



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. $A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$ (a -цифра)

т.к. $A \cdot B \cdot C$ - квадрат натурального числа, то каждый простой делитель входящий в $A \cdot B \cdot C$ в чётной степени.

$$A \mid 101, A \nmid 101^2 \text{ (т.к. } 11a \leq 99\text{)} \Rightarrow B \mid 101 \text{ или } C \mid 101,$$

$$\text{но } C \nmid 101 \text{ (т.к. } C \leq 99\text{)} \Rightarrow B \mid 101 \Rightarrow B = 101, \text{ т.к. } B \text{ чётное}$$

B есть цифра 1.

$$A \mid 11, A \nmid 11^2 \text{ (т.к. } a \mid 11, 101 \nmid 11\text{)} \Rightarrow B \mid 11 \text{ или } C \mid 11,$$

$$\text{но } B \nmid 11 \text{ (т.к. } B = 101 \nmid 11\text{)} \Rightarrow C \mid 11 \Rightarrow C = 55, \text{ т.к. } C \text{ чётное}$$

C есть цифра 5.

$$C \mid 5, C \nmid 5^2, B \mid 5 \Rightarrow A \mid 5 \Rightarrow A = 5555$$

$$A \cdot B \cdot C = 5555 \cdot 101 \cdot 55 = (5 \cdot 11 \cdot 101)^2$$

Ответ: $(5555; 101; 55)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy}$$

$$K = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{y+3}{(x-3)(y+3)} + \frac{x-3}{(x-3)(y+3)} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$K = \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3) \quad , \text{т.к. } x+y+1 > 0$$

$$xy = xy - 3y + 3x - 9$$

$$9 = 3(x-y)$$

$$x-y = 3$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = \underbrace{(x-y)}_3 \left(x^2 + xy + y^2 \right) - 9xy = 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy =$$

$$= 3x^2 - 6xy + 3y^2 = 3 \left(x^2 - 2xy + y^2 \right) = 3 \underbrace{(x-y)}_3^2 = 3 \cdot 3^2 = 27$$

Ответ: 27.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3(a) \quad \alpha = \pi x, \beta = \pi y$$

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cdot \cos \alpha$$

$$\text{По формуле } \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Если } \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha + \beta = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x + \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

Иначе можно еще выразить выражение via $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$:

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \alpha = \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$\text{По формуле } \sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)) \text{ и}$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta));$$

$$-\frac{1}{2} (\cos \frac{3\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2}) = \frac{1}{2} (\cos \frac{3\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2})$$

$$-\frac{1}{2} \cos \frac{3\alpha - \beta}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2} \cos \frac{3\alpha - \beta}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$0 = \cos \frac{3\alpha - \beta}{2} \Rightarrow \frac{3\alpha - \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi h, h \in \mathbb{Z}$$

$$3\pi x - \pi y = \pi + 2\pi h, h \in \mathbb{Z}$$

$$3x - y = 2h + 1, h \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x + y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \\ 3x - y = 2n + 1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2k + 1 - x, k \in \mathbb{Z} \\ y = 3x - 2n - 1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Получаем все решения будут $(x; 2k+1-x)$ и $(x; 3x-2n-1)$,
 $\forall x, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}$

Одним: $(x; 2k+1-x)$

$(x; 3x-2n-1)$, $\forall x, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3(\delta) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned}-1 &\leq \frac{x}{4} \leq 1 & -1 &\leq \frac{y}{9} \leq 1 \\ -4 &\leq x \leq 4 & -9 &\leq y \leq 9\end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = 2k+1-x, k \in \mathbb{Z} \\ y = (2n+1)+3x, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq \pi + \pi = 2\pi, \text{ равенство при } \frac{x}{4} = \frac{y}{9} = -1,$$

т.е. $x \neq -4$ и $y \neq -9$ одновременно

Исходя из решения уравнения:

При $x=-4$: y -любое чётное (кроме -9) - 9 вариантов
($-9 \leq y \leq 9$)

При $x=-3, -1, 1, 3$: y -любое чётное - 9 вариантов к каждому

$$(-9 \leq y \leq 9)$$

При $x=-2, 0, 2, 4$: y -любое нечётное - 10 вариантов к каждому

$$(-9 \leq y \leq 9)$$

Всего пар таких: $9+4 \cdot 9+4 \cdot 10=45+40=85$

Ответ: 85.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

4. Если количество однодневных паспортов равно n ,

а количество билетов равно k , то всего вариантов

выбора тех, кто пойдет на концерт, будет C_n^k ,

а вариантов, когда и Тима, и Валя посетят концерт, равно C_{n-2}^{k-2} (2 билета уже определены, оставшиеся распределяются

$k-2$ билетами между $n-2$ учениками)

Чтобы выразить количество Тима и Валя на концерт, равно

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{k!(n-2)!}{n!(k-2)!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

В нашем случае $k=4$ билета, а количество было $\frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}$

В 경우 Тима $k=x$ билетов, а количество было $\frac{x(x-1)}{n(n-1)}$

Из условия $\frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} \cdot 3,5 = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$

$$x^2 - x = 42$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

$$(x-7)(x+6) = 0$$

$$\begin{cases} x=7 \\ x=-6 \end{cases} \text{ - не подходит, т.к. } x \in \mathbb{N}$$

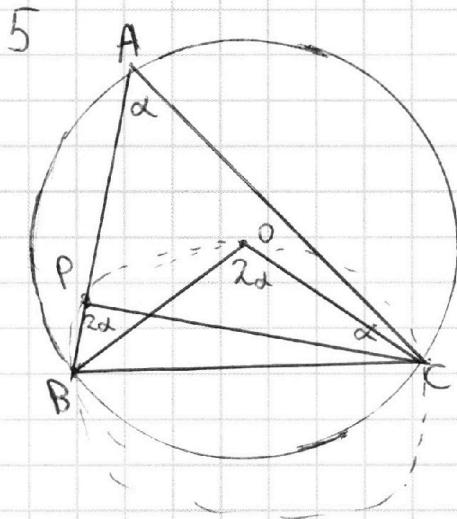
Ответ: 7.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle BAC = \alpha$

$\angle BOC = 2\alpha$, $\angle BAC = 2\alpha$ (центральный угол $\angle BOC$)

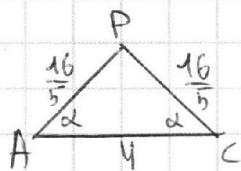
$\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$ (внешние углы, опирающиеся на дугу BC)

$\angle PAC + \angle PCA = \angle BPC$ (внешний угол)

$$\alpha + \angle PCA = 2\alpha$$

$\angle PCA = \alpha \Rightarrow \angle PAC - \text{равнобедренный}$,

$$PC = AP = \frac{16}{5}$$



По т.косинусов для $\triangle APC$:

$$AP^2 = AC^2 + PC^2 - 2 \cdot AC \cdot PC \cdot \cos \alpha$$

$$\left(\frac{16}{5}\right)^2 = 4^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{16}{5} \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{8}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \sqrt{\frac{39}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{16}{5} + 2\right) \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

Ответ: $\frac{13\sqrt{39}}{10}$ см².

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

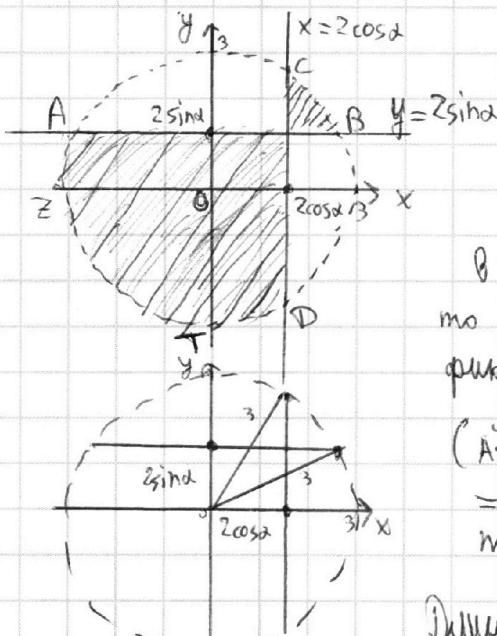
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. Т.к. $x^2 + y^2 \leq 9$, то фигура представляет круг с центром $O(0; 0)$ и радиусом 3. (длина окружности $2\pi R = 6\pi$)

$$(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \Rightarrow$$



$$\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$$

Если прямые $y = 2\sin\alpha$ и $x = 2\cos\alpha$ пересекают окружность $x^2 + y^2 = 9$ в точках A и B , C и D (как на рисунке), то периметр дуг, принадлежащих Φ , расписаный в радиус $\tilde{A}\tilde{D} + \tilde{B}\tilde{C} = \frac{2\pi \cdot 3}{2} = 3\pi$
 $(\tilde{A}\tilde{D} + \tilde{B}\tilde{C} = \tilde{A}\tilde{Z} + \tilde{Z}\tilde{T} + \tilde{T}\tilde{D} + \tilde{B}\tilde{C} = \tilde{Z}\tilde{T} + \tilde{Y}\tilde{C} + \tilde{C}\tilde{B} + \tilde{B}\tilde{X} = = \tilde{Z}\tilde{T} + \tilde{Y}\tilde{X} = \frac{2\pi \cdot 3}{2} = 3\pi, \text{ а доля круга} \Phi \text{ равна } \frac{3\pi}{6\pi} = \frac{1}{2})$

Длина прямых дуг Φ равна из теоремы Пифагора $2\sqrt{3^2 - (2\cos\alpha)^2} + 2\sqrt{3^2 - (2\sin\alpha)^2}$

Т.е. периметр Φ равен $3\pi + 2(\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha})$

Пусть $4\cos^2\alpha = t \Rightarrow 4\sin^2\alpha = 4 - t$

$$\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} = \sqrt{9 - t} + \sqrt{5 + t} \geq 2\sqrt{9 - t + 5 + t} = 2\sqrt{14} = 2\sqrt{14},$$

но из неравенства с средними, получаем при $t \leq 5 \Rightarrow t = 2$

$$(a+b) \geq 2\sqrt{ab}$$

$$(2\sqrt{9-t} + \sqrt{5+t}) = 2\sqrt{45+4t-t^2} = 2\sqrt{(49-t^2)} \geq 2\sqrt{49} = 2\sqrt{49},$$

получаем при $(t-2)^2 = 0 \Rightarrow t = 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6(\text{продолжение}) \quad t = 4 \cos^2 \alpha$$

$$\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} = \sqrt{9-t} + \sqrt{5+t}$$

По неравенству о среднем дифференциальной и квадратичной:

$$\left(\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ для } a,b > 0, \text{ равенство при } a=b \right)$$

$$\frac{\sqrt{9-t} + \sqrt{5+t}}{2} \leq \sqrt{\frac{9-t+5+t}{2}}$$

$$\sqrt{9-t} + \sqrt{5+t} \leq 2\sqrt{\frac{9+5}{2}} = 2\sqrt{7}, \text{ равенство при } \sqrt{9-t} = \sqrt{5+t}$$

$$9-t = 5+t$$

$$t = 2$$

$$2 = t = 4 \cos^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Н.е. периметр } P = 3\pi + 2 \left(\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} \right) \leq 3\pi + 2 \cdot 2\sqrt{7} =$$

$$= 3\pi + 4\sqrt{7} = M, \text{ соответствие при } \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } 3\pi + 4\sqrt{7}$$

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3}(a+b) = a+b + 2\sqrt{ab}$$

$$(a+b)(\sqrt{3}-1) = 2\sqrt{ab}$$

$$h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2\sin\frac{\pi}{n}}\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = \sqrt{ab} + \frac{a+b}{2\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\right)(a+b) = \sqrt{ab}$$

$$\sqrt{9+t} + \sqrt{5+t} \leq 2\sqrt{t}$$

$$\sqrt{5-t} + \sqrt{5+t} \leq 2\sqrt{\frac{5-t+5+t}{2}} = 2\sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

ИЗ

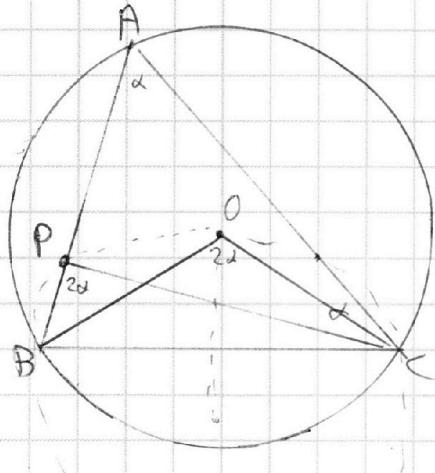
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



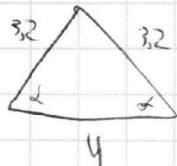
$$S_{ABC} - ?$$

$$\begin{aligned} AP, BP, AC \\ " & " & " \\ \frac{16}{5} & 2 & 4 \\ 32 & & \end{aligned}$$

$$AB = 5,2$$

$$AC = 4$$

$$AP = PC = 32$$



$$\begin{aligned} \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot \frac{16}{5} \cdot 4 \cdot \cos \alpha \\ 2 \cdot \frac{16}{5} \cdot 4 \cdot \cos \alpha = 4^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \cos \alpha = 1 \\ \cos \alpha = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$64 - 25 = 39$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

$$\left(\frac{\sqrt{39}}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{39+25}{64} = 1$$

X - ?

(x-1)(x-2)

$$\frac{12}{20} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P(B) = 3,5 \quad P(A)$$

Ученик 4

$$P(A) = \frac{\binom{x}{2}}{\binom{x}{4}} =$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{2}$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} = \frac{12}{x(x-1)}$$

$$P(B) = \frac{\binom{k-2}{x-2}}{\binom{k}{x}} = \frac{(x-2)!}{(k-2)!(x-k)!} =$$

$$\frac{x!}{k!(x-k)!}$$

$$\frac{k(k-1)}{x(x-1)} = \frac{3,5 \cdot 12}{x(x-1)}$$

$$\begin{aligned} k^2 - k - 42 = 0 \\ (k-7)(k+6) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} k = -6 \\ k = 7 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$W \quad (A; B; C) \quad A \cdot B \cdot C = x^2$$

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$$

$$5555, \quad 101, 55$$

$$B = \overline{b_1 b_2 b_3}$$

$$B: 101$$

$$B = 101$$

$$C = \overline{c_1 c_2}$$

$$101 \\ 202 \\ 303$$

$$C: 14 \Rightarrow C = 55 \Rightarrow a = 5$$

$$\overline{5}_c \quad \overline{5}_C$$

$$303$$

$$-$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$M = x^2 - y^2 - 9xy$$

$$xy = xy - 3y + 3x - 9$$

$$K = \frac{x+y+1}{xy}$$

$$g = 3(x-y)$$

$$\beta = x-y$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^2 - y^2 - 9xy = 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy = 3(x^2 - 2xy + y^2) = 3(x-y)^2 = 3 \cdot 3^2 = 27$$

$$\alpha = \pi x, \beta = \pi y$$

$$(x; y), (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\alpha - \frac{\pi}{2} + \beta = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$$

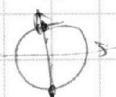
$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0 \quad \frac{\alpha + \beta}{2} \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$



$$\sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$-\frac{1}{2} (\cos \frac{3\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2}) = \frac{1}{2} (\cos \frac{3\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2})$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$$

$$0 = \cos \frac{3\alpha - \beta}{2} \quad \frac{3\alpha - \beta}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\frac{3x - y}{2} = \pm \frac{1}{2} + 2k$$

$$\frac{x+y}{2} \neq \pm \frac{1}{2} + 2k$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

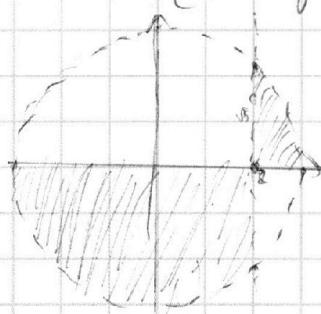
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} \quad M_{\max} P$$



$$3\pi + 2\sqrt{5}$$

$$2\sqrt{9+2\sqrt{5}}$$

$$\alpha = 0 \quad (x-2)y \geq 0 \quad (x+2)y \geq 0$$

$$\alpha = \pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$x(y-2) \geq 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$(x-\sqrt{2})(y-\sqrt{2}) \geq 0$$

$$2\sqrt{9+2\sqrt{5}} < 2\sqrt{9+2\sqrt{4}} \quad (x-\sqrt{3})(y-1) \geq 0$$

$$6+2\sqrt{5} < 4\sqrt{7}$$

$$3+\sqrt{5} < 2\sqrt{7}$$

$$9\sqrt{5}+6\sqrt{5} < 28$$

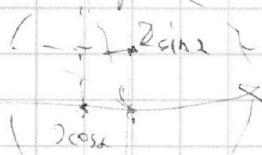
$$6\sqrt{5} < 14$$

$$3\sqrt{5} < 7$$

$$45 < 49$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha = 2$$



$$2\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha} = M_1$$

$$4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha = 4$$

$$4\cos^2\alpha - 4 = -4\sin^2\alpha$$

$$\sqrt{9-4t}$$

$$\sqrt{9-4\sin^2\alpha} = \sqrt{5+4\cos^2\alpha}$$

$$\max \sqrt{9-t} + \sqrt{5+t} \geq 2\sqrt{(9-t)(5+t)} = 2\sqrt{45+4t-t^2} =$$

$$t = 4\cos^2\alpha$$

$$t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$$

$$-t^2 + 4t - 4 = -(t-2)^2$$

$$\sqrt{9-t} = \sqrt{5+t}$$

$$2t=8$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$x+y \neq 4k+1$$

$$3x-y=4k \pm 1$$

$$y = 3x - 4k + 1 \quad \forall k, x$$

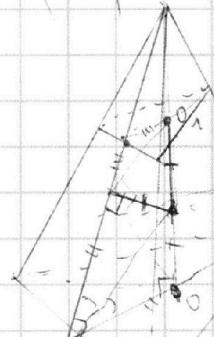
$$\arccos \frac{x}{y} \neq \pi$$

$$\arccos \frac{1}{2} \neq \pi$$

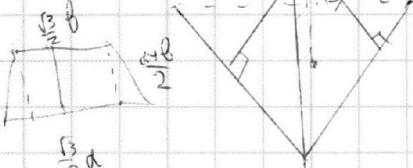
$$x \neq -$$

y = -g

$$g, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$



$$\frac{a^2}{y} + \frac{b^2}{y} - ab + ab = \frac{a^2}{y} + \frac{b^2}{y} + \frac{ab}{2}$$



$$\sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}} - \sqrt{\frac{(a-b)^2}{2}} = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2} =$$

$$\sqrt{\frac{4\pi B}{3}} = \sqrt{aB}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (a+b) \geq \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}$$

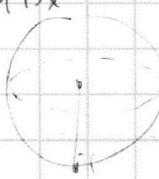
$$\cos \alpha = \frac{a-b}{(a+b) \sin \frac{\pi}{n}}$$

~~Best~~
AB = 3

$$= 4k \pm 1 - x$$

$$3x \leq y = 3x - 4k + 1 + x = 4(x-k) + 1$$

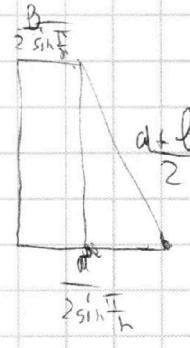
$$y = 4k \pm 1 + 3x$$



$$d_n = 2R \sin \frac{\pi}{n}$$

$$d_n = 2 \pi \lg \frac{1}{n}$$

$$R = \frac{a}{2\pi n}$$



$$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}a$$