



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
  - $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 1, а  $y$  — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 3xy$ .
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .
- б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{15}{2}$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 9$ .
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin \alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☒

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н 1.

1) Пусть число  $A$  составлено из цифр  $n$ ;  $n \in \mathbb{N}$ ;  $1 \leq n \leq 9$

$A = n \cdot 1111$ . Разложим число 1111 на простые множители:

$1111 = 11 \cdot 101$ .  $n < 11$ ;  $n < 101 \Rightarrow$  в разложении числа  $A$  на

простые множители числа 11 и 101 встречаются по одному разу.

2)  $A \cdot B \cdot C$  - квадрат натурального числа, следовательно в разложении

$A \cdot B \cdot C$  на простые множители числа 11 и 101 встречаются

чётное количество раз  $\Rightarrow \begin{cases} B:101 \\ C:101 \end{cases}; \begin{cases} B:11 \\ C:11 \end{cases}$

3)  $C$  - двузначное число  $\Rightarrow C < 101 \Rightarrow B \neq 101$

$B$  - трёхзначное число  $\Rightarrow B$  можно представить в виде  $101 \cdot m$ ;

$m \in \mathbb{N}$ ;  $1 \leq m \leq 9$ . Число  $B$  будет содержать цифру 2

только при  $m = 2 \Rightarrow B = 2 \cdot 101 = 202$

4)  $B \neq 11 \Rightarrow C:11$ ;  $C$  содержит цифру 3  $\Rightarrow C = 33$

5)  $A \cdot B \cdot C = n \cdot 1111 \cdot 202 \cdot 33 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n$

$A \cdot B \cdot C$  - квадрат натурального числа;  $A \in \mathbb{N}$ ;  $1 \leq n \leq 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 6$ ;  $A = 6666$

Ответ:  $(6666; 202; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$1) K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}; x \neq 1; x > 0; y > 0$$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$(x+y+2)(xy - y + x - 1) = (x+y+2) \cdot xy$$

$$(x+y+2)(x-y-1) = 0$$

$$\begin{cases} x+y = -2 - \text{не подходит } x > 0; y > 0 \\ x = y+1 \end{cases}$$

$$x = y+1$$

$$2) M = x^3 + y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1) = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н 3.

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x; x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x$$

$$2 \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \left( \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \pi x - \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \pi x \right) = 0$$

$$\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \left( \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} - \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} - \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} - \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \right) = 0$$

$$-2 \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \\ \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{\pi}{2}(x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2}(3x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} x-y = 2k+1; k \in \mathbb{Z} \\ 3x+y = 2n+1; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 2k + 1; k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{-y + 2n + 1}{3}; n \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z} \\ x = y + 2k + 1; k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{-y + 2n + 1}{3}; n \in \mathbb{Z} \\ \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$2) \arcsin \frac{y}{4} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{4}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}; \arcsin \frac{x}{5} - \arcsin \frac{y}{4} < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{5} \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]; \arcsin \frac{y}{4} \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} - \arcsin \frac{y}{4} \geq \pi \text{ или } \arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2}; \arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} - \arcsin \frac{y}{4} < \pi \Leftrightarrow \begin{cases} \arcsin \frac{x}{5} \neq \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{y}{4} \neq -\frac{\pi}{2} \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{5} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq -1 \end{cases} \begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☒4  
☐5  
☐6  
☐7  
☐СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; -5 \leq x \leq 5 \\ y \in \mathbb{Z}; -4 \leq y \leq 4 \\ x = y + 2k + 1; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$y: 2 \text{ (5 вариантов)}: x \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\} - 6 \text{ вариантов}$$

$$y: 2 \text{ (4 варианта)}: x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\} - 5 \text{ вариантов}$$

$$5 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 50 \text{ (вариантов)}$$

Вариант  $\begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases}$ , не удовлетворяющий неравенству, необходимо вычесть из количества вариантов:  $50 - 1 = 49$  (вариантов)

$$4) \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; -5 \leq x \leq 5 \\ y \in \mathbb{Z}; -4 \leq y \leq 4 \\ x = \frac{-y + 2n + 1}{3}; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Необходимо учитывать только варианты с одинаковой чётностью  $x$  и  $y$ , т.к. <sup>все</sup> варианты с разной чётностью были учтены в п. 3

$$\cancel{y \in \mathbb{Z}}: \cancel{x \in \mathbb{Z}} \quad 3x + y = (2n + 1) : 2 \Rightarrow 3x \text{ и } y \text{ имеют}$$

разную чётность  $\Rightarrow x$  и  $y$  имеют разную чётность  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  все варианты  $3x + y = 2n + 1$  учтены в п. 3

Всего: 49 вариантов

Ответ: а)  $(y + 2k + 1; y); (\frac{-y + 2k + 1}{3}; y); y \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}$

б) 49



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☒

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н 4.

1) Пусть было  $n$  одинадцатиклассников; пусть  $f(x)$  - вероятность того, что и Петя, и Вова попадут на концерт при выделении  $x$  билетов.

Всего исходов:  $x$  билетов распределяются между  $n$  людьми;  $C_n^x$

Удачных исходов: 2 билета достаются Пете и Вове, остальные  $(x-2)$  билетов распределяются между остальными  $(n-2)$  людьми;  $C_{n-2}^{x-2}$

$$f(x) = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} = \frac{\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}}{\frac{n!}{x!(n-x)!}} = \frac{x!(n-2)!}{n!(x-2)!} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

2) Пусть в конце месяца было выделено  $k$  билетов;  $k > 4$

$$\frac{f(k)}{f(4)} = \frac{5}{2}, \quad \frac{f(k)}{f(4)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \cdot \frac{4(4-1)}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{12} = \frac{5}{2}$$

$$2k^2 - 2k = 60; \quad k^2 - k - 30 = 0$$

$$\text{По теореме: } \begin{cases} k = 6 \\ k = -5 - \text{не удов. } k > 4 \end{cases} \Rightarrow k = 6$$

Ответ: 6



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

1) Построим т.  $O(3\sqrt{2}\sin\alpha; 3\sqrt{2}\cos\alpha)$

При любом значении  $\alpha$  т.  $O$  будет лежать на окружности с центром в точке  $(0;0)$  радиуса  $3\sqrt{2}$ .

2) Уравнение  $x^2 + y^2 \leq 25$  задаёт ~~окружность~~ <sup>круг</sup> с центром в точке  $(0;0)$  радиуса 5.

$5 > 3\sqrt{2} \Rightarrow$  т.  $O$  лежит внутри круга

3) Построим прямую  $a$ , параллельную оси  $x$ , и прямую  $b$ , параллельную оси  $y$ , т.к.  $a \cap b = O$ . Пусть прямая  $a$  пересекает окружность  $x^2 + y^2 = 25$  в т.  $A$  и  $C$ , а прямая  $b$  — в точках  $B$  и  $D$  соответственно.

$$4) (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ x \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \geq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$$

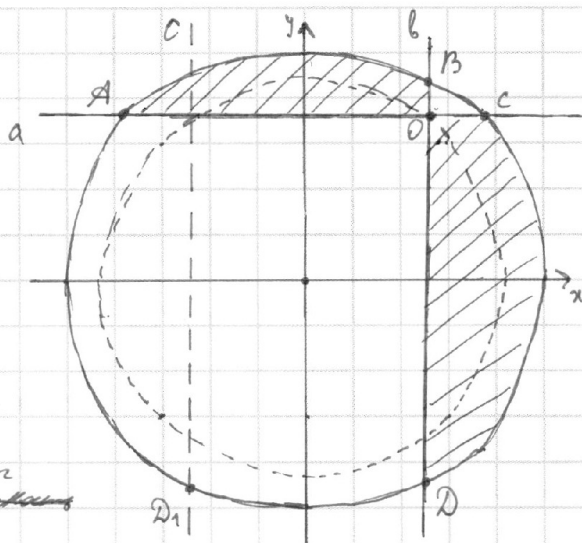
Запишем на координатной плоскости фигуру  $P(L)$ .

5) Периметр  $P(L)$ :  $M = OA + \sqrt{AB} + BD + OC + \sqrt{CD} + DO$

Пусть  $M_1 = AO + BO + CO + DO = AC + BD$ ;  $M_2 = \sqrt{AB} + \sqrt{CD}$ ;

$M = M_1 + M_2$ .

6) Точки  $A, B, C, D$  лежат на окружности  $x^2 + y^2 = 25$ ; тогда  $A, C \in O$





1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

имеют равную координату  $y$ ; точки  $B, D, O$  имеют равную координату  $x$ .

$$O(3\sqrt{2}\sin\alpha; 3\sqrt{2}\cos\alpha) \Rightarrow A(-\sqrt{25-18\cos^2\alpha}; 3\sqrt{2}\cos\alpha); B(3\sqrt{2}\sin\alpha; \sqrt{25-18\sin^2\alpha});$$

$$C(\sqrt{25-18\cos^2\alpha}; 3\sqrt{2}\cos\alpha); D(3\sqrt{2}\sin\alpha; -\sqrt{25-18\sin^2\alpha})$$

$$M_1 = AC + BD = 2\sqrt{25-18\cos^2\alpha} + 2\sqrt{25-18\sin^2\alpha}$$

7) Построим прямую  $s$ , симметричную прямой  $l$  относительно

оси  $y$ ; т.  $D_1$  на прямой  $s$  симметрична т.  $D$  относительно оси  $y$ .

Поскольку  $A$  и  $C$  симметричны относительно оси  $y \Rightarrow \angle AD_1$  и  $\angle CD$

симметричны относительно оси  $y$ ;  $\angle AD_1 = \angle CD$ ;  $M_2 = \angle AB + \angle CD =$

$$= \angle AB + \angle AD_1 = \angle BAD_1$$

$$D_1(-3\sqrt{2}\sin\alpha; -\sqrt{25-18\sin^2\alpha}); B(3\sqrt{2}\sin\alpha; \sqrt{25-18\sin^2\alpha}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow B$  и  $D_1$  симметричны относительно начала координат

Точки  $B$  и  $D_1$  лежат на окружности  $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow BD_1$  — диаметр

окружности;  $M_2 = \frac{2\pi \cdot 5}{2} = 5\pi$  — не зависит от  $\alpha$ .

8) Найдём максимальное значение  $M$  на периоде  $\alpha$ :

$$M' = M_1' + M_2' = \frac{36\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{25-18\cos^2\alpha}} - \frac{36\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{25-18\sin^2\alpha}} = 36\sin\alpha\cos\alpha \frac{\sqrt{25-18\sin^2\alpha} - \sqrt{25-18\cos^2\alpha}}{\sqrt{25-18\cos^2\alpha}\sqrt{25-18\sin^2\alpha}}$$

$$M' = 0: \begin{cases} \sin\alpha = 0 \\ \cos\alpha = 0 \\ \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}: M' = 36 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{25-4.5} - \sqrt{25-13.5}}{\sqrt{25-13.5}\sqrt{25-4.5}} > 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☒

7  
☐

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Точки максимума:  $\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$

$$M = 2\sqrt{25 - 18 \cdot \frac{1}{2}} + 2 \cdot \sqrt{25 - 18 \cdot \frac{1}{2}} + 5\pi = 4\sqrt{16} + 5\pi = 16 + 5\pi$$

Максимум достигается при  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$

Ответ:  $16 + 5\pi; \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111n, 1111 = 11 \cdot 101$$

$$[3; 17] = 90 + 21 = 111$$

$$A = n \cdot 11 \cdot 101; n \in [1; 9] \cap \mathbb{N}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{1}{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$ABC: 101^2; C < 101 \Rightarrow B = m \cdot 101; m \sim n; \Rightarrow B = 202$$

$$C: 11; C = 33$$

$$ABC = n \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n \Rightarrow n = 6$$

$$(6666; 202; 33)$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}, x \neq 1$$

$$\frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{xy} = K$$

$$(x+y+2)xy = (x+y+2)(x-1)(y+1)$$

$$(x+y+2)(xy - y + x - 1 - xy) = 0$$

$$(x+y+2)(x-y-1) = 0$$

$$x = y + 1$$

$$K = \frac{1}{y} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{y(y+1)} = \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y(y+1)} = \frac{2y+3}{y(y+1)}$$

$$3x+y = 2n+1$$

$$y = -3x + 2n + 1$$

$$x = \frac{-y + 2n + 1}{3}$$

$$K = (y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1) = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

$$a) 2 \sin \left( \frac{\pi x + \pi y}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi x - \pi y}{2} \right) \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x \quad \arccos \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{4}$$

$$2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \left( \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \pi x - \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \pi x \right) = 0$$

$$1) \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; x - y = 1 + 2k$$

$$2) \frac{1}{2} \left( \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} - \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} + \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \right) = 0$$

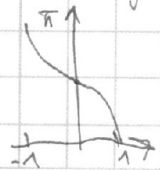
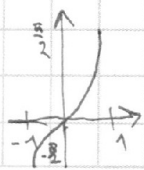
$$\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; x - y = 1 + 2k$$

$$\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \quad \arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$y \in [-4; 4]; x \in [-5; 5] \quad y \in [-4; 4]; x = y + 2k + 1; x \leq 5$$

$$\arcsin \frac{x}{5} - \arcsin \frac{y}{4} < \pi \quad \text{или } 0$$



$$\begin{aligned} & -4: -3; -1; 1; 3; 5 \\ & -3: -2; 0; 2; 4 \\ & -2: -1; 1; 3; 5 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha = 2R^2 - 2R^2 (2\cos^2 \alpha - 1)$   
 $2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha = 456,25 + 81 - 225 \cos \frac{\angle BOC}{2}$   
 $2R^2 - 2R^2 \cos(2\alpha) = 237,25 - 225 \cos \alpha$   
 $BC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \angle BOC$   
 $BC^2 = 12,5^2 + 9^2 - 25 \cdot 9 \cdot \cos \angle BOC$   
 $BC^2 = 237,25 - 225 \cos \alpha = 4R^2 \sin^2 \alpha = 4R^2 - 4R^2 \cos^2 \alpha$   
 $4R^2 - 4R^2 \cos^2 \alpha = 237,25 - 225 \cos \alpha$   
 $4R^2 \cos^2 \alpha - 225 \cos \alpha + 237,25 = 0$   
 $16R^2 \cos^2 \alpha + 900 \cos \alpha + 949 = 0$   
 $\cos \alpha = \frac{2R^2 - 18}{2R^2}$   
 $\frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4,5$   
 $4,5 \cdot 7 = 13,5$

$BO = OC = R$   
 $BC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \angle BOC$   
 $BC^2 = 12,5^2 + 9^2 - 25 \cdot 9 \cdot \cos \angle BOC$   
 $BC^2 = 237,25 - 225 \cos \alpha = 4R^2 \sin^2 \alpha = 4R^2 - 4R^2 \cos^2 \alpha$   
 $4R^2 - 4R^2 \cos^2 \alpha = 237,25 - 225 \cos \alpha$   
 $4R^2 \cos^2 \alpha - 225 \cos \alpha + 237,25 = 0$   
 $16R^2 \cos^2 \alpha + 900 \cos \alpha + 949 = 0$   
 $\cos \alpha = \frac{2R^2 - 18}{2R^2}$   
 $\frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4,5$   
 $4,5 \cdot 7 = 13,5$

$M = 2\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} + 2\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \dots$   
 $A(\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}; 3\sqrt{2} \cos \alpha); C(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}; 3\sqrt{2} \sin \alpha)$   
 $B(3\sqrt{2} \sin \alpha; \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}); D(3\sqrt{2} \sin \alpha; \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha})$   
 $D = 900^2 - 64R^2(909 - 4R^2) = 256R^4 - 949 \cdot 64R^2 + 900^2$   
 $AD = 3\sqrt{2} \sin \alpha + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}; OC = \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} - 3\sqrt{2} \sin \alpha$   
 $AO = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} - 18\sqrt{2} \cos \alpha; OD = 3\sqrt{2} \cos \alpha + \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$   
 $AO \cdot OC = 25 - 18 \cos^2 \alpha - 18 \sin^2 \alpha = 25 - 18 = 7$   
 $M'_1 = \frac{16 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}} - \frac{36 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}} = 36 \sin \alpha \cos \alpha \left( \frac{\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} - \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}}{\sqrt{(25 - 18 \sin^2 \alpha)(25 - 18 \cos^2 \alpha)}} \right)$   
 $\begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = \cos \alpha \end{cases}$   
 $M = 2\sqrt{25 - 18} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{100 - 18} = 2\sqrt{82}$   
 $M = 2\sqrt{25 - 9} + 2\sqrt{25 - 9} + 5\pi = 16 + 5\pi$