



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 2



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
  - $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
  - $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 3, а  $y$  — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 9xy$ .
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .  
б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{16}{5}$ ,  $BP = 2$ ,  $AC = 4$ .
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Заметим, что если  $A$  - четырехзначное число из одинаковых цифр,  $A = 1111 \cdot k$ ,  $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ .

$$1111 = 11 \cdot 101, 11 \text{ и } 101 \text{ - простое.}$$

$A \cdot B \cdot C$  - квадрат,  $A: 11$  и  $101$  в первой степени ( $k \leq 9$ , значит,  $\nmid 11, \nmid 101$  ( $k \neq 0$ )). За степень четвертичного любого простого в квадрат четна, значит  $B \cdot C$  и  $11$ , и  $101$  входят в четной степени. Число с двузначное, значит,  $C \leq 99 < 100$ ,  $C \neq 0$ , значит  $C \nmid 103$ . Значит,  $B: 101$ .

В четырехзначные, трехзначные числа, кратные  $101$ :

$$101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909.$$

Хотя бы одна из его цифр  $5$ , значит, подходит только  $101$ .  $B = 101$ .

$101 \nmid 11$  значит,  $C: 11$ . Результативные числа, кратные  $11: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$ .

Хотя бы одна из его цифр  $5$ , значит, подходит только  $55$ .  $C = 55$ .

$B \cdot C = 5 \cdot 11 \cdot 101, A = 11 \cdot 101 \cdot k$ . Чтобы ~~или~~  $A \cdot B \cdot C$  было квадратом, в  $k$  5 должно входить в четной степени, все остальные простые числа.

в четной.  $\nmid k$  - нечетное. цифра,  $\nmid$  т.е.  $\leq 9$ .

$$5^1 < 9, 5^3 = 125 > 9, \text{ т.е. степень четная.}$$

$5^1 - 1^2$ . Итак  $k: \text{на } p^2$ , где  $p$  - простое ( $\neq 5$ ).

$p \geq 2, p^2 \geq 4, k \geq 5 \cdot 4 = 20 > 9$  - противоречие.

Значит, степень четная. всех остальных простых 0, т.е.  $k = 5$ . Отсюда  $A = 11 \cdot 101 \cdot 5 = 5555$ ,

$$A \cdot B \cdot C = (5 \cdot 11 \cdot 101)^2 = 5555^2$$

Ответ:  $(5555; 101; 5)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

Приведем все части к общему знаменателю:

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$

$x - y - 3 = 0$ ,  $y = x - 3$ . Подставим в M:

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) =$$

$$= x^3 - x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 - 3 \cdot x \cdot 9 + 27 - 9x^2 + 27x =$$

$$= x^3 - x^3 + 9x^2 - 9x^2 + 27x - 27x + 27 = 27.$$

Ответ: 27.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3

a)  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$

Запишем разность синусов и сумму косин:

$$\cancel{2} \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \pi x = \cancel{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \pi x$$

1.  $\cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0$

$$\begin{cases} \frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi(x+y)}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 + 4k, k \in \mathbb{Z} \\ x+y = -1 + 4k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y \stackrel{4}{=} 1 \\ x+y \stackrel{4}{=} -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4k+1-x, k \in \mathbb{Z} \\ y = 4k-1-x, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \stackrel{4}{=} 1-x+1 \\ y \stackrel{4}{=} -x-1 \end{cases}$$

2.  $\cos \frac{\pi(x+y)}{2} \neq 0$ , сократим на него.

$$\sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x$$

Запишем произведение синусов и np-e косин:

$$\cancel{\cos \left( \frac{\pi(x-y)}{2} - \pi x \right) - \cos \left( \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right)} = \cos \left( \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) + \cos \left( \frac{\pi(x-y)}{2} - \pi x \right)$$

$$= \cancel{\cos \left( \frac{\pi(x-y)}{2} - \pi x \right) + \cos \left( \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right)}$$

$$2 \cos \left( \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\cos \left( \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2x = 1 + 4k, k \in \mathbb{Z} \\ x-y+2x = -3 + 4k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4m - 1 + 3x, m \in \mathbb{Z} \\ y = 4m + 1 + 3x, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \stackrel{4}{=} 3x - 1 \\ y \stackrel{4}{=} 3x + 1 \end{cases}$$

Ответ: x любое,  $\begin{cases} y \stackrel{4}{=} -x + 1 \\ y \stackrel{4}{=} -x - 1 \\ y \stackrel{4}{=} 3x - 1 \\ y \stackrel{4}{=} 3x + 1 \end{cases}$

5)  $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$

$-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1, -4 \leq x \leq 4, -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1, -9 \leq y \leq 9$

$\arccos$  опр. на отр.  $[0; \pi]$ , значит,  
 $\arccos \frac{x}{4} \leq \pi, \arccos \frac{y}{9} \leq \pi$  ~~и~~ сумма  $\leq 2\pi$ ,  
не подх. только случаи равенства, т.е.  
когда  $\arccos \frac{x}{4} = \pi$  и  $\arccos \frac{y}{9} = \pi$ , т.е.

$\frac{x}{4} = -1 \Rightarrow x = -4, \text{ и } \frac{y}{9} = -1, y = -9.$

$-9 = -(-4) - 1 - 3 \cdot 4$ , т.е. пара подходит.

Ответ: одна:  $(-4; -9)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.

Пусть кол-во одиннадцатиклассников -  $n$ .  
в нач. месяца:

В Пронумеруем их от одного до  $n$ ,  
номерац с 2, 3, 4 выдали билеты.

Уделих "пар" номеров для Пети и Васи  
 $\frac{4 \cdot 3}{n \cdot (n-1)} = 12$  (Петя выбирал один из первых четырех,  
Вася из оставшихся после выбора Пети трех),

Всего пар номеров  $n(n-1)$  (Петя выбр. один  
из  $n$ , Вася из оставшихся). Значит,

на начале месяца вероятность  $\frac{12}{n(n-1)}$ .

В конце месяца распределение билетов  
изменится, но теперь их  $k$ , т.е.

кол-во уделих "пар" для Пети и Васи

$\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$ , т.е. вероятность  $\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$ .

Вероятность увелич. в 3,5 раза, т.е.

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} : \frac{12}{n(n-1)} = 3,5$$

$$\frac{k(k-1)}{12} = 3,5$$

$$k^2 - k - 42 = 0$$

$$(k-7)(k+6) = 0$$

$k = 7$   
 $k = -6$  - не подх., т.к. кол-во билетов  
неотриц. ( $> 4$ ).

Значит,  $k = 7$

Ответ: 7

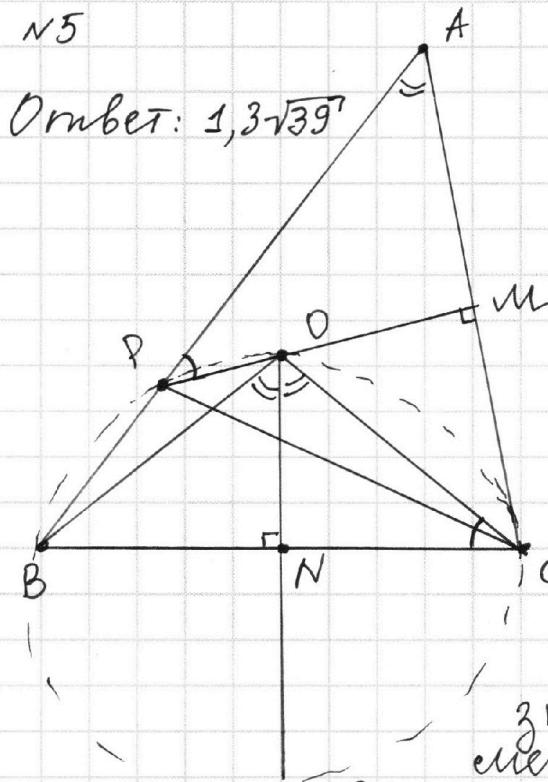
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5



Ответ:  $1,3\sqrt{39}$

1) Четырехугольник BCOP -

вписаный, по свойству

$$\angle APO = \angle BCO (\angle APO =$$

$$= 180^\circ - \angle BPO \text{ (внешн.)} =$$

~~=  $\angle BCO$  (сумма противоположных углов  $180^\circ$ )~~

2) Отметим точку N -

середину BC. O - центр

внеш. оkr. ABC значит,

лежит на серединном

перпендикуляре к BC,

значит  $ON \perp BC$ , ON -

медиана и высота  $\Rightarrow ON \perp BC$ ,

по признаку равноб. по св-ву ON - бисс.

в  $\triangle BOC$ . Значит,  $\angle NOC' = \frac{1}{2} \angle BOC$ . При этом

$\angle BOC$  - центральный дуга  $w$ , и опирается на

дугу BC, а  $\angle BAC$  - вписаный дуга  $w$ , и

они лежат на дуге BC, по теор. о центр. угле

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle NOC.$$

3) Рассмотрим  $\triangle NOC$ . Он прямоугольный,

значит  $\angle NOC + \angle DCN = 90^\circ$ . Рассмотрим

~~внеш. оkr. ABC~~.  $\angle PMA = 180^\circ - \angle MAP - \angle APM =$

$$= 180^\circ - \angle BAC - \angle APO \text{ (не те углы)} = 180^\circ - \angle NOC -$$

$$- \angle BCO \text{ (по пунктам 1 и 2)} = 180^\circ - \angle NOC - \angle OCN$$

$$\text{ (не те углы)} = 180^\circ - 90^\circ \text{ (этот же пункт)} = 90^\circ.$$

4)  $ON \perp AC$ , O лежит на серед. перп. к AC  $\Rightarrow M$  -

сер. AC,  $AM = \frac{1}{2} AC = 2$ . Напишем теор. длин

$$\triangle AMP: PM^2 = \sqrt{AP^2 + AM^2} = \sqrt{\frac{256}{25} - 4} = \sqrt{\frac{156}{25}} = \frac{2\sqrt{39}}{5}$$

$$5) S_{APC} = \frac{1}{2} PM \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \sqrt{39} \cdot 4 = \frac{4}{5} \sqrt{39}$$

$$6) \text{ в } \triangle ABC \text{ и в } APC \text{ общ. выс. из } C \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{AB}{AP} = \frac{AP+PB}{AP} = 1 + \frac{PB}{AP} =$$

$$= 1 + \frac{\frac{13}{8}}{\frac{13}{5}} = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}, S_{ABC} = \frac{13}{8} S_{APC} = \frac{13}{8} \cdot \frac{4}{5} \sqrt{39} = 1,3\sqrt{39}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

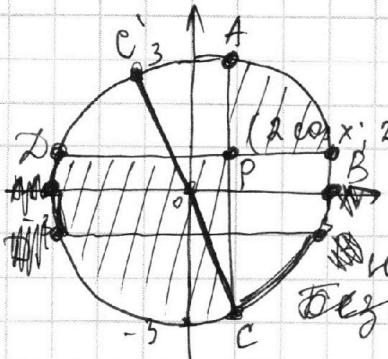
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

Изобразим  $\Phi(\alpha)$  на коорд. плоскости.  
 Второе пер-во означает, что она находится  
 внутри круга с центром в  $(0; 0)$  и  
 радиусом 3. Первое пер-во верно, если  
 $(x \geq 2\cos\alpha \text{ и } y \geq 2\sin\alpha)$  или  $(x \leq -2\cos\alpha \text{ и } y \leq -2\sin\alpha)$ , т.е. избрана  $\Phi$  лежит  
 в ограниченных двух областях: выше прямой  
 $x = 2\cos\alpha$  и правее прямой  $y = 2\sin\alpha$ ;  
 ниже прямой  $x = 2\cos\alpha$  и левее прямой  
 $y = 2\sin\alpha$ :

Заметим, что  $M$   
 складывается из дуг  $AB$   
 и  $CD$  и отрезков  
 $AC$  и  $BD$ .



1) Докажем, что  $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = 3\pi$

независимо от  $\alpha$ .  
 безотносительно областей, на которых

все лежат обе прямые  $AB$  и  $CD$ .

Приведем диаметр  $CC_1$ . В симметр.  $D$  отн.  $Oy$  и м.к.  $BD$  и  $DC$  лежат на окр.,  
 $AC$  и  $CC_1$  лежат на окр.  $Oy$  и  $BD \parallel Oy \perp Oy$ ,  
 $Oy$  - диам., значит,  $Oy$  - серед. перп. к  $BD$ ;

$A$  симм.  $C'$  м.к.  $CC_1$  - диам.  $\Rightarrow \angle ACC_1 = 90^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow AC' \perp AC \parallel Oy$ ,  $Oy$  - диам., значит,  $Oy$  - серед.

перп. к  $AC'$ , значит,  $AB = DC'$  м.е.

$$AB + DC = DC' + DC = CC' = \pi r^2 = 3\pi.$$

2)  $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = \text{const}$ , значит, остается показать  
 $AC + BD$ . Пусть  $P$  точки  $(x_0; y_0)$  на

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.












СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

III. к.  $x_0 = 2\cos \alpha$ ,  $y_0 = 2\sin \alpha$ , можно  
доказать что  $x_0 \in [-2; 2]$ ,  $y_0 \in [-2; 2]$ ,  
 $x_0^2 + y_0^2 = 4$  т.е. точка  $P$  лежит  
на окружности с центром  $(0; 0)$  и радиусом 2.

$$AC = 2\sqrt{9 - x_0^2} \quad (A = (x_0; \sqrt{9 - x_0^2}), C = (x_0; -\sqrt{9 - x_0^2}))$$

$$BD = 2\sqrt{9 - y_0^2} \quad (\text{аналогично}), \text{ тогда } = 2\sqrt{9 - 4 + x_0^2} =$$

$$\text{Что } 2\sqrt{y_0^2} = 2\sqrt{y_0^2}, \text{ ведь } 2\sqrt{x_0^2} = 2\sqrt{x_0^2}$$

$$= 2\sqrt{5 + x_0^2}$$

$$2\sqrt{9 - x_0^2} + 2\sqrt{5 + x_0^2} \rightarrow \max$$

$$\sqrt{9 - x_0^2} + \sqrt{5 + x_0^2} \rightarrow \max, \text{ число } > 0, \text{ значит}$$

при р. увелич. числа растет

$$(\sqrt{9 - x_0^2} + \sqrt{5 + x_0^2})^2 \rightarrow \max$$

$$14 + 2\sqrt{(9 - x_0^2)(5 + x_0^2)} \rightarrow \max$$

$$\sqrt{(9 - x_0^2)(5 + x_0^2)} \rightarrow \max, \text{ корень имеет.}$$

$$(9 - x_0^2)(5 + x_0^2) \rightarrow \max, x_0^2 = t, t \in [0; 4]$$

$$-t^2 + 4t + 45 \rightarrow \max, \text{ нараш. вниз,}$$

стакс. в вершине,  $t_0 = 2$ , берут. на

отр.  $[0; 4]$ , значит, макс. достиг.

$$x_0^2 = 2$$

$$|2\cos \alpha| = \sqrt{2}$$

$$|\cos \alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{При этом } AC + BD = 2\sqrt{9 - x_0^2} + 2\sqrt{5 + x_0^2} = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} =$$

$$= 4\sqrt{7}, M = 4\sqrt{7} + 3\pi$$

$$\text{Ответ: } 4\sqrt{7} + 3\pi \text{ при } \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

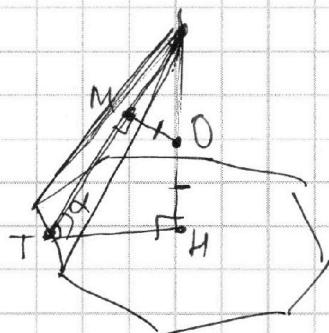
СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.

Заметим, что центры обоих шаров лежат на вписане пирамиды ~~одной из сторон~~ ~~одной из сторон~~ из сообр. симм.

ч:

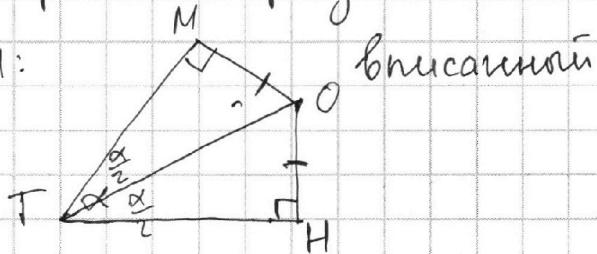


расст. от центра шара

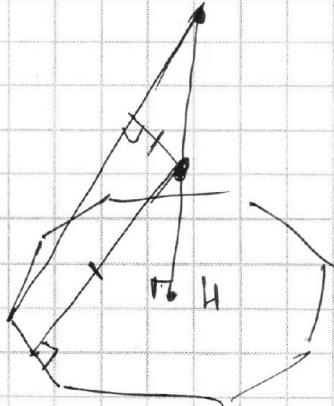
до боковой грани –  
расст. до апофемы.

Рассмотрим четырехугольник

ОМTH:



№2





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$



$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) + \cos(a+b) =$$

$$\sin 2a = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\sin a$$

$$\cos 2a = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\sin(a+b) - \sin a = \sin a \cos b + \sin b \cos a - \sin a = \\ = \sin a (\cos b - 1)$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = 2 \sin a \sin b$$

$$a+b=t$$

$$a-b=s$$

$$a+b=t$$

$$a-b=s$$

$$\cos s - \cos t = 2 \sin \frac{t+s}{2} \sin \frac{t-s}{2}$$

$$a = \frac{t+s}{2}$$

$$b = \frac{t-s}{2}$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos \frac{t}{2} \cos \frac{s}{2}$$

$$\sin t - \sin s = 2 \sin \frac{t-s}{2} \cos \frac{t+s}{2}$$

$$\sin \pi x (\sin \pi x - \sin \pi y) = 2 \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \sin \pi x$$

$$\cos \pi x (\cos \pi x + \cos \pi y) = 2 \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \frac{\pi(x+y)}{2}$$

$$\cos \pi x (\cos \pi x + \cos \pi y) = 2 \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \pi x$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2}$$

$$b \text{ жүз: } \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{12}{n(n-1)}$$

$$b \text{ жүз: } \frac{k(k-1)}{n(n-1)} = 3,5$$

$$3,5 \cdot 12 = 4 \cdot 6 = 42$$

$$k^2 - k - 42 = 0 \quad k^2 - k = 42 \quad k = 7$$

$$n = 1 + 168 = 169$$

$$(k-7)(k+6) = 0 \quad k = -6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111k, k - \text{число}$$

$$B = 100a + 10b + c, a, b, \text{или } c = 1$$

$$C = 10a_2 + b_2, a_2 \text{ или } b_2 = 5$$

$A \cdot B \cdot C$  - квадрат

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \times 11 \\ \hline 103 \end{array}$$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot k$$

$$C \neq 101 \quad (\angle 101)$$

$$B : 103$$

$$(sin \pi x - e^{int_j y}) \sin \pi x = \begin{matrix} 3-2x: 101, 202, \dots, 909, \text{ если } s = 102 \\ = \end{matrix}$$

$$C : 11, \text{ если } s = 5 - 55.$$

$$BC = 11 \cdot 101 \cdot 5, k = 5$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad \begin{matrix} x^3 - 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 9 - 27 = \\ = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 \end{matrix}$$

$$x^3 - y^3 - 9xy \quad x(x^2 - 9y) \quad x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) =$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) \quad = \cancel{x^3} - \cancel{x^3} + \cancel{9x^2} - \cancel{27x} + \cancel{27} - \cancel{9x^2} + \cancel{27x}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x+y+1 > 0, \text{ значит корп.}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$y = x-3$$

$$3(x^2 + x(x-3) + (x-3)^2) =$$

$$\cancel{xy} + 3x - 3y - 9 = \cancel{xy} \quad = 3(x^2 + x^2 - 3x + x^2 -$$

$$x - y - 3 = 0$$

$$x - y = 3$$

$$y = x-3$$



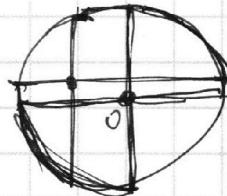
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

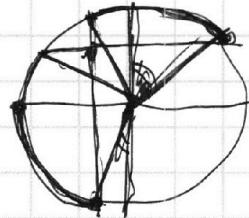
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 2\cos \alpha)(y - 2\sin \alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$



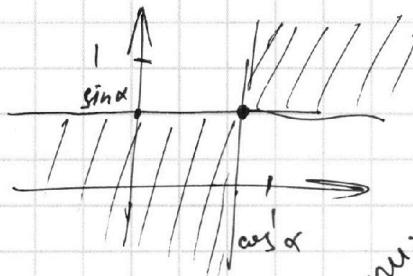
$$(x - 2\cos \alpha)(y - 2\sin \alpha) \geq 0$$

Из условия:  $x = 2\cos \alpha$ ,  $y = 2\sin \alpha$



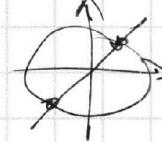
Из условия:  $x \geq 2\cos \alpha$  и  $y \geq 2\sin \alpha$

Из условия:  $x \leq 2\cos \alpha$  и  $y \leq 2\sin \alpha$



$$\sin \alpha = \cos \alpha$$

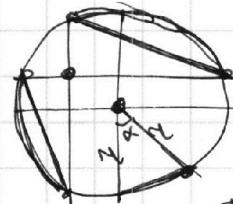
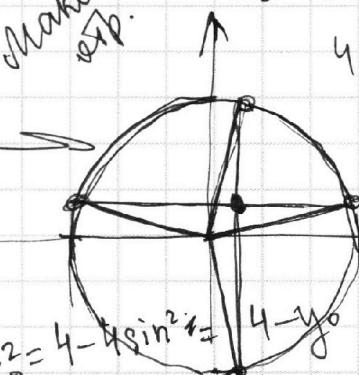
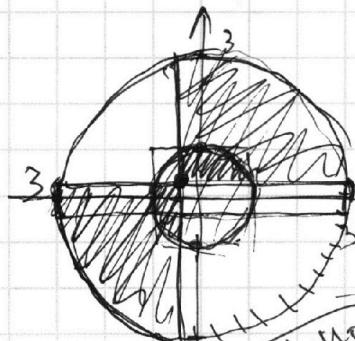
$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$



доказательство:  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$   
Макс. расстояние от центра до точки  $(2\cos \alpha; 2\sin \alpha)$

$$\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1$$

$$4\cos^2 \alpha + 4\sin^2 \alpha = 4$$



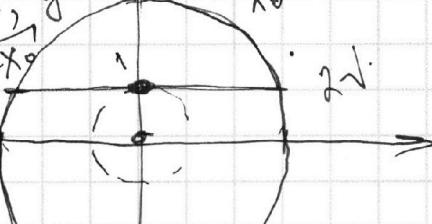
$$1 + x^2 = 9$$

$$x^2 = 8$$

$$\text{длина дуги} = \sqrt{8}$$

При  $y_0 = 2\sin \alpha$ , гр.  $= \sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha}$   
 $x_0^2 = 4 - 4\sin^2 \alpha = 4 - y_0^2$

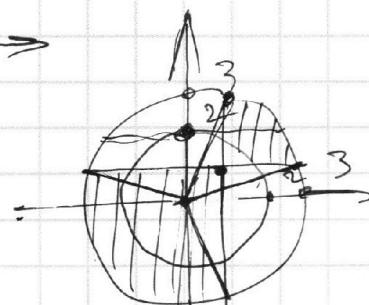
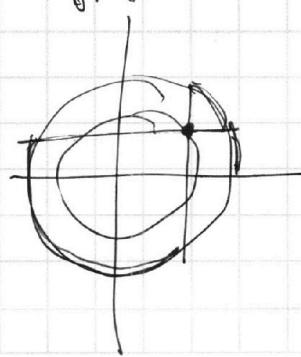
Всего:  $2\sqrt{4 - x_0^2} + 2\sqrt{4 - y_0^2}$



$$2\sqrt{4 - x_0^2} + 2\sqrt{4 - y_0^2} = 6 + 2\sqrt{8} =$$

Сумма:

$$2(\sqrt{4 - x_0^2} + \sqrt{4 - y_0^2})$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

