}{\sqrt{20+16\sin^2\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{36-16\sin^2\alpha}} = 0$



$20+16\sin^2\alpha = 36-16\sin^2\alpha$

$32\sin^2\alpha = 16$

$2\sin^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$

$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

т.е. мы получили, что $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 0$

точки минимумов и максимумов для $f(\alpha)$ т.е. для суммы хорд

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

$$AC+BD = 2\sqrt{36-16\cos^2\alpha} + 2\sqrt{36-16\sin^2\alpha}$$

при $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$ тогда:

$$AC+BD = 2\sqrt{36-8}\cdot 2 = 4\sqrt{28} = 8\sqrt{7}$$

при $\sin\alpha = 0 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1$; при ~~sin~~ $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1$

$$AC+BD = 2\sqrt{36-16} + 2\cdot\sqrt{36} = 2\sqrt{20} + 12$$

$\overset{16}{8\cdot 2} < 8\sqrt{7} < 8\cdot\sqrt{9} = 24$

$\overset{8}{2\cdot 4} < 2\sqrt{20} < 2\cdot 5$

$64 \times 7 = 448$

$448 - 144 = 304$

$304 - 80 = 224$

$224 : 8 = 28$

$28 \times 28 = 784$

$8\sqrt{7} \vee 2\sqrt{20} + 12$

$64\cdot 7 \vee 4\cdot 20 + 4\cdot 12\cdot\sqrt{20} + 144$

$64\cdot 7 - 80 - 144 \vee 4\cdot 12\cdot\sqrt{20}$

$224 \vee \underset{6\cdot 8}{48}\sqrt{20}$

$28 \vee 6\sqrt{20}$

$28^2 \vee 36\cdot 20$

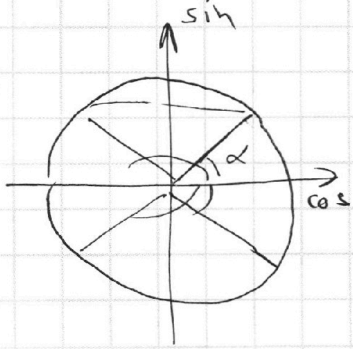
$784 > 720$

$8\sqrt{7} > 2\sqrt{20} + 12$

$\Leftarrow \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$M = AC + BD + \pi R = 6\pi + 8\sqrt{7}$ ← Ответ

$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k, k\in Z$



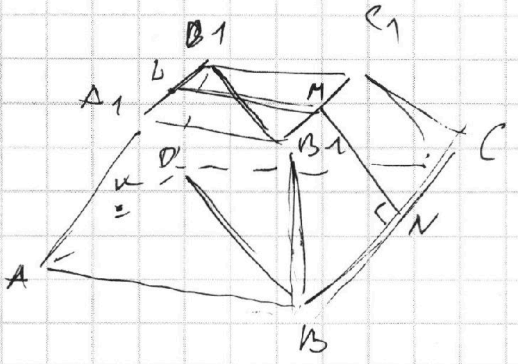
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

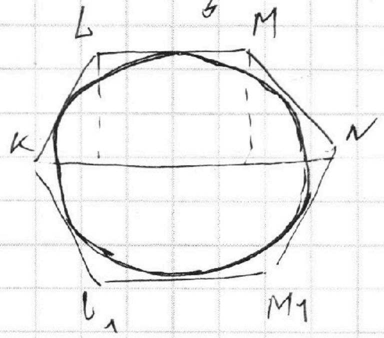
СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№7

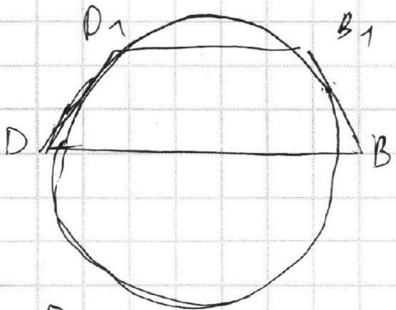


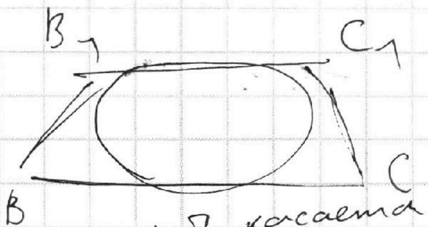
т.к. ω касается всех граней



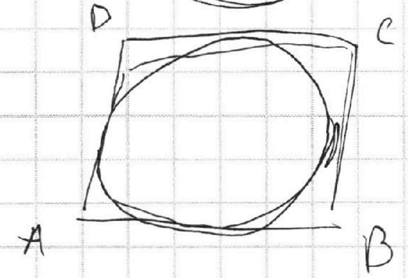
L_1 и M_1 симметричны отн. KN т. L и M

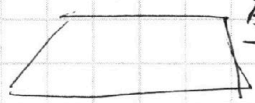
для Ω:





т.к. Ω касается всех ребер => плоскость (BC_1C) пересекая ее и мы получаем сечение в виде окружности, вписанной в B_1C_1CB





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4 Пусть всего x одиннадцатиклассников

Для всех детей вероятность попасть на концерт одинаковы, т.к. билеты распределили случайным образом (по условию)

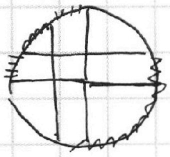
(в начале месяца)

(1) Вероятность, что Петя пойдет: $\frac{4}{x}$

что Вася пойдет: $\frac{4}{x}$ => вероятность им обоим вместе попасть: $\frac{16}{x^2}$

(2) Пусть стало y билетов в конце месяца =>

=> ~~Вероятность стала~~ (аналогично (1)): $\frac{y^2}{x^2}$

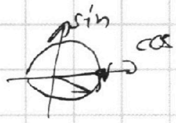


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



~~sin 30 + cos~~

$2\cos 60$

$\sin 30 - \sin 90 =$

$= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

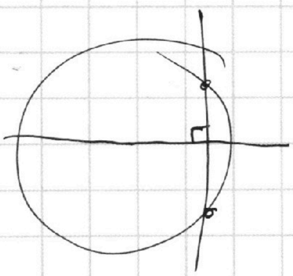
$\cos 60 + \cos 60$

$2\cos 60 \sin -30 = \sin -30 = -\frac{1}{2}$

6

$\frac{4!}{2!\,2!} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$

$\frac{x!}{4!\,(x-2)!}$



3

24×8

$192 : 11 = 17\frac{5}{11}$

-11

82

-77

5