



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№ 1.

1) Пусть число A составлено из четырёх цифр n ; $n \in \mathbb{N}$; $1 \leq n \leq 9$

$A = n \cdot 1111$. Разложим число 1111 на простые множители:

$1111 = 11 \cdot 101$. $n < 11$; $n < 101 \Rightarrow$ в разложении числа A на

простые множители числа 11 и 101 выделяются по одному разу.

2) $A \cdot B \cdot C$ - квадрат натурального числа, следовательно в разложении

$A \cdot B \cdot C$ на простые множители числа 11 и 101 выделяются

тёмное количество раз $\Rightarrow \begin{cases} B: 101 \\ C: 101 \end{cases}; \begin{cases} B: 11 \\ C: 11 \end{cases}$

3) C - двузначное число $\Rightarrow C < 101 \Rightarrow B: 101$

B -трёхзначное число $\Rightarrow B$ можно представить в виде $101 \cdot m$;

$m \in \mathbb{N}$; $1 \leq m \leq 9$. Число B будет содержать цифру 2

только при $m=2 \Rightarrow B = 2 \cdot 101 = 202$

4) $B: 11 \Rightarrow C: 11$; C содержит цифру 3 $\Rightarrow C = 33$

5) $A \cdot B \cdot C = n \cdot 1111 \cdot 202 \cdot 33 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n$

$A \cdot B \cdot C$ - квадрат натурального числа; $n \in \mathbb{N}$; $1 \leq n \leq 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow n=6$; $A = 6666$

Ответ: $(6666; 202; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$1) K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} ; x \neq 1; x > 0; y > 0$$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$(x+y+2)(xy - y + x - 1) = (x+y+2) \cdot xy$$

$$(x+y+2)(x-y-1) = 0$$

$$\begin{cases} x+y=-2 - \emptyset \text{ при } x>0, y>0 \\ x=y+1 \end{cases}$$

$$x=y+1$$

$$2) M = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1) = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

Ответ: 1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

вр 3.

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x; x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x$$

$$2 \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \left(\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \pi x - \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \pi x \right) = 0$$

$$\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \left(\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} - \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} - \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} - \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \right) = 0$$

$$-2 \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \\ \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2}(x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2}(3x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi h, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \\ 3x+y = 2n+1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 2k+1, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{-y+2n+1}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{R} \\ x = y + 2k+1, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{-y+2n+1}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$2) \arcsin \frac{y}{4} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{4}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}; \arcsin \frac{x}{5} - \arcsin \frac{y}{4} < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]; \arcsin \frac{y}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} - \arcsin \frac{y}{4} \geq \pi \text{ при } \arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2}; \arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} - \arcsin \frac{y}{4} < \pi \Leftrightarrow \begin{cases} \arcsin \frac{x}{5} \neq \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{y}{4} \neq -\frac{\pi}{2} \end{cases} \cdot \begin{cases} \frac{x}{5} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq -1 \end{cases} \begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; -5 \leq x \leq 5 \\ y \in \mathbb{Z}; -4 \leq y \leq 4 \\ x = y + 2k + 1; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{y: 2 (5 вариантов): } x \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\} - 6 \text{ вариантов} \\ y \in \{-4; -2; 0; 2; 4\} \\ \text{y: 2 (4 варианта): } x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\} - 5 \text{ вариантов} \\ y \in \{-3; -1; 1; 3\}$$

$$5 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 50 \text{ (вариантов)}$$

Вариант $\begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases}$, не удовлетворяющий неравенству, необходимо вычесть из количества вариантов: $50 - 1 = \underline{49}$ (вариантов)

$$4) \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; -5 \leq x \leq 5 \\ y \in \mathbb{Z}; -4 \leq y \leq 4 \\ x = \frac{-y+2n+1}{3}; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Необходимо учитывать только варианты с
 одинаковой четностью x и y , т.к. ^{все} варианты
 с разной четностью были учтены в п. 3

$$\cancel{y=-4}: x \neq \frac{2n+8}{3} \% \quad 3x+y = (2n+1) \% 2 \Rightarrow 3x+y \text{ четное}$$

разную четность $\Rightarrow x+y$ имеют разную четность \Rightarrow
 \Rightarrow все варианты $3x+y = 2n+1$ учтены в п. 3

Всего: 49 вариантов

Ответ: а) $(y+2k+1; y); (\frac{-y+2n+1}{3}; y); y \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}$

$\cancel{\delta}$ 49



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.

1) Пусть всего n одиннадцатиклассников; пусть $f(x)$ - вероятность того, что и Петя, и Вова попадут на концерт при выделении x билетов.

Всего исходов: x билетов распределяются между n людьми; C_n^x

Удачных исходов: 2 билета достаются Петя и Вова, остальные $(x-2)$

билетов распределяются между оставшимися $(n-2)$ людьми; C_{n-2}^{x-2}

$$f(x) = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} = \frac{\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}}{\frac{n!}{x!(n-x)!}} = \frac{x!(n-2)!}{n!(x-2)!} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

2) Пусть в конце месяца было выделено k билетов; $k > 4$

$$\frac{f(k)}{f(4)} = \frac{5}{2}, \quad \frac{f(k)}{f(4)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} : \frac{4(4-1)}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{12} = \frac{5}{2}$$

$$2k^2 - 2k = 60; \quad k^2 - k - 30 = 0$$

$$\text{По формуле: } \begin{cases} k=6 \\ k=-5 \text{ - неудобн. } k>4 \end{cases} \Rightarrow k=6$$

Ответ: 6



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

1) Построим т. $O(3\sqrt{2}\sin\alpha; 3\sqrt{2}\cos\alpha)$

При этом укажем в т. O угол

отсчитываемый с осью

в точке $(0;0)$ радиуса $3\sqrt{2}$.

2) Уравнение $x^2 + y^2 \leq 25$ задаёт ~~окружность~~

с центром в точке $(0;0)$ радиуса 5.

$5 > 3\sqrt{2} \Rightarrow$ т. O лежит внутри круга

3) Построим прямую a , параллельную оси X , и прямую b , параллельную оси Y , т.к. $a \cap b = O$. Пусть прямая a пересекает окружность $x^2 + y^2 = 25$ в т. A и C , а прямая b – в точках B и D соответственно.

$$4) (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ x \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \geq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$$

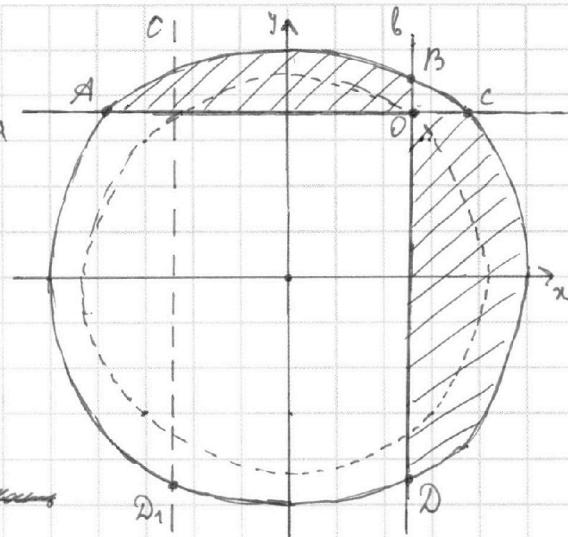
Записываем на координатной плоскости фигуру $\mathcal{P}(\alpha)$.

5) Перииметр $\mathcal{P}(\alpha)$: $M = OA + AB + BD + DC + CO + OD + DO$

Пусть $M_1 = AD + BD + CD + DO = AC + BC$; $M_2 = AB + CD$;

$$M = M_1 + M_2.$$

6) Точки A, B, C, D лежат на окружности $x^2 + y^2 = 25$; точки $A, C \in O$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

шагом равную координату y ; точки B, D, O шагом равную координату x .

$$O(3\sqrt{2}\sin d; 3\sqrt{2}\cos d) \Rightarrow A(-\sqrt{25-18\cos^2 d}; 3\sqrt{2}\cos d); B(3\sqrt{2}\sin d; \sqrt{25-18\sin^2 d});$$

$$C(\sqrt{25-18\cos^2 d}; 3\sqrt{2}\cos d); D(3\sqrt{2}\sin d; -\sqrt{25-18\sin^2 d})$$

$$M_1 = AC + BD = 2\sqrt{25-18\cos^2 d} + 2\sqrt{25-18\sin^2 d}$$

7) Несмотря на то что C , симметрична относительно оси y ; $m. D_1$, на прямой с симметрично $m. D$ относительно оси y .

Точки A и C симметричны относительно оси $y \Rightarrow \cup AD_1 \cup \cup CD$

$$\text{симметричны относительно оси } y; \cup AD_1 = \cup CD; M_2 = \cup AB + \cup CD = \cup AB + \cup AD_1 = \cup BA D_1$$

$$D_1(-3\sqrt{2}\sin d; -\sqrt{25-18\sin^2 d}); B(3\sqrt{2}\sin d; \sqrt{25-18\sin^2 d}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow B \cup D_1$ симметричны относительно начала координат

Точки B и D_1 лежат на окружности $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow BD_1$ - диаметр окружности; $M_2 = \frac{2\pi \cdot 5}{2} = 5\pi$ — не зависит от d .

8) Найдём максимальное значение M на первом д:

$$M' = M_1' + M_2' = \frac{36\sin d \cos d}{\sqrt{25-18\cos^2 d}} - \frac{36\sin d \cos d}{\sqrt{25-18\sin^2 d}} = 36\sin d \cos d \frac{\sqrt{25-18\sin^2 d} - \sqrt{25-18\cos^2 d}}{\sqrt{25-18\cos^2 d} \sqrt{25-18\sin^2 d}}$$

$$M' = 0: \begin{cases} \sin d = 0 \\ \cos d = 0 \\ \sin^2 d = \cos^2 d \end{cases} \quad \begin{array}{c|ccccccccccccc} & + & - & + & - & + & - & + & - \\ \hline 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} & \pi & \frac{5\pi}{4} & \frac{3\pi}{2} & \frac{7\pi}{4} & 2\pi & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \quad d$$

$$d = \frac{\pi}{6}; M' = 36 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{25-4,5} - \sqrt{25-18,5}}{\sqrt{25-18,5} \sqrt{25-4,5}} > 0$$

I-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Причины максимума: $\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$; $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$

$$M = 2 \sqrt{25 - 18 \cdot \frac{1}{2}} + 2 \cdot \sqrt{25 - 18 \cdot \frac{1}{2}} + 5\pi = 4\sqrt{16} + 5\pi = 16 + 5\pi$$

Максимум достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $16 + 5\pi; \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111n, \quad 111 = 11 \cdot 101$$

$$[3,17 = 90 + 2k = 101]$$

$$A = n \cdot 11 \cdot 101; \quad n \in [1; 9] \cap \mathbb{N}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{1}{2} (\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) - \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})) = \frac{1}{2} (\cos \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2}) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$ABC: 101^2; \quad C < 101 \Rightarrow B = m \cdot 101; \quad m \sim n; \Rightarrow B = 202$$

$$C: 11; \quad C = 33 \quad ABC = n \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 11^2 \cdot 201^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n \Rightarrow n = 6$$

(6666; 202; 33)

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}, \quad x \neq 1$$

$$\frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{xy} = k$$

$$(x+y+2)xy = (x+y+2)(x-1)(y+1)$$

$$(x+y+2)(xy - y + x - 1 - xy) = 0$$

$$(x+y+2)(x-y-1) = 0$$

$$x = y + 1$$

$$k = \frac{1}{y} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{y(y+1)} = \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y(y+1)} = \frac{2y+3}{y(y+1)} = \frac{3x+3}{y(y+1)} \quad y = -3x+2n+1$$

$$M = (y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1) = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

$$1) 2\sin\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right)\sin\pi x = 2\cos\frac{3\pi x + \pi y}{2}\cos\frac{\pi x - \pi y}{2}\cos\pi x \quad \arccos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\pi}{4}$$

$$2\cos\frac{\pi x - \pi y}{2} \left(\sin\frac{\pi x + \pi y}{2} \sin\pi x - \cos\frac{\pi x + \pi y}{2} \cos\pi x \right) = 0$$

$$1) \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x - y = 1 + 2k \quad (y + 2k + 1; y)$$

$$2) \frac{1}{2} \left(\cos\frac{3\pi x + \pi y}{2} - \cos\frac{\pi x - \pi y}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\cos\frac{3\pi x + \pi y}{2} + \cos\frac{\pi x - \pi y}{2} \right) = 0$$

$$\cos\frac{\pi x - \pi y}{2} + \cos\frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0$$

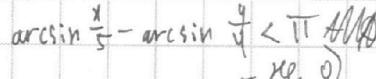
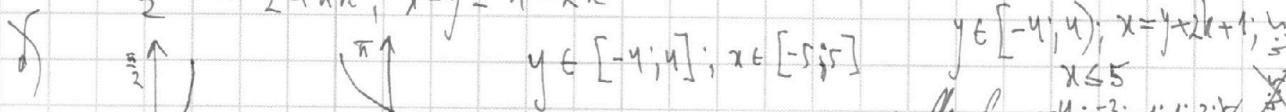
$$0) \arcsin\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} \quad x = 5 \\ \arcsin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad y = 4$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x - y = 1 + 2k$$

$$y \in [-4; 4]; \quad x \in [-5; 5]$$

$$y \in [-4; 4], \quad x = y + 2k + 1, \quad x \leq 5$$

$$\text{Н-60: } -4; -3; -1; 1; 3; \quad x = 5 \\ -1; 0; 2; 4 \\ 0; 1; 3; 5 \\ 1; 2; 4 \\ -2; -1; 1; 3; 5 \\ 2; 3; 5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

