



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

Для нек. цифр a ,

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot \overline{1111} = a \cdot 11 \cdot 101. \text{ Если } A \cdot B \cdot C = X^2, X \in \mathbb{N},$$

$$\text{то } X^2 : A \Rightarrow X^2 : 11, X^2 : 101. \text{ П.к. } 11 \text{ и } 101 - \text{простые}$$

числа, то ~~$X : 11, X : 101$~~ из $X^2 : 11, X^2 : 101$, следует

$$X : 11, X : 101. \text{ При этом } \text{НОД}(101, 11) = 1, \text{ поэтому}$$

$$X : 11, X : 101 \text{ следует } X : 11 \cdot 101 \Rightarrow X = 11 \cdot 101 \cdot k, k \in \mathbb{N}.$$

$$A \cdot B \cdot C = (11 \cdot 101 \cdot k)^2$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C = 11^2 \cdot 101^2 \cdot k^2 \Leftrightarrow a \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot k^2$$

Значит, либо a , либо B , либо C делится на 101

(п.к. 101 - простое). Но $a \leq 9, C \leq 99 \Rightarrow a \not\equiv 101, C \not\equiv 101$.

Тогда $B : 101$, и, п.к. B трёхзначное, то $B = \overline{b0b}$ для нек. цифры b . По условию, десятичная запись

B содержит цифру 2, $\Rightarrow b = 2, B = \overline{202}$.

$$a \cdot 202 \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot k^2$$

$$2a \cdot C = 11 \cdot k^2 \Rightarrow \text{либо } a, \text{ либо } C \text{ делится на } 11.$$

Но $a \leq 9 \Rightarrow C : 11 \Rightarrow C = \overline{cc}$ для нек. цифры c . По

условию, десятичная запись C содержит цифру 3, $\Rightarrow$

$$\Rightarrow C = \overline{33}, C = 33.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a \cdot 2 \cdot 33 = \overset{11}{k^2} \Rightarrow 6a = k^2$. Отсюда $k^2 : 2, k^2 : 3 \Rightarrow$
 $k : 2, k : 3$ (н.к. числа 2 и 3 простые) $\Rightarrow k : 6$ (н.к.
 $\text{НОД}(3,2)=1) \Rightarrow k = 6m, m \in \mathbb{N}$. Пусть $6a = (6m)^2 = 36m^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a = 6m^2$. Пусть $6m^2 = a \leq 9 \Rightarrow m^2 \leq \frac{3}{2} \Rightarrow m = 1$,
(н.к. $m \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow a = 6m^2 = 6$. Итого, $A = 6666$, $B = \overset{202}{\text{---}}$, $C = \overset{33}{\text{---}}$.
Ответ: ~~---~~ $(6666; \overset{202}{\text{---}}; \overset{33}{\text{---}})$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$x, y > 0$$

$$k(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

$$k(x, y) = k(x-1; y+1) \Leftrightarrow \frac{x+y+2}{xy} = \frac{(x-1)+(y+1)+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-1)(y+1)} \quad (\text{п.к. } x+y+2 > 2 > 0)$$

$$\begin{cases} xy = (x-1)(y+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = xy - y + x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{xy} \quad x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{xy} \quad xy \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Получа } M = x^3 - y^3 - 3xy = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy = x^2 + xy + y^2 - 3xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = 1.$$

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
4 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

 $\sqrt{3}$

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = 0$$

$$\cos 2\pi x + \cos \pi(x+y) = 0$$

$$2 \cos\left(\pi \cdot \frac{3x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\pi \frac{x-y}{2}\right) = 0$$

$$\left[\cos\left(\pi \cdot \frac{3x+y}{2}\right) = 0 \right.$$

$$\left. \cos\left(\pi \cdot \frac{x-y}{2}\right) = 0 \right.$$

$$\left[\pi \cdot \frac{3x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. \pi \cdot \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[3x+y = 2n+1, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. x-y = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \right.$$

Ответ: $(t; 2n+1-3t), t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}; (t+2k+1; t), t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

б) Для $x, y \in \mathbb{Z}$ $3x+y \equiv x+y \equiv x-y$, поэтому

$$3x+y = 2n+1 \text{ для нек. } n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-y = 2k+1 \text{ для нек. } k \in \mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow x$ и y имеют разную четность. Три любых допустимых знач. x и y

(т.е. $|x| \leq 5, |y| \leq 4$) $\arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}$,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\arccos \frac{y}{4} \leq \pi \Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$, рав-во
 $\Leftrightarrow \frac{x}{5} = 1, \frac{y}{4} = -1 \Leftrightarrow x=5, y=-4$. Значит, при
всех остальных знач. $x \in [-5; 5], y \in [-4; 4]$
 $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$. Посчитаем, сколько
есть пар $(x; y)$, т.т. $x, y \in \mathbb{Z}, |x| \leq 5, |y| \leq 4$ и x и
 y разной четности.

1) $x \div 2$:

$y \div 2$, для x 5 вариантов выбора для y 4
варианта выбора $\Rightarrow$ общее кол-во вариантов
5 $\cdot$ 4 = 20

2) $x \nmid 2$:

$y \div 2$, для x 6 вариантов, для y 5 вариан-
тов $\Rightarrow$ всего 6 $\cdot$ 5 = 30.

Значит, условию задачи будет удовлетво-
рять $20 + 30 - 1 = 49$ пар

(т.к. пара $(-5; -4)$ посчитана, но не под-
ходит)

Ответ: 49



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Пусть в начале месяца планировалось выдать x билетов ($x > 4$ по условию), а одинадцатиклассников y . ~~Верно~~

1) В начале месяца:

кол-во способов выбрать идущих на концерт:

C_y^4 . Кол-во способов, в которых идут и Петья, и Вася: C_{y-2}^2 (среди всех одинадцатиклассников кроме Пети и Васи надо выбрать ещё 2 идущих). Значит, вероятность поехать на концерт и Пете, и Васе, равна

$$\frac{C_{y-2}^2}{C_y^4} = \frac{\frac{(y-2)(y-3)}{2}}{\frac{y(y-1)(y-2)(y-3)}{24}} = \frac{12}{y(y-1)}.$$

2) В конце месяца:

Аналогично пункту 1, вероятность поехать на концерт и Пете, и Васе ^{вместе} равна $\frac{C_{y-2}^{x-2}}{C_y^x} =$

$$\frac{\frac{(y-2)!}{(y-x)! \cdot (x-2)!}}{\frac{y!}{(y-x)! \cdot x!}} = \frac{x(x-1)}{y(y-1)}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По условию, $\frac{x(x-1)}{y(y-1)} = 2,5 \cdot \frac{12}{y(y-1)}$

$$x(x-1) = 2,5 \cdot 12 \quad (\text{п.к. } y(y-1) > 0)$$

$$x^2 - x - 30 = 0$$

$$(x-6)(x+5) = 0$$

$> 0, \text{ п.к. } x > 4$

$$x = 6$$

Ответ: 6



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 3) \quad S(\triangle ABC) &= S(\triangle APC) + S(\triangle BPC) = \frac{1}{2} \cdot PM \cdot AC + \frac{1}{2} BP \cdot PC \cdot \sin \angle BPC = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{24}{25} = 27 + 18 = 45. \end{aligned}$$

Ответ: 45



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$\varphi(\alpha): \begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\cos\alpha)(y - 3\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases} \quad (1)$$

Построим $\varphi(\alpha)$. Нарисуем прямые $\ell_1: x = 3\sqrt{2}$, $\ell_2: y = 3\sqrt{2}\sin\alpha$. Их м-ка пересечения $A(3\sqrt{2}\cos\alpha; 3\sqrt{2}\sin\alpha)$ лежит на окр-ти с центром $O(0;0)$ и радиусом $3\sqrt{2}$, т.к. $(3\sqrt{2}\cos\alpha)^2 + (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2 = (3\sqrt{2})^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = (3\sqrt{2})^2$. Тогда мн-во решений нерав-ва (1) — левая верхняя и правая нижняя четверти, на которые прямые $x = 3\sqrt{2}\cos\alpha$, $y = 3\sqrt{2}\sin\alpha$ разбивают м-ть, вместе с ℓ_1 и ℓ_2 . Мн-во решений неравенства (2) — круг с центром O и радиусом 5. Тогда $\varphi(\alpha)$ будет выглядеть

следующим образом:

Заметим, что $OA = 3\sqrt{2} \Rightarrow A \in \omega$. $\sqrt{18} < \sqrt{25} = 5$



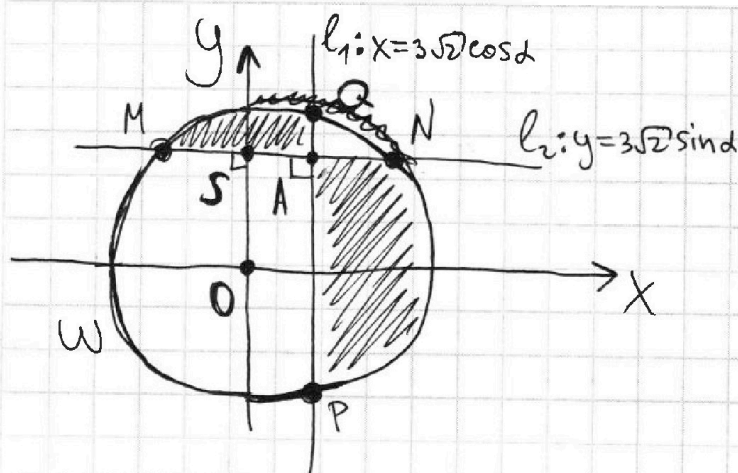
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



($\varphi(\alpha)$ - заштрих.
область)
Очевидно, что $l_1 \perp l_2$.

Пусть $l_1 \cap \omega = \{P, Q\}$; $l_2 \cap \omega = \{M, N\}$ (как показано на рисунке). Тогда фигура $\varphi(\alpha)$ состоит из дуг ~~MP~~ MQ, NP и отрезков MA, AQ, AN, AP. На дугу MQ опирается угол $\angle MPQ$, а на дугу NP - угол $\angle NMP$, причем $\angle MPQ + \angle NMP = \angle MPQ + \angle NMP = \angle MPQ + \angle NMP = 90^\circ$, т.к. $\angle MAP = 90^\circ$. Значит, сумма центральных углов, опир. на дуги MQ и NP, равна $\angle MOQ + \angle PON = 2\angle MPQ + 2\angle NMP = 180^\circ$. Тогда сумма длин дуг MQ и NP равна $2\pi \cdot 5 \cdot \frac{\angle MOQ}{360^\circ} + 2\pi \cdot 5 \cdot \frac{\angle PON}{360^\circ} = 2\pi \cdot 5 \cdot \frac{\angle MOQ + \angle PON}{360^\circ} = 2\pi \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 5\pi$. Тогда длина фигуры $\varphi(\alpha)$ равна $5\pi + MN + PQ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(ожидаем, что Ox и MN не совн.)
Пусть $S = MN \cap Oy$. $Ol_1 \perp Oy \Rightarrow S$ — середина MN .
По теореме Пифагора в $\triangle OSN$: $ON^2 = OS^2 + SN^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow SN = \sqrt{ON^2 - OS^2} = \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2}$ (м.к. $OS = p(0; l_2) =$
 $= p(Ox; l_2) = |3\sqrt{2}\sin\alpha|$). Заметим, что формула
 $SN = \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2}$ работает и если MN совн. с Ox ,
в этом случае $\sin\alpha = 0$ и SN равен радиусу ~~окружности~~
~~окружности~~, т.е. 5. $MN = 2SN = 2\sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2}$.

Аналогично $PQ = 2\sqrt{25 - (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2}$. Тогда
 $MN + PQ = 2(\sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2} + \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2}) =$
 $= 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2} + \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2}}{2} \right) \leq \dots$
 $\leq 4 \cdot \sqrt{\frac{(25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2) + (25 - (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2)}{2}} = 4\sqrt{25 - \frac{(3\sqrt{2})^2}{2}} =$
 $= 4\sqrt{16} = 16$, причем рав-во достигается $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2} = \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$
 $\Leftrightarrow \tan^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \tan\alpha = \pm 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ (в $\Leftrightarrow$)
~~Значит, минимальное значение~~ не переходе (x) использо-
зовалась нерав-во между средним арифмети-
ческим и средним квадратическим ~~для~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

чисел $\sqrt{25 - (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2}, \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2}$).
Итого, ^{длина} ~~траектория~~ $\varphi(\alpha)$ не превышает $5\pi + 16$,
рав-во достигается $\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $5\pi + 16$; $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

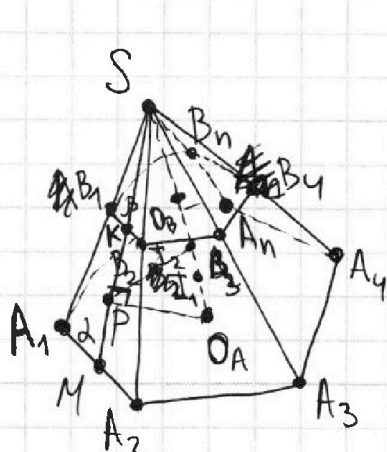


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



N7

Решение:

- 1) Пусть $A_1 A_2 \dots A_n$ и $B_1 B_2 \dots B_n$ — ^{прав. n-уг. в} ~~основаниях~~ ^{основание} усеченной пирамиды ($A_1 A_2 \dots A_n$ — нижнее), $S = A_1 B_1 \cap A_2 B_2 \cap \dots \cap A_n B_n$, O_A и O_B — центры $A_1 A_2 \dots A_n$ и $B_1 B_2 \dots B_n$ ^{соотв.}, I_1 и I_2 — центры шаров Ω и ω ^{соотв.}, ^{Р и r — их радиусы.} Очевидно, что S, O_A, O_B, I_1, I_2 коллинеарны, причем прямая ℓ , прох. через ~~эти~~ ^{эти} ~~м-ки~~ ^{м-ки}, перф. основаниям ^{у сеч.} пирамиды. Пусть M — середина $A_1 A_2$ ^{к-сер. $B_1 B_2$,} ^{тогда $I_2 P \perp SP$.} P — м-ка касания ω с гранью $SA_1 A_2$, ^{м.к.} $I_2 O_A \perp \alpha$, $I_2 O_B \perp \beta$, то O_A и O_B — м-ки касания ω с α и $\beta \Rightarrow I_2 O_A = I_2 O_B = I_2 P = r$. $O_A M \perp A_1 A_2$ (м.к. $O_A A_1 = O_A A_2$), $I_1 O_A \perp \alpha \Rightarrow I_1 M \perp A_1 A_2$ (по $\Pi \perp \Pi \perp \ell$) $\Rightarrow M$ — м-ка кас. Ω с $A_1 A_2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

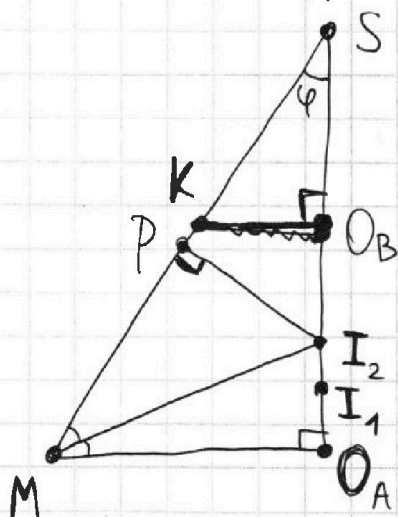
7
☒

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично, K -м-ка касания $\Omega \in B_1 B_2$, $I_1 M = I_1 K$
 K/O ~~интерпретация~~ ~~м-м-ка~~ ~~(SMO_A)~~ ~~серединая для~~
~~отрезка~~ $A_1 A_2$ $SO_A \perp \Omega \Rightarrow SO_A \perp A_1 A_2 \Rightarrow SP \perp A_1 A_2$ (по
 $\Pi \Pi \Pi$) $\Rightarrow S, K, P, M$ ~~касательные~~. Рассмотрим
 $m-m$ (SMO_A):



Пусть $SK = b$, $SM = a$, $SO_B = h_B$,
 $SO_A = h_A$. ~~Видно~~ ~~доказано~~ ~~Видно~~ ~~доказано~~ ~~Видно~~ ~~доказано~~
 $\angle I_2 P M = \angle I_2 O_A M = 90^\circ$, $\angle SO_B K =$
 $= 90^\circ$, $I_1 K = I_1 M$.
 $\angle M S O_A = \varphi$.

В углов. усеч. пирамиде: $S_{бок. над} = n \cdot S(A_1 A_2 B_2 B_1) = n \cdot$
 $\cdot (S(SA_1 A_2) - S(SB_1 B_2)) = n \cdot (\frac{1}{2} SM \cdot A_1 A_2 - \frac{1}{2} SK \cdot B_1 B_2) =$
 $= n \cdot (\alpha \cdot MA_1 - b \cdot KB_1) = n \cdot (\alpha \cdot MO_A \cdot \tan \angle MO_A A_1 - b \cdot KO_B \cdot$
 $\tan \angle KO_B B_1) = n \cdot \tan \frac{\pi}{n} (\alpha \sqrt{a^2 - h_A^2} - b \sqrt{b^2 - h_B^2})$

$S_{нужн.} = S(A_1 \dots A_n) = n \cdot S(O_A A_1 A_2) = n \cdot \frac{1}{2} O_A A_1^2 \cdot \sin \angle A_1 O_A A_2 =$
 $= n \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{O_A M}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n} = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{O_A M^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow n \cdot (a^2 - h_a^2) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}. \text{ Иском, } \frac{S_{\text{ок. нов.}}}{S_{\text{ш. ш. н.}}} = \\
 & = \frac{a\sqrt{a^2 - h_a^2} - b\sqrt{b^2 - h_b^2}}{a^2 - h_a^2}. \text{ Из подобия } \triangle SKO_B \sim \triangle SMO_A: \\
 & \frac{a}{b} = \frac{SM}{SK} = \frac{SO_B}{SO_A} = \frac{h_a}{h_b} \Rightarrow \frac{a}{h_a} = \frac{b}{h_b} = k \Rightarrow \\
 & \Rightarrow a = kh_a, b = kh_b. \text{ Тогда } \frac{a\sqrt{a^2 - h_a^2} - b\sqrt{b^2 - h_b^2}}{a^2 - h_a^2} = \\
 & = \frac{kh_a \cdot \sqrt{k^2 - 1} h_a - kh_b \cdot \sqrt{k^2 - 1} h_b}{(k^2 - 1) h_a^2} = \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} \cdot \frac{h_a^2 - h_b^2}{h_a^2} = \\
 & = \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} \cdot \left(1 - \frac{h_b^2}{h_a^2}\right). \text{ В т.т.е. } \triangle SMO_A: \frac{h_a}{a} = \cos \varphi \Rightarrow \\
 & \Rightarrow k = \frac{a}{h_a} = \frac{1}{\cos \varphi} \Rightarrow \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} = \frac{\frac{1}{\cos \varphi}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\cos \varphi}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} = \\
 & = \frac{1}{\sin \varphi} \left(\text{м.к. } \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \right).
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = 0$$

$$\cos 2\pi x + \cos \pi(x+y) = 0 \quad -5, -4, -3, -2, \dots, 3, 4, 5 \quad \cos \alpha + \cos \beta =$$

$$2 \cos \pi \cdot \frac{3x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \cdot \pi = 0 \quad -4 \quad = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) +$$

$$\begin{cases} 3x + y = 2n + 1 \\ x - y = 2k + 1 \end{cases}$$

$$S_{\text{max}} = n \cdot \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n} =$$

$$+ \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

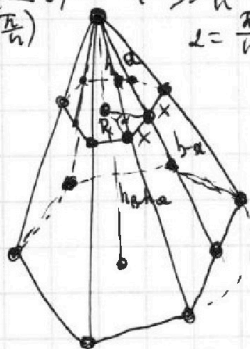
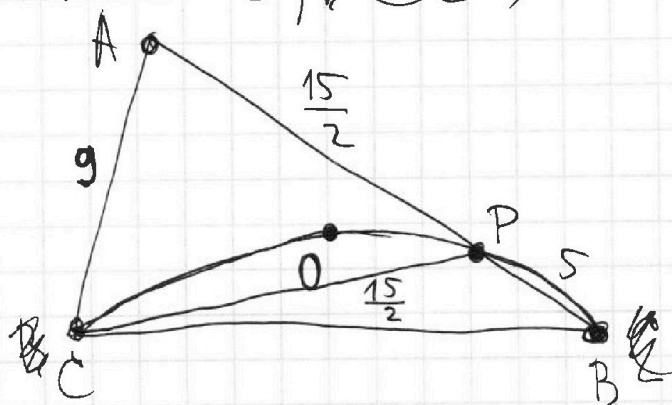
$$g = n \cdot \frac{1}{2} \frac{b^2 h_B^2}{\cos^2(\frac{\pi}{n})} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = n(b^2 - h_B^2) \cdot \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{n})} \cdot \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}$$

$$x \in [-5; 5], y \in [-4; 4]$$

$$y = -4:$$

$$\arccos \frac{y}{5} = \pi \Rightarrow \arcsin \frac{x}{5}$$

$$\arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, \quad \Rightarrow x = 1$$



$$\begin{aligned} & \Rightarrow x = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{n})} \cdot \sqrt{a^2 - h_a^2} \\ & R = \frac{a}{2 \cos(\frac{\pi}{n})} \end{aligned}$$

$$S = n \cdot \frac{1}{2} a x = n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\cos(\frac{\pi}{n})} \cdot \sqrt{a^2 - h_a^2} \right)$$

$$S = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\cos(\frac{\pi}{n})} \cdot \sqrt{a^2 - h_a^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \quad x^2 - x - (y^2 + y) = (x-y-1)(x+y) \quad x, y > 0$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} = 2 \left(\frac{1}{(x-1)(y+1)} - \frac{1}{xy} \right)$$

$$-\frac{1}{x^2(x-1)} + \frac{1}{y(y+1)} = 2 \left(\frac{xy - (xy + x - y - 1)}{xy(x-1)(y+1)} \right)$$

$$\frac{x(x-1) - y(y+1)}{xy(x-1)(y+1)} = 2 \cdot \frac{y - x + 1}{xy(x-1)(y+1)}$$

$$(x-y-1)(x+y) + 2(x-y-1) = 0 \Rightarrow x = y+1$$
$$(xy)^2 = (x-1)^2 \cdot (y+1)^2 \quad xy = (x-1)(y+1) \Rightarrow x = y+1$$

$$xy = (x-1) \cdot (y+1)$$

1) ~~$x \geq 1$~~ :

$$xy = xy + y + x - 1$$

$$x = y + 1 \Rightarrow M = 1$$

2) ~~$x < 1$~~ :

$$xy = (1-x)(y+1)$$

$$xy = -xy + y - x + 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

