



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

Дано нек. цифры а,

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1000 + 111 = a \cdot 11 \cdot 101. \text{ Если } A \cdot B \cdot C = x^2, x \in \mathbb{N},$$

$$\text{то } x^2 : A \Rightarrow x^2 : 11, x^2 : 101. \text{ Т.к. } 11 \text{ и } 101 - \text{простые}$$

числа, то ~~из~~ $x^2 : 11, x^2 : 101$, следов.

$$x : 11, x : 101. \text{ При этом } \text{НОД}(101; 11) = 1, \text{ поэтому } x \text{ делится на } 11, x : 101.$$

$$x : 11, x : 101 \text{ следов. } x : 11 \cdot 101 \Rightarrow x = 11 \cdot 101 \cdot k, k \in \mathbb{N}.$$

$$A \cdot B \cdot C = (11 \cdot 101 \cdot k)^2$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C = 11^2 \cdot 101^2 \cdot k^2 \Leftrightarrow a \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot k^2$$

Значит, либо а, либо В, либо С делится на 101

(~~и~~ т.к. 101 - простое). Но $a \leq 9, C \leq 99 \Rightarrow a \nmid 101, C \nmid 101$.
(но yes.)

Тогда $B \nmid 101$, и, т.к. В трехзначное, то $B = \overline{bab}$ где нек. цифры В. По условию, десятичная запись

В содержит цифру 2, $\Rightarrow b = 2, B = \overline{bab} = 202$.

$$a \cdot 202 \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot k^2$$

$$2a \cdot C = 11 \cdot k^2 \Rightarrow \text{либо } a \mid 11, \text{ либо } C \text{ делится на } 11.$$

Но $a \leq 9 \Rightarrow C \nmid 11 \Rightarrow C = \overline{ccc}$ где нек. цифры С. По

условию, десятичная запись С содержит цифру 3.

$$\Rightarrow C = 33, C = 33.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отмьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a \cdot 2 \cdot 33 = \cancel{11} k^2 \Rightarrow 6a = k^2$. Отсюда $k^2 : 2, k^2 : 3 \Rightarrow k : 2, k : 3$ (н.к. числа 2 и 3 простые) $\Rightarrow k : 6$ (н.к. $\text{HOD}(3; 2) = 1$) $\Rightarrow k = 6m, m \in \mathbb{N}$. Тогда $6a = (6m)^2 = 36m^2 \Rightarrow a = 6m^2$. Тогда $6m^2 = a \leq g \Rightarrow m^2 \leq \frac{3}{2} \Rightarrow m = 1$ (н.к. $m \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow a = 6m^2 = 6$. Итак, $A = 6666, B = \cancel{202}, C = \cancel{33}$.
Ответ: ~~(6666; 202; 33)~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$x, y > 0$$

$$k(x; y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

$$k(x; y) = k(x-1; y+1) \Leftrightarrow \frac{x+y+2}{xy} = \frac{(x-1)+(y+1)+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-1)(y+1)} \quad (\text{m.k. } x+y+2 > 2 > 0)$$

$$\begin{cases} xy = (x-1)(y+1) \\ xy \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = xy - y + x - 1 \\ xy \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{xy} \cancel{= xy} x - y = 1 \\ \cancel{xy} \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Тогда } M = x^3 - y^3 - 3xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy = x^2 + xy + y^2 - 3xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = 1.$$

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

 $\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\ \cos^2 \pi x - \cancel{\sin^2 \pi x} + \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y &= 0 \\ \cos 2\pi x + \cos \pi(x+y) &= 0 \\ 2 \cos(\pi \cdot \frac{3x+y}{2}) \cdot \cos(\pi \cdot \frac{x-y}{2}) &= 0 \\ \left[\cos(\pi \cdot \frac{3x+y}{2}) = 0 \right. \\ \left. \cos(\pi \cdot \frac{x-y}{2}) = 0 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \pi \cdot \frac{3x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \pi \cdot \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+y = 2n+1, n \in \mathbb{Z} \\ x-y = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Одн. реш.: $(t; 2n+1-3t)$, $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}; (t+2k+1; t)$,
 $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

~~b)~~) Для $x, y \in \mathbb{Z}$ $\cancel{\frac{3x+y}{2}} \equiv x+y \equiv x-y$, поэтому

$$3x+y = 2n+1 \text{ для нек. } n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-y = 2k+1 \text{ для}$$

нек. $k \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow x \text{ и } y \text{ есть четное разностью}$ чисел. Три таких допустимых знач. x и y

$$(т.е. |x| \leq 5, |y| \leq 4) \arcsin \frac{x}{5} \cancel{\arcsin \frac{y}{5}} \leq \frac{\pi}{2},$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\arccos \frac{y}{4} \leq \pi \Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$, ~~пиф-бо~~

 $\Leftrightarrow \frac{x}{5} = 1, \frac{y}{4} = -1 \Leftrightarrow x=5, y=-4$. Значит, при всех остальных знач. $x \in [-5; 5], y \in [-4; 4]$

$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$. Посчитаем, сколько есть пар $(x; y)$, т.к. $x, y \in \mathbb{Z}, |x| \leq 5, |y| \leq 4$ и ~~и~~ x и y ~~разной~~ четности.

1) $x \neq 0$:

$y \neq 0$, для $x \neq 0$ 5 вариантов выбора для y
~~варианта~~ ~~выбора~~ \Rightarrow общее кол-во ~~варианта~~ вариантов $5 \cdot 4 = 20$

2) $x = 0$:

$y \neq 0$, для $x = 0$ 5 вариантов, для $y \neq 0$ 5 вариантов \Rightarrow всего ~~вариантов~~ $5 \cdot 5 = 25$.

Значит, условию задачи будем удовлетворять $20 + 25 - 1 = 44$ пар

(н.к. пара $(-5; -4)$ исключена, т.к. не ~~является~~)

Ответ: 44



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

Пусть в y котих месяцах матировались выдавать x билетов ($x > 4$, но условие), а одноклассникам стипендий y .

1) В начале месяца:

Кол-во способов выбрать из y котих на котирт:

C_y^4 . Кол-во способов, в которых идут и Тимя, и Вася: C_{y-2}^2 (среди всех одноклассников кроме Тими и Васи надо выбрать еще 2 из y котих). Значит, вероятность $\frac{C_{y-2}^2}{C_y^4}$

$$= \frac{\frac{12}{y(y-1)}}{\frac{(y-2)(y-3)}{2}} = \frac{12}{\frac{(y-2)(y-3)}{2}} =$$

2) В x котих месяцах:

Аналогично пункту 1, вероятность $\frac{C_{y-x}^{x-2}}{C_y^x}$

$$= \frac{\frac{(y-2)!}{(y-x)! \cdot (x-2)!}}{\frac{y!}{(y-x)! \cdot x!}} = \frac{x(x-1)}{y(y-1)} .$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По условию, $\frac{x(x-1)}{y(y-1)} = 2,5 \cdot \frac{12}{y(y-1)}$

$$x(x-1) = 2,5 \cdot 12 \quad (\text{м.н. } y(y-1) > 0)$$

$$x^2 - x - 30 = 0$$

$$(x-6)(\underbrace{x+5}) = 0$$

> 0 , м.н. $x > 4$

$$x = 6$$

Ответ: 6

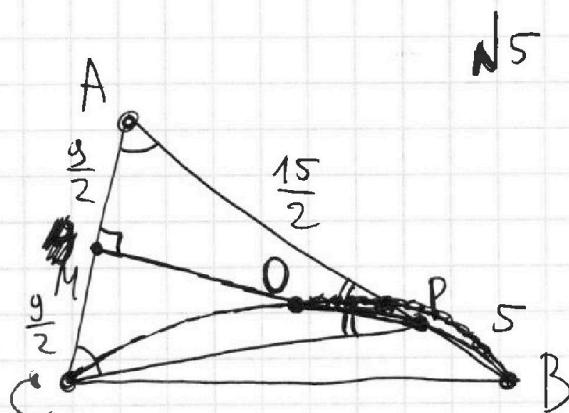


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решениес которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

1) По теореме о центральном угле $\angle BOC = 2 \angle BAC$.

Из вписанных $\angle BOC : \angle BPC = \angle BOC$. Значит,
 $\angle BPC = 2 \angle BAC$. По теореме о внешнем угле $\angle BPC =$
 $= \angle PAC + \angle PCA = \angle BAC + \angle PCA \Rightarrow \angle PCA = \angle BPC - \angle BAC =$
 $= \angle BAC \Rightarrow \triangle APC \sim \triangle BAC$ (по $\angle A$ и $\angle C$). Т.к.
 $PC = AP = \frac{15}{2}$

$AO = OC$ (т.к. O -центр опис. окр-тии $\triangle ABC$). Зна-
чим, PO -медиана, бисс-са и высота $\triangle APC$ $\angle \alpha / \beta$
 $\triangle APC$. Т.к. M -сер. AC . Тогда $PM \perp AC$.

2) $AM = \frac{1}{2} AC = \frac{9}{2}$. По теореме Пифагора в $\triangle APM$:
 $AP^2 = AM^2 + MP^2 \Rightarrow MP = 6$. Тогда $\sin \angle APM = \frac{AM}{AP} = \frac{3}{5}$,
 $\cos \angle APM = \frac{PM}{AP} = \frac{4}{5}$. Т.к. PM -бисс-са $\angle APC$, то

$$\angle APC = 2 \angle APM \Rightarrow \sin \angle APC = \sin 2 \angle APM = 2 \sin \angle APM \cdot \cos \angle APM = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \Rightarrow \sin \angle BPC = \sin(180^\circ - \angle APM) = \sin \angle APC = \frac{24}{25}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}3) \quad S(\Delta ABC) &= S(\Delta APC) + S(\Delta BPC) = \frac{1}{2} \cdot PM \cdot AC + \frac{1}{2} \cdot BP \cdot PC \cdot \sin \angle BPC = \\&= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{24}{25} = 27 + 18 = 45.\end{aligned}$$

Ответ: 45

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$\Phi(\lambda): \begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\cos\lambda)(y - 3\sqrt{2}\sin\lambda) \stackrel{(1)}{\leq} 0 \\ x^2 + y^2 \stackrel{(2)}{\leq} 25 \end{cases}$$

Построим $\Phi(\lambda)$. Нарисуем прямую $x = 3\sqrt{2}$.

• $\cos\lambda; y = 3\sqrt{2}\sin\lambda$. Их т-ка пересечения $A(3\sqrt{2}\cos\lambda; 3\sqrt{2}\sin\lambda)$ лежит на окр-тии с центром $O(0,0)$ и радиусом $3\sqrt{2}$, т.к. $(3\sqrt{2}\cos\lambda)^2 + (3\sqrt{2}\sin\lambda)^2 = (3\sqrt{2})^2 (\sin^2\lambda + \cos^2\lambda) = (3\sqrt{2})(3\sqrt{2})^2$.

Тогда мн-во решений нерав-ва (1) – левая версткая ~~половина~~ и правая боковая четверти, на которые прямые $x = 3\sqrt{2}\cos\lambda, y = 3\sqrt{2}\sin\lambda$ разделяют пл-ть, вместе с ^{самими} ~~этими~~ w . Мн-во решений неравенства (2) – круг с центром O и радиусом 5. Тогда $\Phi(\lambda)$ будем выглядеть

следующим образом:

$$\text{Замечание, что } OA = 3\sqrt{2} \Rightarrow A \in w.$$

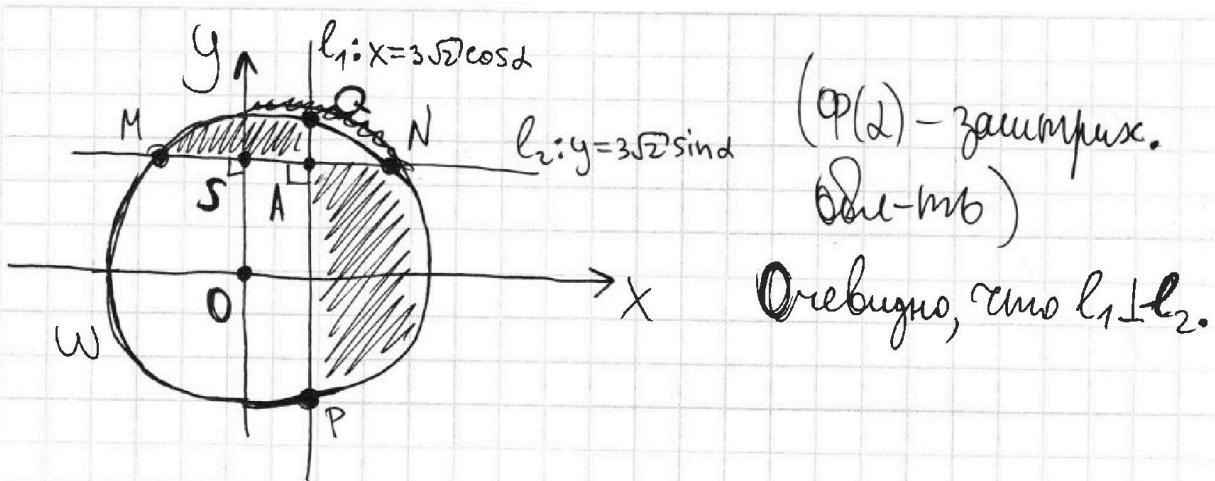


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$(\varphi(d) - \text{заштрих.})$
 (одн.-мн)

Очевидно, что $l_1 \perp l_2$.

Пусть $l_1 \cap w = \{P, Q\}$; $l_2 \cap w = \{M, N\}$ (как показано на рисунке). Тогда угловая $\varphi(d)$ состоит из дуг \overarc{MQ} , NP и отр-ков MA, AQ, AN, AP . На дугу \overarc{MQ} отирается угол $\angle MPQ$, а на дугу NP — угол $\angle NMP$, при чем $\angle MPQ + \angle NMP = \angle MPA + \angle PMA = 90^\circ$, т.к. $\angle MAP = 90^\circ$. Значит, сумма центральных углов, отир. на дуги \overarc{MQ} и NP , равна $\angle MOQ + \angle PON$ по мере о $\angle MOQ$ и $\angle PON$ — центральным углам. Тогда сумма этих дуг MQ и NP равна $2\pi \cdot \frac{\angle MOQ}{360^\circ} + 2\pi \cdot \frac{\angle PON}{360^\circ} = 2\pi \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 5\pi$.
 $\frac{\angle PON}{360^\circ} = 2\pi \cdot 5 \cdot \frac{\angle MOQ + \angle PON}{360^\circ} = 2\pi \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 5\pi$.

Тогда сумма углов $\varphi(d)$ равна $5\pi + MN + PQ$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $S = MN \cap Oy$. (^{считаем, что Oy и MN не совп.}) $\ell_1 \perp Oy \Rightarrow S$ -середина MN .

По теореме Пифагора в $\triangle OON$: $ON^2 = OS^2 + SN^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow SN = \sqrt{ON^2 - OS^2} = \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2}$ (м.к. $OS = p(0; \ell_2) =$
 $= p(Ox; \ell_2) = |3\sqrt{2}\sin\alpha|$). Заметим, что формула
 $SN = \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2}$ работает и если $MN \nparallel$ осн. с Ox ,
^{круга} т.к. в этом случае $\sin\alpha = 0$ и $SN = \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2}$ работает ~~правильно~~
~~также~~, т.к. $MN = 2SN = 2\sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2}$.

Аналогично $PQ = 2\sqrt{25 - (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2}$. Тогда

$$\begin{aligned} MN + PQ &= 2\left(\sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2} + \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2}\right) = \\ &= 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2} + \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2}}{2}\right) \stackrel{(*)}{\leq} \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2} + \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2} \\ &\leq 4 \cdot \sqrt{\frac{(25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2) + (25 - (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2)}{2}} = 4\sqrt{25 - \frac{(3\sqrt{2})^2}{2}} = \end{aligned}$$

$= 4\sqrt{16} = 16$, приём параллельности доказывается \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2} = \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \tan\alpha = \pm 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$
 (б)

~~Более того, прямая MN не пересекает $(*)$ исключительно потому, что между средними промежуточескими и средними квадратичными есть разница~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
Ч ИЗ Ч

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

чисел $\sqrt{25 - (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2}, \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin\alpha)^2}$.
длины $\Phi(\alpha)$ не превосходит $5\pi + 16$,
равно достижима $\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

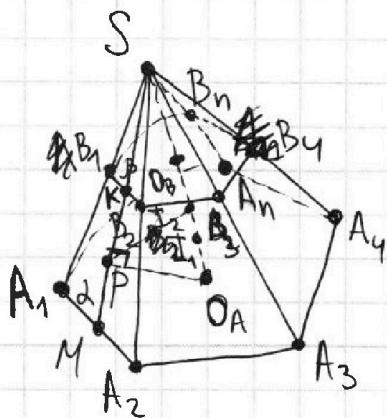
Ответ: $5\pi + 16; \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмните крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



N7

Решение:

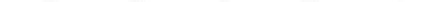
прав. п. ч. в

1) Пусть A_1, A_2, \dots, A_n и B_1, B_2, \dots, B_n - основаниях
усечённой пирамиды ($A_1 A_2 \dots A_n$ - основание), $S = A_1 B_1$,
 $\cap A_2 B_2 \cap \dots \cap A_n B_n$, O_A и O_B - центры $A_1 A_2 \dots A_n$ и
 $B_1 B_2 \dots B_n$ соотв., I_1 и I_2 - центры шаров
-2 и в соотв., очевидно, что S, O_A, O_B, I_1, I_2
колинеарны, причем прямая l , проход. через эти
точки, перп. основаниям пирамиды. Пусть M -
середина $A_1 A_2$, P -м-ка касания w с уравн.
 $S A_1 A_2$, $\frac{I_2 P \perp SP}{\text{м-ка } I_2 O_A \perp l, I_2 O_B \perp \beta, MO_A \text{ и } O_B}$
 O_B -м-ка касания w с γ и $\beta \Rightarrow I_2 O_A = I_2 O_B =$
 $= I_2 P = r$. $O_A M \perp A_1 A_2$ (м-к. $O_A A_1 = O_A A_2$), $I_1 O_A \perp d \Rightarrow$
 $\Rightarrow I_1 M \perp A_1 A_2$ (но $\overline{I_1 I_2} \perp \overline{I_2 P}$) $\Rightarrow M$ -м-ка кас. γ с $A_1 A_2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

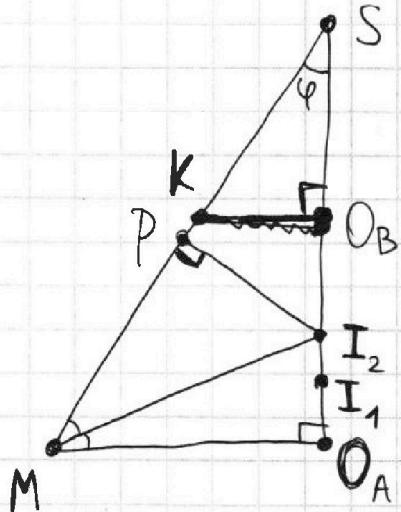
- 1 2 3 4 5 6 7



СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично, \nexists k -м-ка касания γ с $B_1 B_2$, так как
 γ не пересекает $B_1 B_2$. Т.к. (SMP_A) \Rightarrow секущая
 $\text{касается } A_1 A_2$. $SO_A \perp \gamma \Rightarrow SO_A \perp A_1 A_2 \Rightarrow SP \perp A_1 A_2$ (но
 $\overline{JII JII JI}) \Rightarrow S, k, P, M \text{ не лежат на одной прямой.}$ Доказательство
 $m-m_b (SMO_A) :$



Түсмөнгөдөр $SK=b$, $SM=\alpha$, $SO_B=h_B$,
 $SO_A=h_A$. ~~Ихэвчилж буйне зама-~~
~~затко, тусоо~~ $I_2O_A=I_2O_B=I_2P=r$,
 $\angle I_2PM = \angle I_2OM = 90^\circ$, $\angle SO_BK =$
 $= 90^\circ$, $I_1K = I_1M$.

$$\text{B užvar. ycer. huparunge: } S_{\text{bek.net}} = n \cdot S(A_1 A_2 B_2 B_1) = n \cdot \\ \cdot (S(SA_1 A_2) - S(SB_1 B_2)) = n \cdot \left(\frac{1}{2} SM \cdot A_1 A_2 - \frac{1}{2} SK \cdot B_1 B_2 \right) = \\ = n \cdot (a \cdot MA_1 - b \cdot KB_1) = n \cdot (a \cdot MO_A \cdot \operatorname{tg} \angle MO_A B_1 - b \cdot KO_B \cdot \\ \operatorname{tg} \angle KO_B B_1) = n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \left(a \sqrt{a^2 - h_a^2} - b \sqrt{b^2 - h_b^2} \right)$$

$$S_{\text{Kreis}} = S(A_1 \dots A_n) = n \cdot S(\Delta A_1 A_2) = n \cdot \frac{1}{2} O_A A_1^2 \cdot \sin \angle A_1 O_A A_2 = \\ = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{O_A M}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n} = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{O_A M^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \ominus$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмечте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \text{дано: } n \cdot (a^2 - h_a^2) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}. \text{ Тогда, } \frac{S_{\text{окн. поб.}}}{S_{\text{окн.}}} = \\
 & = \frac{a \sqrt{a^2 - h_a^2} - b \sqrt{b^2 - h_B^2}}{a^2 - h_a^2} \text{. Из подобия } \triangle SKO_B \sim \triangle SMO_A: \\
 & \frac{a}{b} = \frac{SK}{SM} = \frac{SO_B}{SO_A} = \frac{h_a}{h_B} \Rightarrow \frac{a}{h_a} = \frac{b}{h_B} = k \Rightarrow \\
 & \Rightarrow a = kh_a, b = kh_B. \text{ Тогда } \frac{a \sqrt{a^2 - h_a^2} - b \sqrt{b^2 - h_B^2}}{a^2 - h_a^2} = \\
 & = \frac{kh_a \cdot \sqrt{k^2 - 1} h_a - kh_B \cdot \sqrt{k^2 - 1} h_B}{(k^2 - 1) h_a^2} = \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} \cdot \frac{h_a^2 - h_B^2}{h_a^2} = \\
 & = \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} \cdot \left(1 - \frac{h_B^2}{h_a^2}\right). \text{ В мфке } SMO_A: \frac{h_a}{a} = \cos \varphi \Rightarrow \\
 & \Rightarrow k = \frac{a}{h_a} = \frac{1}{\cos \varphi} \Rightarrow \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1)}{\cos^2 \varphi} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} = \\
 & = \frac{1}{\sin \varphi} \quad (\text{м.к. } \varphi \in (0; \frac{\pi}{2})).
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = 0$$

$$\cos 2\pi x + \cos \pi(x+y) = 0 \quad -5, -4, -3, -2, \dots, 3, 4, 5 \cos \alpha + \cos \beta =$$

$$2 \cos \pi \cdot \frac{3x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \cdot \pi = 0 \quad -4 \quad = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) +$$

$$\begin{cases} 3x + y = 2k+1 \\ x - y = 2l+1 \end{cases} \quad S_{\text{кругл.}} = n \cdot \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n} = + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$g = h \cdot \frac{1}{2} \sqrt{b^2 h_B^2 - \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = h(b^2 - h_B^2) \cdot$$

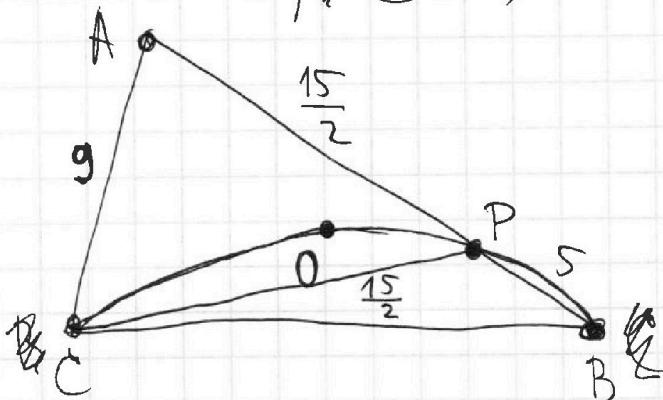
$$l = \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

$$x \in [-5; 5], y \in [-4; 4]$$

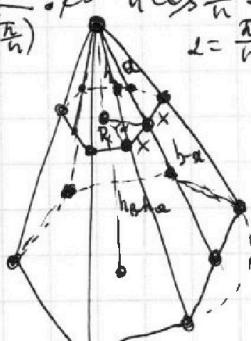
$$y = -4:$$

$$\arccos \frac{4}{5} = \pi \Rightarrow \arcsin \frac{3}{5}$$

$$\arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, \Rightarrow x = 1$$



$$S = h \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot \left(\sqrt{b^2 - h_B^2} - a \sqrt{a^2 - h_a^2} \right)$$



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} &= \frac{h}{a} \\ x &= \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = \frac{h}{a} \\ h &= a \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \\ S &= h \cdot a \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = h \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot a \end{aligned}$$

$$S = h \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot a = h \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot a^2$$

$$\cdot a \cdot \sqrt{a^2 - h_a^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \quad x, y > 0$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} = 2 \left(\frac{1}{(x-1)(y+1)} - \frac{1}{xy} \right)$$

$$-\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{y(y+1)} = 2 \left(\frac{xy - (xy + x - y - 1)}{xy(x-1)(y+1)} \right)$$

$$\frac{x(x-1) - y(y+1)}{xy(x-1)(y+1)} = 2 \cdot \frac{y - x + 1}{xy(x-1)(y+1)}$$

$$(x-y-1)(x+y) + 2(x-y-1) = 0 \Rightarrow x = y+1$$

~~$$(xy)^2 = (x-1)^2 \cdot (y+1)^2 \quad xy = (x-1)(y+1) \Rightarrow x = y+1$$~~

~~$$xy = |x-1| \cdot (y+1)$$~~

1) ~~$x > 1$:~~

~~$$xy = xy + y + x - 1$$~~

~~$$x = y+1 \Rightarrow M=1$$~~

2) ~~$x < 1$:~~

~~$$xy = (1-x)(y+1)$$~~

~~$$xy = -xy + y - x + 1$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ч8ил. $\rightarrow \times$ Высемов $(x > 4)$

Учеников.

$$P_1 = \frac{\binom{y}{2}}{\binom{y}{4}}, P_2 = \frac{\binom{x-2}{y-2}}{\binom{x}{y}} = \frac{(y-2)!}{(x-2)! \cdot \cancel{(y-x)!} / y!} \stackrel{!}{=} \frac{(y-2)(y-3) \cdot \frac{1}{2}}{4 \cancel{(y-2)}(y-1)(y-2)(y-3) \cdot \frac{1}{24}} = \frac{12}{y(y-1)} \\ \stackrel{!}{=} \frac{(y-2)!}{y!} : \frac{(x-2)!}{x!} = \frac{x(x-1)}{y(y-1)}$$

$$x(x-1) = 2,5 \cdot 12 = 30$$

$$x^2 - x - 30 = 0$$

$$(x-6)(x+5) = 0$$

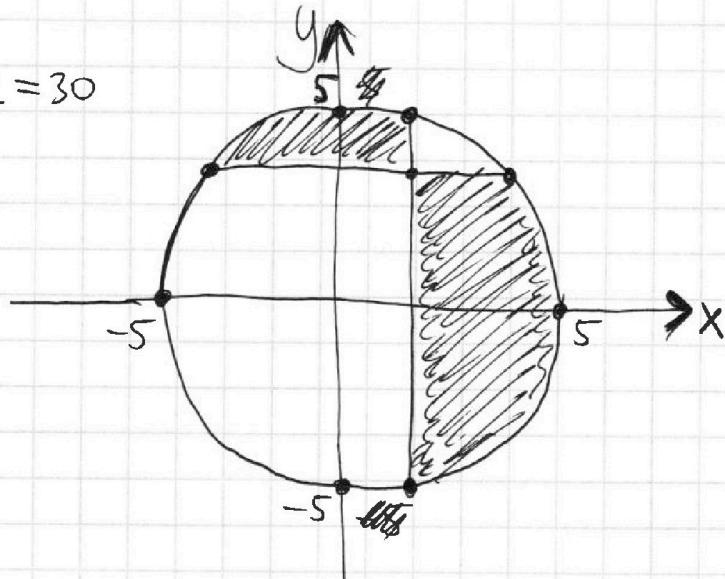
Минимум 2024

$$A = 1111 \quad x = 11 \cdot 101$$

$$B = 202 \Rightarrow C = 11$$

$$C = 33$$

$$ABC = x \cdot 11 \cdot 101 \cdot 202 \cdot 33 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 6x$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!