



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Заметим, что если A — четырехзначное число из одинаковых цифр, $A = 1111 \cdot k$, $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

$1111 = 11 \cdot 101$, 11 и 101 — простые.

ABC — квадрат, $A: 11$ и 101 в первой степени ($k \leq 9$, значит, $\nmid 11$, $\nmid 101$ ($k \neq 0$)). 3-я степень

вхождения любого простого в квадрат четна, значит, в BC и 11 , и 101 входят в четной степени. Число C двузначное, значит, $C \leq 99 < 101$, $C \neq 0$, значит, $C \nmid 101$. Значит, $B: 101$.

В трехзначное, трехзначное число, кратное 101 : $101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909$.

Хотя бы одна его цифра — 5, значит, подходит только 101 . $B = 101$.

$101 \nmid 11$, значит, $C: 11$. Двузначные числа, кратные 11 : $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$.

Хотя бы одна его цифра — 5, значит, подходит только 55 . $C = 55$.

$BC = 5 \cdot 11 \cdot 101$, $A = 11 \cdot 101 \cdot k$. Чтобы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом, в k 5 должно входить в четной степени, все ост. простые — в четной. k — натуральное число, $k \leq 9$.

$5^1 < 9$, $5^3 = 125 > 9$, т.е. степень вхожд.

5 — 1. Пусть $k: n \cdot p^2$, где p — простое ($\neq 5$).

$p \geq 2$, $p^2 \geq 4$, $k \geq 5$. $4 = 2^2 > 9$ — противоречие.

Значит, степень вхожд. всех остальных простых 0, т.е. $k = 5$. Отсюда $A = 11 \cdot 101 \cdot 5 = 5555$,

$ABC = (5 \cdot 11 \cdot 101)^2 = 5555^2$

Ответ: $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

Приведем все части к общему знаменателю:

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$

$$x - y - 3 = 0, \quad y = x - 3. \quad \text{Подставим в М:}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) =$$

$$= x^3 - x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 - 3 \cdot x \cdot 9 + 27 - 9x^2 + 27x =$$

$$= x^3 - x^3 + 9x^2 - 9x^2 + 27x - 27x + 27 = 27.$$

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

Затемним разность синусов и сумму косин:

$$2 \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \pi x$$

$$1. \cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi(x+y)}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 + 4k, k \in \mathbb{Z} \\ x+y = -1 + 4k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y \stackrel{4}{\equiv} 1 \\ x+y \stackrel{4}{\equiv} -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4k+1-x, k \in \mathbb{Z} \\ y = 4k-1-x, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \stackrel{4}{\equiv} 1-x+1 \\ y \stackrel{4}{\equiv} -x-1 \end{cases}$$

$$2. \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \neq 0, \text{ сократим на него:}$$

$$\sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x$$

Затемним произведение синусов и пр-е косин:

$$\cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} - \pi x \right) - \cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) = \cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) + \cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} - \pi x \right)$$

$$2 \cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2x = 1+4k, k \in \mathbb{Z} \\ x-y+2x = -1+4k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4m - 1 + 3x, & m \in \mathbb{Z} \\ y = 4m + 1 + 3x, & m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \equiv_{4} 3x - 1 \\ y \equiv_{4} 3x + 1 \end{cases}$$

Ответ: x любое, $\begin{cases} y \equiv_{4} -x + 1 \\ y \equiv_{4} -x - 1 \\ y \equiv_{4} 3x - 1 \\ y \equiv_{4} 3x + 1 \end{cases}$

$$\text{б) } \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

$$-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1, \quad -4 \leq x \leq 4, \quad -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1, \quad -9 \leq y \leq 9$$

$\arccos$ опр. на отрез. $[0; \pi]$, значит, $\arccos \frac{x}{4} \leq \pi$, $\arccos \frac{y}{9} \leq \pi$, ~~а~~ сумма $\leq 2\pi$, не подх. только случай равенства, т.е. когда $\arccos \frac{x}{4} = \pi$ и $\arccos \frac{y}{9} = \pi$, т.е.

$$\frac{x}{4} = -1, \quad x = -4, \quad \text{и} \quad \frac{y}{9} = -1, \quad y = -9.$$

$$-9 = -(-4) - 1 \neq -3 \cdot 4, \quad \text{т.е. пара подходит.}$$

Ответ: одна: $(-4; -9)$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.

Пусть кол-во одиннадцатиклассников - n .
 в нач. месяца:

Рассмотрим их от одного до n ,
 номера 1, 2, 3, 4 выданы билеты.
 "Удачных" пар номеров для Тети и Васи
 $4 \cdot 3 = 12$ (Тете выбирает один из первых четырех,
 Васю из оставшихся после выбора Тети трех),
 Всего пар номеров $n(n-1)$ (Тете выбирает один
 из n , Васю из оставшихся). Значит,
 в начале месяца вероятность $\frac{12}{n(n-1)}$.

В конце месяца распределили билеты
 анонимно, но теперь их k , т.е.
 кол-во "удачных" пар для Тети и Васи
 $k(k-1)$, т.е. вероятность $\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$.
 Вероятность увелич. в 3,5 раза, т.е.

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} : \frac{12}{n(n-1)} = 3,5$$

$$\frac{k(k-1)}{12} = 3,5$$

$$k^2 - k - 42 = 0$$

$$(k-7)(k+6) = 0$$

$$k = 7$$

$k = -6$ - не подх., т.к. кол-во билетов
 неотриц. (> 4).

Значит, $k = 7$

Ответ: 7



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

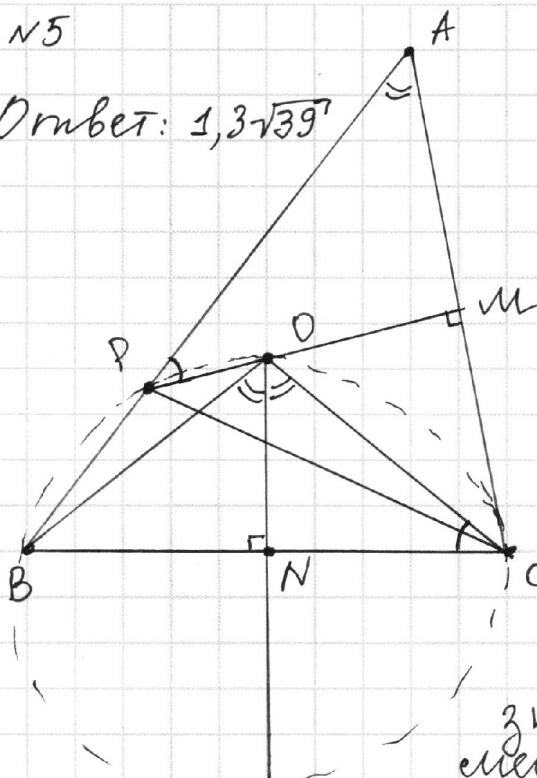


СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

Ответ: $1,3\sqrt{39}$



1) четырехугольник BCOP -
вписанный, по свойству
впис. четыр-ка
 $\angle APO = \angle BCO$ ($\angle APO =$
 $= 180^\circ - \angle BPO$ (внешн.) $=$
 $= \angle BCO$ (сумма противоп
угов 180°))

2) отметим точку N -
середину BC. O - центр
окр. ABC, значит,
лежит на серединном
перпендикуляре к BC,
значит $ON \perp BC$, ON -
медiana и высота в $\triangle BOC$,

по призн. $\triangle BOC$ равноб. по св-ву ON - бисс.
в $\triangle BOC$. Значит, $\angle NOC = \frac{1}{2} \angle BOC$. При этом
 $\angle BOC$ - центральный дуге BC, и опирается на
дугу BC, а $\angle BAC$ - вписанный дуге BC, и
опирается на дугу BC, по теор. о центр. угле
 $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle NOC$.

3) Рассмотрим $\triangle NOC$. Он прямоугольный,
значит, $\angle NOC + \angle OCN = 90^\circ$. Рассмотрим
 $\triangle APM$. $\angle PMA = 180^\circ - \angle MAP - \angle APM =$
 $= 180^\circ - \angle BAC - \angle APO$ (те же угол) $= 180^\circ - \angle NOC -$
 $- \angle BCO$ (по пунктам 1 и 2) $= 180^\circ - \angle NOC - \angle OCN$
(те же угол) $= 180^\circ - 90^\circ$ (этот же пункт) $= 90^\circ$.

4) $OM \perp AC$, O лежит на серед. перп. к AC $\Rightarrow M$ -
серед. AC, $AM = \frac{1}{2} AC = 2$. Найдем теор. Пиф. дуге
 $\triangle AMP$: $PM = \sqrt{AP^2 - AM^2} = \sqrt{\frac{256}{25} - 4} = \sqrt{\frac{156}{25}} = \frac{2}{5}\sqrt{39}$

5) $S_{APC} = \frac{1}{2} PM \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{39} \cdot 4 = \frac{4}{5}\sqrt{39}$

6) у $\triangle ABC$ и $\triangle APC$ общ. вое. из C $\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{AB}{AP} = \frac{AP+PB}{AP} = 1 + \frac{2 \cdot 5}{16} =$
 $= \frac{13}{8}$, $S_{ABC} = \frac{13}{8} S_{APC} = \frac{13}{8} \cdot \frac{4}{5}\sqrt{39} = 1,3\sqrt{39}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

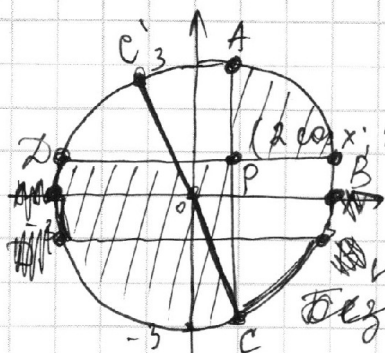
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

Изобразим $\Phi(\alpha)$ на коорд. плоскости:
второе пер-во означает, что она находится внутри круга с центром в $(0;0)$ и радиусом 3. Первое пер-во верно, если $(x \geq 2 \cos \alpha$ и $y \geq 2 \sin \alpha)$ или $(x \leq 2 \cos \alpha$ и $y \leq 2 \sin \alpha)$, т.е. всегда Φ лежит в объединении двух областей: выше прямой $x = 2 \cos \alpha$ и правее прямой $y = 2 \sin \alpha$; ниже прямой $x = 2 \cos \alpha$ и левее прямой $y = 2 \sin \alpha$.



Заметим, что M складывается из дуг AB и CD ~~и отрезков~~ AC и BD .

1) Докажем, что $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = 3\pi$ независимо от α .

~~Безоусловно очевидно, пусть~~

~~Вдоль оси Ox отразим отрезок BD относительно Oy, т.е. все Ox.~~

Проведем диаметр CC_1 . В симметр. D отн. Oy , т.к. BD ~~когда~~ $BD \parallel Ox \perp Oy$, AC ~~симметр.~~ $AC \parallel Oy$ и $BD \parallel Ox \perp Oy$, Oy - диам., значит, Oy - серед. перп. к BD ; A симм. C_1 т.к. CC_1 - диам. $\Rightarrow \angle ACC_1 = 90^\circ \Rightarrow AC' \perp AC \parallel Oy$, Oy - диам., зн. Oy - серед. перп. к AC' , значит, $AB = AC'$ т.е. $AB + CD = AC' + CD = CC_1 = 2R = 3\pi$.

2) $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = \text{const}$, значит, остается максимиз. $AC + BD$. Пусть у точки P коорд. $(x_0; y_0)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

III. к. $x_0 = 2 \cos \alpha$, $y_0 = 2 \sin \alpha$, можно
указать что $x_0 \in [-2; 2]$, $y_0 \in [-2; 2]$,
 $x_0^2 + y_0^2 = 4$ т.е. точка P лежит
на окружности с центром $(0; 0)$ и радиусом 2.

$$AC = 2\sqrt{9-x_0^2} \quad (A = (x_0; \sqrt{9-x_0^2}), C = (x_0; -\sqrt{9-x_0^2}))$$

$$BD = 2\sqrt{9-y_0^2} \text{ (аналогично)}, \text{ тогда } = 2\sqrt{9-4+x_0^2} =$$

$$= 2\sqrt{5+x_0^2} \quad \text{или } AC + BD = 2\sqrt{9-x_0^2} + 2\sqrt{5+x_0^2}$$

$$2\sqrt{9-x_0^2} + 2\sqrt{5+x_0^2} \rightarrow \max$$

$$\sqrt{9-x_0^2} + \sqrt{5+x_0^2} \rightarrow \max, \text{ число } > 0, \text{ значит}$$

при увелич. числа растет
и квадрат

$$(\sqrt{9-x_0^2} + \sqrt{5+x_0^2})^2 \rightarrow \max$$

$$14 + 2\sqrt{(9-x_0^2)(5+x_0^2)} \rightarrow \max$$

$$\sqrt{(9-x_0^2)(5+x_0^2)} \rightarrow \max, \text{ корень имеет.}$$

$$(9-x_0^2)(5+x_0^2) \rightarrow \max, x_0^2 = t, t \in [0; 4]$$

$$-t^2 + 4t + 45 \rightarrow \max, \text{ параб. ветв. вниз,}$$

макс. в вершине, $t_0 = 2$, верш. на
отр. $[0; 4]$, значит, макс. достиг.

$$x_0^2 = 2$$

$$|2 \cos \alpha| = \sqrt{2}$$

$$|\cos \alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{При этом } AC + BD = 2\sqrt{9-x_0^2} + 2\sqrt{5+x_0^2} = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} =$$

$$= 4\sqrt{7}, M = 4\sqrt{7} + 3\pi$$

$$\text{Ответ: } 4\sqrt{7} + 3\pi \text{ при } \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

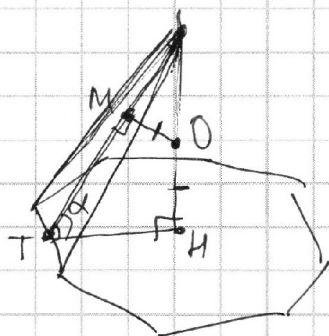
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.

Заметим, что центры обоих шаров
лежат на высоте пирамиды ~~и на ее оси~~
~~и на ее оси~~, ~~и на ее оси~~ из сообр. симм.

ω:

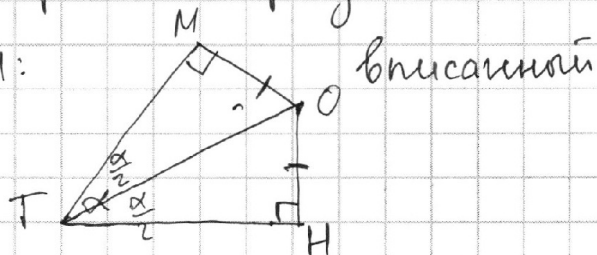


расст. от центра шара

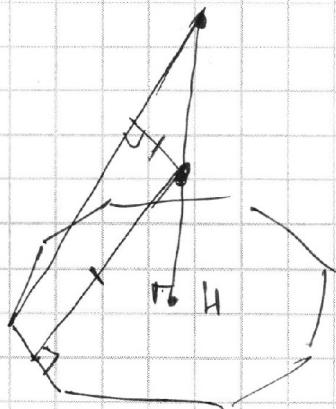
до боковой грани -
расст. до апофемы.

Рассмотрим четырехугольник

OMTH:



Ω



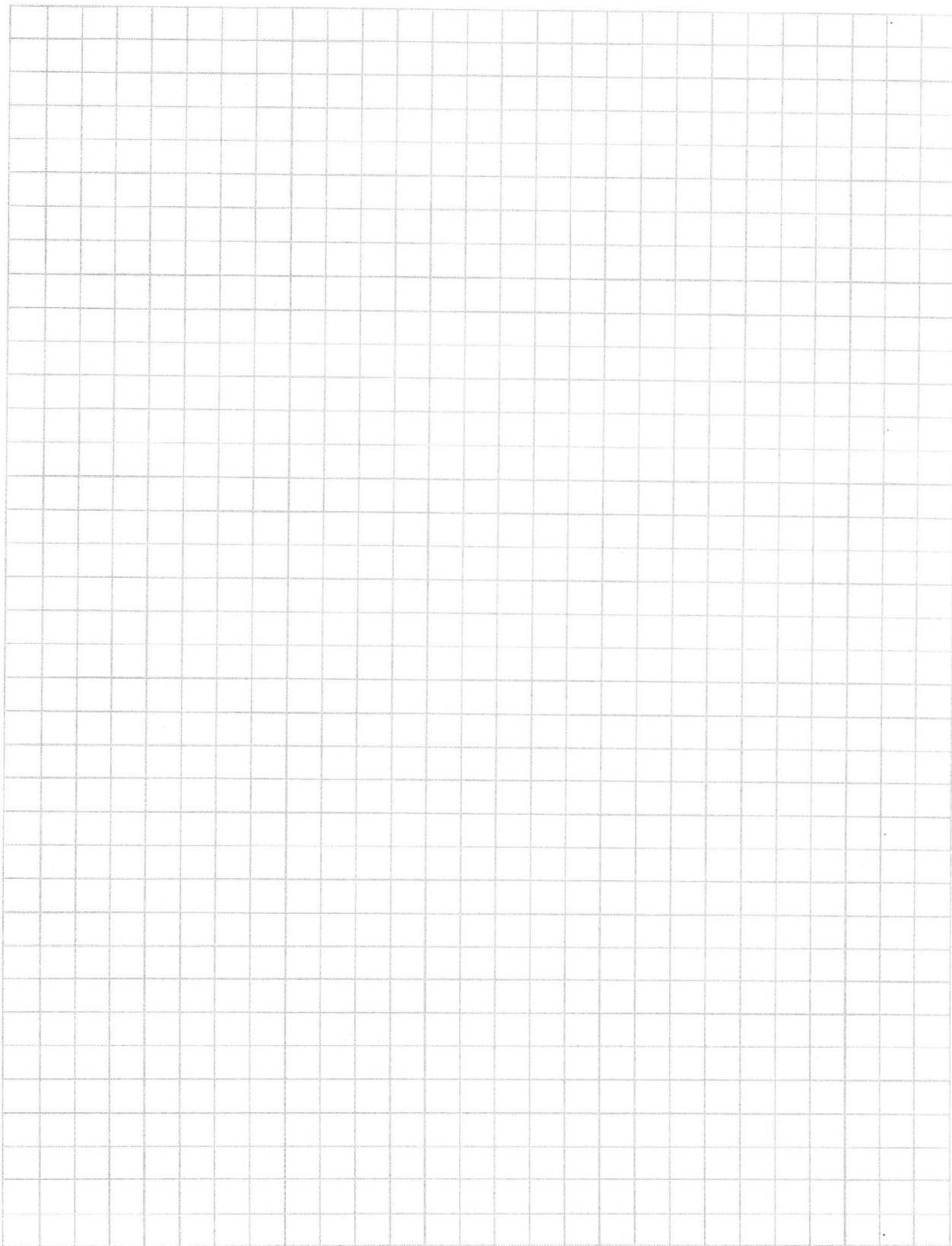


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) + \cos(a+b) =$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\sin a$$

$$\cos \cos = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\sin(a+b) - \sin a = \sin a \cos b + \sin b \cos a - \sin a =$$

$$= \sin a (\cos b - 1)$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b \cos a$$

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b$$

$$a+b=t$$

$$a-b=s$$

$$a+b=t$$

$$a-b=s$$

$$\cos s - \cos t = 2 \sin \frac{t+s}{2} \sin \frac{t-s}{2}$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos \frac{t}{2} \cos \frac{s}{2}$$

$$a = \frac{t+s}{2} \quad b = \frac{t-s}{2}$$

$$\sin t - \sin s = 2 \sin \frac{t-s}{2} \cos \frac{t+s}{2}$$

$$\sin \pi x (\sin \pi x - \sin \pi y) = 2 \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \sin \pi x$$

$$\cos \pi x (\cos \pi x + \cos \pi y) = 2 \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \frac{\pi(x+y)}{2}$$

$$\cos \pi x (\cos \pi x + \cos \pi y) = 2 \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \pi x$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2}$$

н единиц.

б нумер:

нумер. от 1 до n, первые 4 аргумента

$$4 \cdot \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{12}{n(n-1)}$$

б концы:

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$\frac{k(k-1)}{12} = 3,5$$

$$3,5 \cdot 12 = 4 \cdot 6 = 42$$

$$k^2 - k - 42 = 0$$

$$D = 1 + 168 = 169$$

$$k^2 - k = 42 \quad k = 4$$

$$(k-4)(k+6) = 0 \quad k = -6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111k, \quad k - \text{целое}$$

$$B = 100a_1 + 10b_1 + c_1, \quad a_1, b_1, \text{ или } c_1 = 1$$

$$C = 10a_2 + b_2, \quad a_2, \text{ или } b_2 = 5$$

$A \cdot B \cdot C$ - квадрат

$$\begin{array}{r} 1111 \div 11 \\ 103 \end{array} \quad A = 11 \cdot 101 \cdot k \quad C \neq 101 (\angle 101)$$

$$B \neq 103$$

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = 0 \quad 3\text{-цифры: } 101, 202, \dots, 909, \text{ если } 1 - 101$$

$$C \neq 11, \text{ если } 5 - 55$$

$$BC = 11 \cdot 101 \cdot 5, \quad k = 5$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad \begin{array}{l} x^3 - 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 9 - 27 = \\ = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 \end{array}$$

$$x^3 - y^3 - 9xy \quad x(x^2 - 9y) \quad x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) =$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) \quad = \cancel{x^3} - \cancel{x^3} + \cancel{9x^2} - \cancel{27x} + 27 - \cancel{9x^2} + \cancel{27x}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x+y+1 > 0, \text{ можно сокр.}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$y = x-3$$

$$3(x^2 + x(x-3) + (x-3)^2) =$$

$$\cancel{xy} + 3x - 3y - 9 = \cancel{xy} \quad = 3(x^2 + x^2 - 3x + x^2 -$$

$$x - y - 3 = 0$$

$$\cancel{x} - y = 3$$

$$y = x-3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

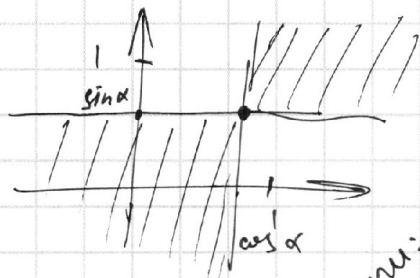
$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$(x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0$$

Или: $x=2\cos\alpha, y=2\sin\alpha$

Или $x \geq 2\cos\alpha$ и $y \geq 2\sin\alpha$

Или $x \leq 2\cos\alpha$ и $y \leq 2\sin\alpha$

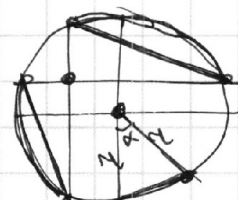
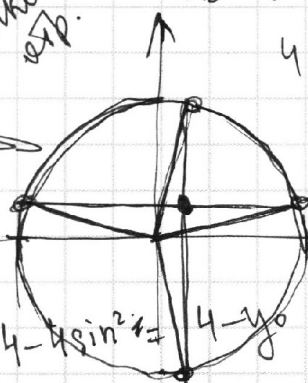
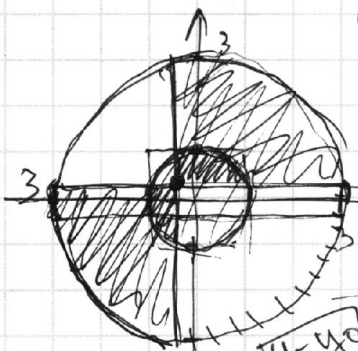


$$\sin\alpha = \cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \cos\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

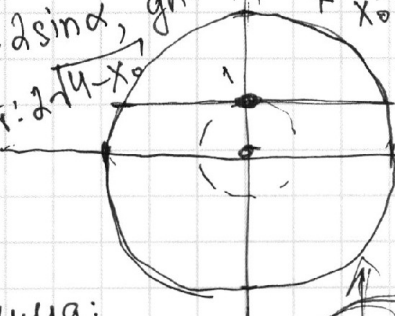
гипотенуза: $2\sqrt{2}$
макс. перпен. $2\cos\alpha; 2\sin\alpha$
экстр.

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$
$$4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha = 4$$

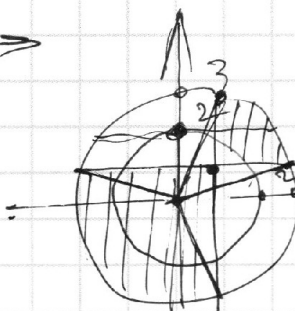


$$1+x^2=9$$
$$x^2=8$$

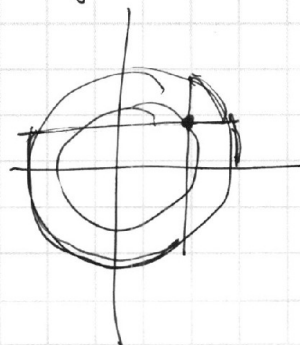
Для
гор: $2\sin\alpha$, gn. $= \sqrt{4-x_0^2}$
верх: $2\sqrt{4-x_0^2}$



$$6+2\sqrt{8}+$$



гипотенуза: $2\sqrt{2}$
макс. перпен. $2\cos\alpha; 2\sin\alpha$
экстр.



Сумма:

$$2(\sqrt{4-x_0^2} + \sqrt{4-y_0^2})$$

от 0 до 9

