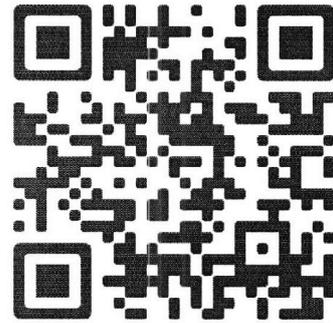


МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 2, а  $y$  — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 6xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 25$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 35$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) A = 1111 \cdot k ; k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot k$$

2)  $(A \cdot B \cdot C)$  - полный квадрат  $\Rightarrow$  в его разложении на простые множители числа 11 и 101 будут встречаться четное число раз  $\Rightarrow B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot n ; n \in \mathbb{N}$

$$3) 11 \cdot 101 > 1000 > B \Rightarrow B \not\div (11 \cdot 101)$$

$$101 > 100 > C \Rightarrow C \not\div 101$$

$$4) \begin{cases} B \cdot C \div (11 \cdot 101) \\ B \not\div (11 \cdot 101) \\ C \not\div 101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B \div 101 \\ C \div 11 \end{cases}$$

5) Из всех трёхзначных чисел, кратных 101 (101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909), единственное число, содержащее цифру 6 - 606  $\Rightarrow B = 606$

6) Из всех двузначных чисел, кратных 11 (11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99), единственное число, содержащее цифру 3 - 33  $\Rightarrow C = 33$

$$7) A \cdot B \cdot C = 1111 \cdot k \cdot 606 \cdot 33 =$$

$$= 11 \cdot 101 \cdot k \cdot 101 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot k -$$

полный квадрат  $\Rightarrow 2 \cdot k$  - полный квадрат

$$8) \left. \begin{array}{l} 2 \cdot k - \text{полный квадрат} \\ k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} k=2 ; A=2222 \\ k=8 ; A=8888 \end{cases}$$

Ответ: (2222; 606; 33); (8888; 606; 33)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K(x; y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} \quad \checkmark 2$$

$$M(x; y) = x^3 - y^3 - 6xy$$

$$K(x; y) = K(x-2; y+2)$$

$$\frac{1^y}{x} + \frac{1^x}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$x; y > 0 \Rightarrow x+y+5 \neq 0$$

$$\Rightarrow xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy + 2x - 2y - 4$$

$$2y = 2x - 4$$

$$y = x - 2$$

$$M(x; y) = x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) -$$

$$- 6xy = (x - (x-2))(x^2 + x^2 - 2x + x^2 - 4x + 4) - 6(x^2 - 2x) =$$

$$= 2(3x^2 - 6x + 4) - 6x^2 + 12x = 6x^2 - 12x + 8 -$$

$$- 6x^2 + 12x = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 \text{a) } (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x & \text{N 3} \\
 \sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y &= \cos^2 \pi x - \cos \pi x \cos \pi y \\
 (\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) - (\cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y) &= 0 \\
 \cos 2\pi x - \cos(\pi x - \pi y) &= 0 \\
 -2 \sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0 \\ \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \quad | \cdot \frac{2}{\pi} \\ \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \quad | \cdot \frac{2}{\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 2k + \pi \\ x + y = 2n + \pi \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2k + 3x; k \in \mathbb{Z} \\ y = 2n - x; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:  $(x; -2k + 3x); (x; 2n - x), x \in \mathbb{R}; n, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{б) 1) } \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi, \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{6} - 1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \arcsin \frac{x}{6} &\leq \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{y}{2} &\leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \leq \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \neq \pi$$

$$\begin{cases} \arcsin \frac{x}{6} < \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{y}{2} < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{6} < 1 \\ \frac{y}{2} < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 6 \\ y < 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 6 \\ y \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{2) } &\begin{cases} y = 3x - 2k \\ y = -x + 2n \end{cases}; k, n \in \mathbb{Z} \\
 &\Downarrow \\
 &y \equiv x \pmod{2}
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) ] x \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow x = 2p ; p \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y = 3 \cdot 2p - 2k \\ y = -2p + 2n \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2(3p - k) \\ y = 2(n - p) \end{cases} \quad n, p, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 2q ; q \in \mathbb{Z}$$

$$4) ] x \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow x = 2p + 1$$

$$\begin{cases} y = 3 \cdot (2p + 1) - 2k \\ y = -2p - 1 + 2n \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2(3p - k + 1) + 1 \\ y = 2(n - p - 1) + 1 \end{cases} \quad n, p, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 2q + 1 ; q \in \mathbb{Z}$$

5) Переберём все целые  $x$  из отрезка  $[-6; 6]$  и соответствующие им значения  $y$  из отрезка  $[-2; 2]$

$x = -6$	$y \in \{-2; 0; 2\}$	$x = 1$	$y \in \{-1; 1\}$
$x = -5$	$y \in \{-1; 1\}$	$x = 2$	$y \in \{-2; 0; 2\}$
$x = -4$	$y \in \{-2; 0; 2\}$	$x = 3$	$y \in \{-1; 1\}$
$x = -3$	$y \in \{-1; 1\}$	$x = 4$	$y \in \{-2; 0; 2\}$
$x = -2$	$y \in \{-2; 0; 2\}$	$x = 5$	$y \in \{-1; 1\}$
$x = -1$	$y \in \{-1; 1\}$	$x = 6$	$y \in \{-2; 0\}$
$x = 0$	$y \in \{-2; 0; 2\}$	$y \neq 2$	

Итого имеем  $3 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 18 + 14 = 32$  пары чисел.

Ответ: 32 пары.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть на  $n$  <sup>и 4</sup> одинадцятиклассников было выделено  $k$  билетов ( $n \geq k$ ;  $k \geq 2$ ).

Тогда вероятность того, что два конкретных одинадцятиклассника получат билет равна

$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$ , где  $C_n^k$  — кол-во способов раздать

$k$  билетов на  $n$  человек, а  $C_{n-2}^{k-2}$  —

кол-во способов выбрать  $k-2$  человек, среди которых есть два искоемых.

Тогда

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} \cdot 6 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$$

$$\frac{\frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!}}{\frac{n!}{4! \cdot (n-4)!}} \cdot 6 = \frac{\frac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot (n-k)!}}{\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$$

$$\frac{4!}{2!} \cdot 6 = \frac{k!}{(k-2)!}$$

$$\frac{24 \cdot 6}{2} = k \cdot (k-1)$$

$$k^2 - k - 72 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 72 = 289 = 17^2$$

$$\begin{cases} k = \frac{1+17}{2} \\ k = \frac{1-17}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 9 \\ k = -8 - \text{не удовл. смыслу задачи} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: 9 билетов.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

~5

$\triangle ABC$  - остроуг.

$\omega_1$  - описанная

$O$  - центр  $\omega_1$

$\omega_2$  - описана  
около  $\triangle BOC$

$\omega_2 \cap AB = P$

$AP = 25$

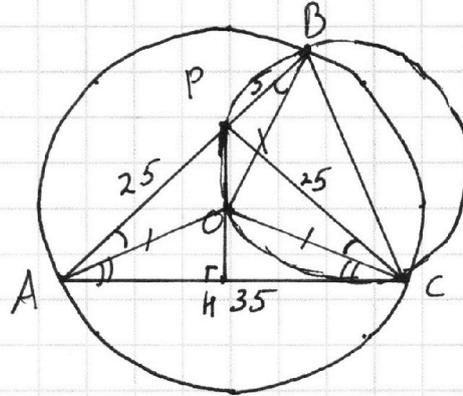
$BP = 5$

$AC = 35$

Найти:

$S_{ABC}$

Решение:



1)  $AO = BO = CO$  - радиусы

2)  $\triangle AOB$   $\left\{ \begin{array}{l} AO = BO \\ \triangle AOB - \text{равноб.} \end{array} \right. \Rightarrow \angle BAO = \angle ABO$

3)  $\angle OBP$  и  $\angle OCP$  - вписанные  $\left\{ \begin{array}{l} \angle OBP = \angle ABO \\ \angle OCP = \angle OBP = \angle OAB \end{array} \right.$

4)  $\triangle AOC$   $\left\{ \begin{array}{l} AO = OC \\ \triangle AOC - \text{равноб.} \end{array} \right. \Rightarrow \angle OAC = \angle OCA$

5)  $\left. \begin{array}{l} \angle BAO = \angle PCO \\ \angle OAC = \angle OCA \end{array} \right\} \Rightarrow \angle PAC = \angle PCA \Rightarrow \triangle APC - \text{равноб.}$

6) В  $\triangle APC$  построим  $PH \perp AC$ .  $\triangle APC - \text{равноб.} \Rightarrow PC = AP = 25$   
 $PH$  - высота и медиана  $\Rightarrow AH = CH = \frac{AC}{2} = 17,5$

7) По Th Пифагора

$$PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{25^2 - 17,5^2} = \sqrt{(2,5 \cdot 10)^2 - (2,5 \cdot 7)^2} =$$

$$= 2,5 \sqrt{10^2 - 7^2} = \frac{5\sqrt{51}}{2}$$

$$8) \sin \angle BAC = \frac{PH}{AP} = \frac{\frac{5\sqrt{51}}{2}}{2 \cdot 25} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$9) S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot (25+5) \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

Ответ:  $\frac{105\sqrt{51}}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases} \quad \sim 6$$

1)  $x^2 + y^2 \leq 169$  — круг с центром в т.  $(0; 0)$  и радиуса 13

2)  $(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0$

$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \\ x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \geq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$$

3) Построим прямые  $y = 5\sqrt{2} \sin \alpha$  и  $x = 5\sqrt{2} \cos \alpha$

В силу симметрии относительно  $Ox$ :

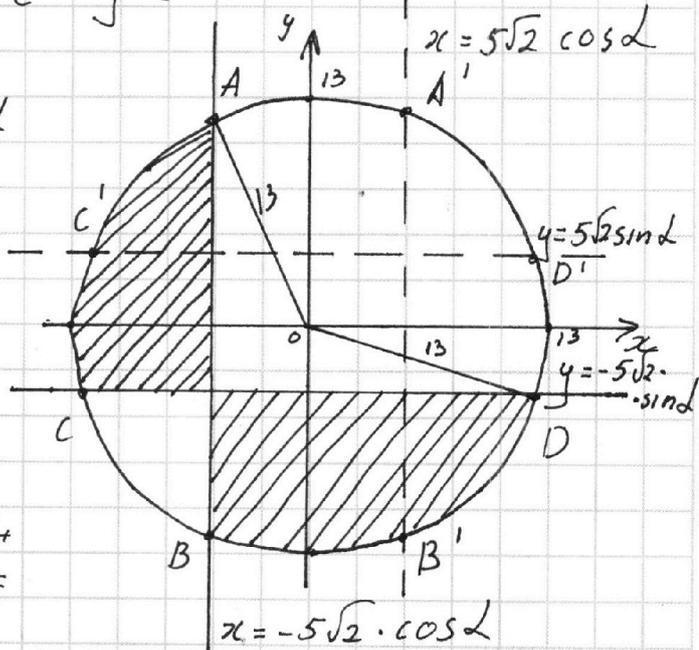
- $\cup AC' = \cup CB$
- $\cup AA' = \cup BB'$
- $\cup A'D' = \cup B'D$

В силу симметрии относительно  $Oy$ :

- $\cup CC' = \cup DD'$

$$\begin{aligned} 4) & \cup AA' + \cup A'B' + \cup D'D + \cup DB' + \\ & + \cup B'B + \cup BC + \cup CC' + \cup C'A = \\ & = 2\cup AC' + 2\cup CC' + 2\cup BB' + \\ & + 2\cup B'D = 360^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) & l_{AC'} + l_{CC'} + l_{BB'} + l_{B'D} = \\ & = \frac{2\pi R}{2} = \pi R = 13\pi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & |5\sqrt{2} \cdot \sin \alpha| < 13 \\ & |-5\sqrt{2} \cdot \cos \alpha| < 13 \end{aligned}$$

$$M = AB + CD + 13\pi$$

$$AB + CD + 13\pi \rightarrow \max$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AB = 2 \cdot \sqrt{13^2 - (5\sqrt{2}\cos\alpha)}$$

$$CD = 2 \cdot \sqrt{13^2 - (5\sqrt{2}\sin\alpha)}$$

$$M = 2 \left( \sqrt{169 - 50\cos^2\alpha} + \sqrt{169 - 50\sin^2\alpha} \right) + 13\pi$$

$$] t = \sin^2\alpha ; t \in [0; 1]$$

$$f(t) = 2 \left( \sqrt{119 + 50t} + \sqrt{169 - 50t} \right) + 13\pi$$

$$f'(t) = 2 \left( \frac{50}{2\sqrt{119 + 50t}} - \frac{50}{2\sqrt{169 - 50t}} \right) =$$

$$= \frac{50}{\sqrt{119 + 50t}} - \frac{50}{\sqrt{169 - 50t}}$$

$$f'(t) = 0$$

$$\frac{50}{\sqrt{119 + 50t}} = \frac{50}{\sqrt{169 - 50t}}$$

$$\sqrt{119 + 50t} = \sqrt{169 - 50t}$$

$$119 + 50t = 169 - 50t$$

$$100t = 50$$

$$t = \frac{1}{2}$$

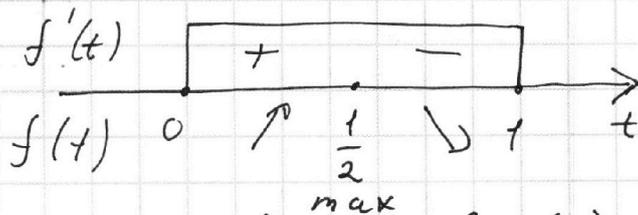
$$f'(0) = \frac{50}{\sqrt{119}} - \frac{50}{\sqrt{169}} > 0; M_{\text{наиб}} = f_{\text{наиб}} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left( \sqrt{119 + 50 \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{169 - 50 \cdot \frac{1}{2}} \right) + 13\pi =$$

$$= 2 \cdot 2\sqrt{144} + 13\pi = 48 + 13\pi$$

$$\begin{aligned} 6) \sin^2\alpha &= \frac{1}{2} \\ \sin\alpha &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \alpha &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ответ:  $M_{\text{наиб}} = 48 + 13\pi$ ,  
при  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 (\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} + \sqrt{119 + 50 \sin^2 \alpha})$$

$$t = \sin^2 \alpha; \quad t \in [0; 1]$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \cdot 6 = \frac{C_{n-k+2}^{k-2}}{C_n^k}$$

$$F(t) = 2 (\sqrt{169 - 50t} + \sqrt{119 + 50t})$$

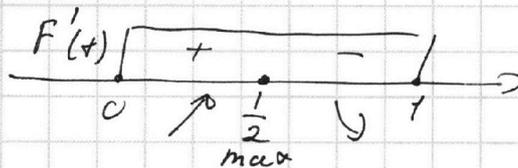
$$F'(t) = \frac{-50}{2\sqrt{169 - 50t}} + \frac{50}{2\sqrt{119 + 50t}} = 0$$

$$\frac{(n-2)! \cdot 4! \cdot (n-4)!}{n! \cdot 2! \cdot (n-4)!} \cdot 6 = \frac{(n-2)! \cdot k! \cdot (n-k)!}{n! \cdot (k-2)! \cdot (n-k)!}$$

$$\sqrt{169 - 50t} = \sqrt{119 + 50t}$$

$$100t = 50$$

$$t = \frac{1}{2}$$



$$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \quad k \in \mathbb{Z} \quad \sqrt{2} = k \cdot (k-1) \quad 8 \cdot 9$$

$$M = 2 \left( \sqrt{169 - 50 \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{119 + 50 \cdot \frac{1}{2}} \right) + 13\pi =$$

$$= 4 \sqrt{144} = 4 \cdot 12 = 48$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi x \cos \pi y$$

$$(\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) - (\cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y) = 0$$

$$\cos 2\pi x - \cos \pi(x-y) = 0$$

$$-2 \sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4)

$$A = 1111 \cdot K, K \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 122} \\ \underline{92} \phantom{00} \\ 191 \phantom{00} \\ \underline{161} \phantom{00} \\ 281 \phantom{00} \\ \underline{271} \phantom{00} \\ 101 \phantom{00} \\ \underline{99} \phantom{00} \\ 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 113} \\ \underline{104} \phantom{00} \\ 71 \phantom{00} \\ \underline{65} \phantom{00} \\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4111 \overline{) 113} \\ \underline{102} \phantom{00} \\ 91 \phantom{00} \\ \underline{85} \phantom{00} \\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 29} \\ \underline{87} \phantom{00} \\ 211 \phantom{00} \\ \underline{201} \phantom{00} \\ 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 31} \\ \underline{53} \phantom{00} \\ 181 \end{array}$$

101 - 3 значное

606

11 - 2 значное

33

$$A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot K, \quad 6 \cdot 101 \cdot K_2 \cdot 3 \cdot 11$$

$K_1 \cdot 2$  - квадрат

( $K=2$  Ответ: (2222; 606; 33); (1888; 606; 33))  
( $K=8$ )

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\begin{cases} x, y \neq 0 \\ x \neq 2 \\ y \neq -2 \end{cases} \quad \frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$x, y > 0 \Rightarrow x+y > 0 \Rightarrow x+y \neq -5$$

$$xy = (x-2)(y+2)$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) - 6xy =$$

$$\cancel{xy} = \cancel{xy} + 2x - 2y - 4$$

$$= 2(x^2 + x^2 - 2x + x^2 - 4x + 2) - 6xy =$$

$$y = x - 2$$

$$x > 2$$

$$= 6x^2 - 12x + 4 - 6(x-2)(x-2) =$$

$$= 6x^2 - 18x + 4 - 6x^2 + 12x + 12 =$$

Ответ: 4

= 4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n$  - человек

$$C_n^4$$

$$C_3^2 = 3 \quad \frac{3!}{1! \cdot 2!}$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \cdot 6 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$$

~~$n!$~~

~~$$\frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot 6 = \frac{(k-2)!(n-k+2)!}{n!}$$~~

~~$$\frac{n!}{4!(n-4)!}$$~~

~~$$\frac{(k-2)!(n-k+2)!}{k!(n-k)!}$$~~

~~$$24 \cdot 6 = \frac{k \cdot (k-1)}{(n-k+2)(n-k+1)}$$~~

~~$$12(n^2 - nk + n - nk + k^2 - 2k + 2n - 2k + 2) =$$~~

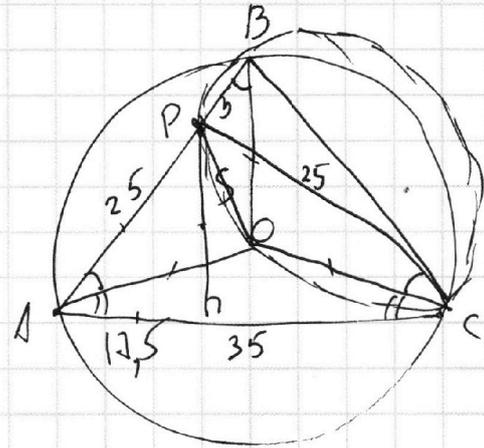
~~$$= (n-2)(n-3)(k-1)k$$~~

~~$$12((n-k)^2 + 3(n-k) + 2) = (n-2)(n-3)k(k-1)$$~~

~~$$1,41 \cdot 5 \approx 7, \dots$$~~

$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \\ x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \geq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$2\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} + 2\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$



$$\sin \angle BAC = \frac{2,5 \cdot \sqrt{51}}{10} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 30 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

