МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = $
$= (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

$A \vdots 1111$

$$\begin{array}{r} \times 101 \\ 11 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$A = \overline{aaaa}$; $1111 = 11 \cdot 101$

$A = a \cdot 11 \cdot 101$; $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$B = \overline{7bc}$ или $B = \overline{b7c}$ или $B = \overline{bc7}$

$C = \overline{1d}$ или $C = \overline{d1}$

$A \cdot B \cdot C = n^2$

$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = n^2 \Rightarrow B \vdots 101$ т.к. C – двузнач. $\Rightarrow$

$\Rightarrow B = 707$

$a \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot C = n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow C \vdots 11 \Rightarrow C = 11$

$a \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7 = n^2 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow A = 7777$

Существует единственная тройка $(A; B; C)$:

$(7777; 707; 11)$

$\boxed{\text{Ответ: } (7777; 707; 11)}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

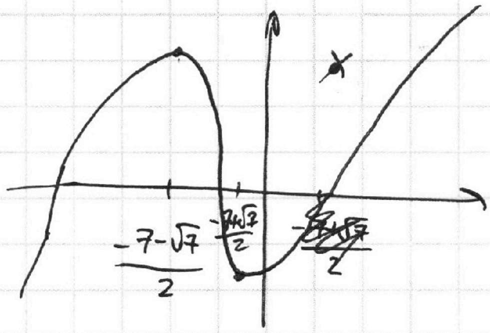
1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$M(x) = 2x^3 + 21x^2 + 63x + 27$

$M(x)$ качественно выглядит так:



НО $x \neq 0;\ y \neq 0;\ x \neq 4;\ y \neq -4$

$x \neq 0;\ x \neq -3;\ x \neq 4;\ x \neq 1$

$M \neq 27;\ M \neq -27;\ M \neq 743;\ M \neq 113$

$49 \cdot 7 = 343$

$16 \cdot 21$: 16, 32, 336

$M(-3) = -54 + \cancel{189} - \cancel{189} + 27 = -27$

$M(4) = \underbrace{\underbrace{128 + 336}_{380} + 252}_{407}... + 27 = 743$

$M(1) = \underbrace{2 + 21}_{23} + \underbrace{63 + 27}_{90} = 113$

Если $y = x - 4$

$M(x) = x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4) = x^3 - (x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 4 + 3 \cdot x \cdot 16 - 64) - 12x^2 + 48x$

$= \cancel{x^3} - \cancel{x^3} + 12\cancel{x^2} - \cancel{48x} + 64 - \cancel{12x^2} + \cancel{48x} = 64$

Т.е. $M \in \mathbb{R} \setminus \{27; -27; 743; 113\}$

$\boxed{\text{Ответ: } M \in \mathbb{R} \setminus \{27; -27; 743; 113\}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{xy}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{y+4}+\frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy}=\frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy}=\frac{y+x+3}{(y+4)(x-4)}$$

$x\neq 0;\ y\neq 0;\ y\neq -4;\ x\neq 4$

$$\left[\begin{array}{l}\cancel{y+x+3=0}\\ \dfrac{(y+x+3)(\cancel{yx}+4x-4y-16-\cancel{xy})}{xy(y+4)(x-4)}=0\end{array}\right.$$

$$\frac{4(y+x+3)(x-y-4)}{xy(y+4)(x-4)}=0$$

$y+x+3=0$ или $x-y-4=0$

Если $y=-x-3$:

$M=x^3-y^3-12xy=x^3+(x+3)^3+12x(x+3)=x^3+x^3+3\cdot3\cdot x^2+3\cdot9\cdot x+27+$
$+12x^2+36x=2x^3+21x^2+63x+27$

$M'=6x^2+42x+63=3(2x^2+14x+21)$

$D=14^2-4\overset{8}{\cdot}2\cdot21=196-168=28$ $\quad x_{12}=\frac{-14\pm2\sqrt7}{4}=\frac{-7\pm\sqrt7}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Подходят все пары действ. чисел, в которых

$x\in\mathbb{R};\ k\in\mathbb{Z},\ \left[\begin{array}{l} y=-x+1+2k \\ y=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2k}{3}\end{array}\right.$

Ответ: все пары $(x; -x+1+2k); (x; \frac{x}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2k}{3}); x\in\mathbb{R}; k\in\mathbb{Z}$.

б) $\arccos\frac{x}{7}-\arcsin\frac{y}{4}>-\frac{\pi}{2}$; ОДЗ неравенства $\begin{cases}-1\le\frac{x}{7}\le 1\\ -1\le\frac{y}{4}\le 1\end{cases}$

$\arccos\in[0;\pi]$; $\arcsin\frac{y}{4}\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$\arccos a-\arcsin b\in[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ на ОДЗ.

т.е. единственный случай невыполнения неравенства

$\arccos\frac{x}{7}-\arcsin\frac{y}{4}=-\frac{\pi}{2}$

а точнее:

$\begin{cases}\arccos\frac{x}{7}=0\\ \arcsin\frac{y}{4}=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{x}{7}=1\\ \frac{y}{4}=1\end{cases}$

т.е. подходят все точки-решения в целых числах из п.а, у которых $x\in[-7;7]$; $y\in[-4;4]$ и не подходит точка $(7;4)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

а) $(\sin\pi y - \sin\pi x)\sin\pi y = (\cos\pi y + \cos\pi x)\cos\pi y$

$$\cancel{2}\sin\frac{\pi y-\pi x}{2}\cos\frac{\pi y+\pi x}{2}\sin\pi y = \cancel{2}\cos\frac{\pi y+\pi x}{2}\cos\frac{\pi y-\pi x}{2}\cos\pi y$$

$$\cancel{\cos\frac{\pi y+\pi x}{2}\left(\sin\pi y\cos\frac{\pi y-\pi x}{2}\right.}$$

$$\cos\frac{\pi y+\pi x}{2}\left(\cos\pi y\cos\frac{\pi y-\pi x}{2} - \sin\pi y\sin\frac{\pi y-\pi x}{2}\right) = 0$$

$$\cos\frac{\pi y+\pi x}{2}\cdot\cos\left(\pi y+\frac{\pi y-\pi x}{2}\right) = 0$$

$$\cos\frac{\pi y+\pi x}{2}\cos\left(\frac{3\pi y-\pi x}{2}\right) = 0$$

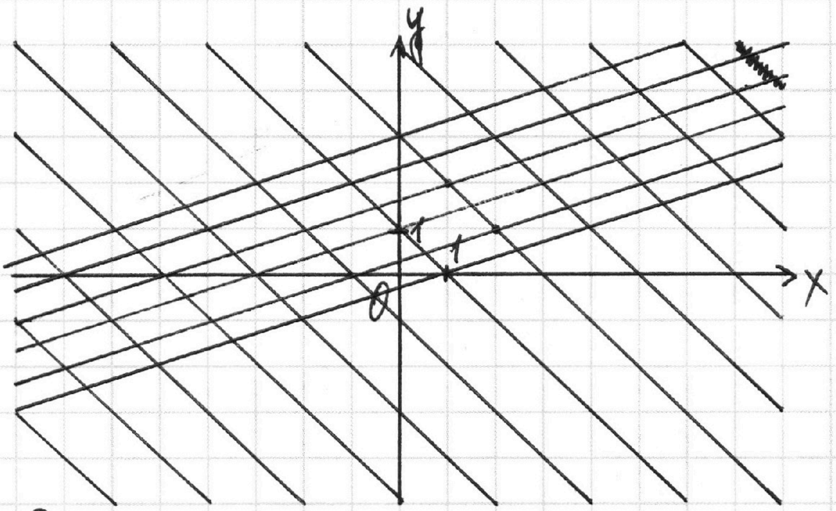
$$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{\pi y+\pi x}{2} = 0\\ \cos\frac{3\pi y-\pi x}{2} = 0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\cancel{\pi}y+\cancel{\pi}x}{2} = \frac{\cancel{\pi}}{2}+\cancel{\pi}k;\ k\in\mathbb{Z}\\ \frac{3\cancel{\pi}y-\cancel{\pi}x}{2} = \frac{\cancel{\pi}}{2}+\cancel{\pi}k;\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

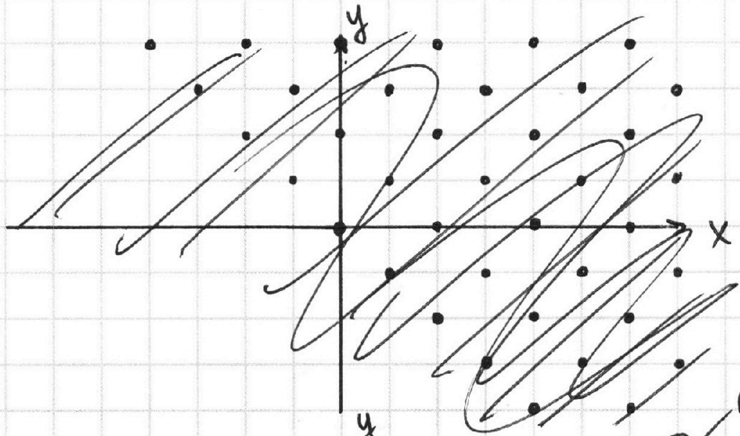
$$\left[\begin{array}{l}y+x = 1+2k;\ k\in\mathbb{Z}\\ 3y-x = 1+2k;\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

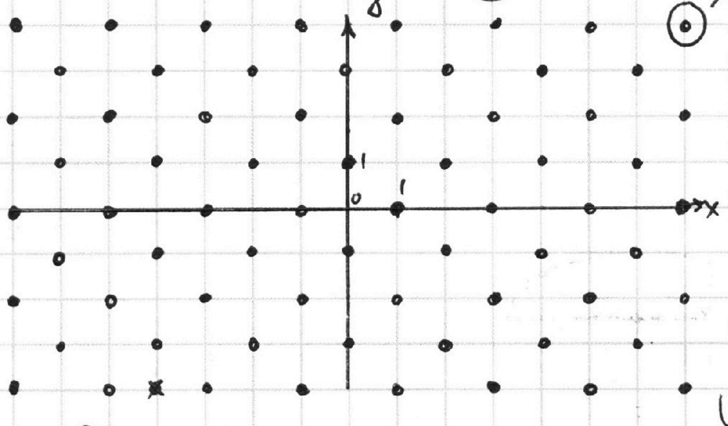
$$\left[\begin{array}{l}y = -x+1+2k;\ k\in\mathbb{Z}\\ y = \frac{x}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2k}{3};\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Графически решения н.а выглядят так:



В целых числах:





не подходит

68 точек удовлетворяют

ОДЗ, одна точка не удовлетворяет неравенству, т.е

подходит 67 точек.

Ответ: 67 пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4

Шанс в начале – $\frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$

Шанс в конце – $\frac{x}{N} \cdot \frac{(x-1)}{N-1}$

$$\frac{x\cdot(x-1)}{12} = 11$$

$x^2 - x = 132$

$x^2 - x - 132 = 0$

$D = 1 + \underbrace{4\cdot 132}_{528} = 529 = 23^2$

$$x_{12} = \frac{1 \pm 23}{2}$$

$x_1 = 12;\ x_2 = -11.$

$x > 0 \Rightarrow x = 12$

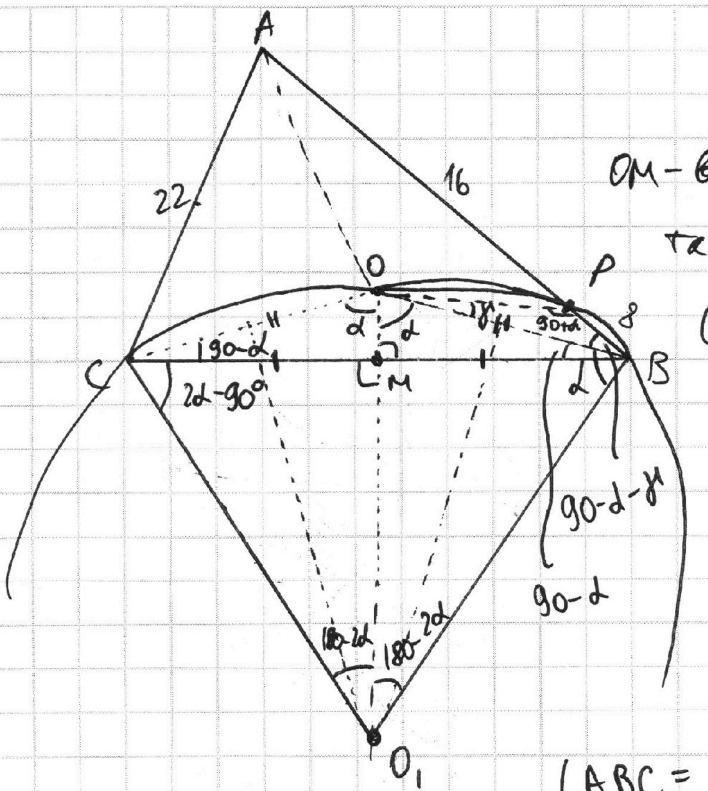
$\boxed{\text{Ответ: в конце месяца было выделено 12 билетов.}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



OM – высота и медиана в COB – р/б

O; M; O_1 лежат на одной прямой

COPB – вписаный

$\angle OPB = 180° - (90° - \alpha) = 90 + \alpha$

$\angle ABC = 90 - \alpha + 90 - \alpha - \gamma = 180 - 2\alpha - \gamma$

$$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = 2R_1$$

$$\frac{R}{\sin(90-\alpha)} = 2R_1$$

$$\frac{22}{\sin(180-2\alpha-\gamma)} = 2R; \quad \frac{22}{\sin(2\alpha+\gamma)} = 2R$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 6

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le 36 \\ (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \le 0 \end{cases}$$

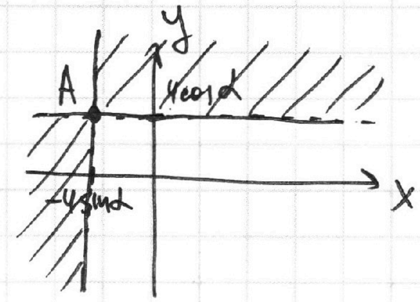
Первое уравнение соответствует всем точкам внутри и на границе окружности с радиусом 6 и с центром в (0;0)

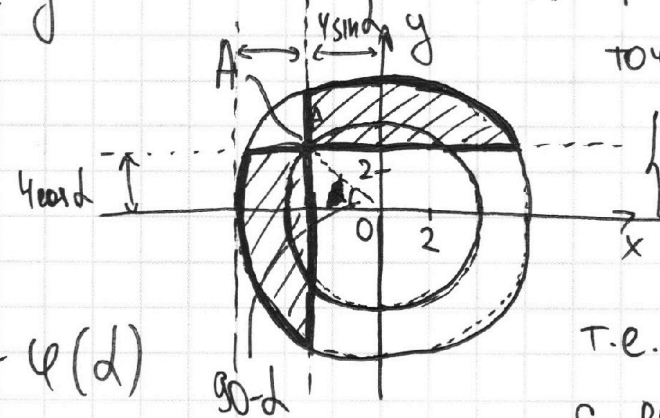
Рассмотрим второе ур-е:

$(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha \le 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+4\sin\alpha \ge 0 \\ y-4\cos\alpha \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+4\sin\alpha \le 0 \\ y-4\cos\alpha \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -4\sin\alpha \\ y \ge 4\cos\alpha \end{cases} \\ \begin{cases} x \le -4\sin\alpha \\ y \ge 4\cos\alpha \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$





точка A удовлетворяет условию

$\begin{cases} x_A = -4\sin\alpha \\ y_A = 4\cos\alpha \end{cases}$

$x_A^2 + y_A^2 = 16$

т.е. лежит на окружности с радиусом 4 с центром в (0;0)

//// – $\varphi(\alpha)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$P_{max}(\varphi(\alpha)) = 6\pi + 2\sqrt{36 - 16 \cdot \frac{1}{2}} + 2\sqrt{36-16\cdot\frac{1}{2}} =$$

$$= 6\pi + 4\sqrt{28} = 6\pi + 8\sqrt{7}$$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$, т.к картинка симметрична относительно осей и центра.

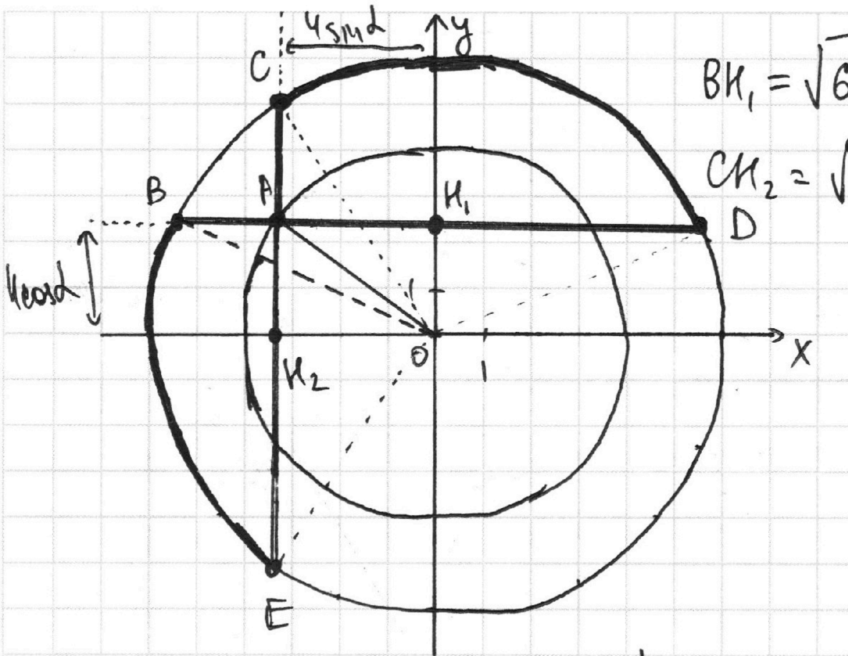
Ответ: $P_{max} = 6\pi + 8\sqrt{7}$; при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$BH_1 = \sqrt{6^2 - (4\cos\alpha)^2}$$

$$CH_2 = \sqrt{6^2 - (4\sin\alpha)^2}$$

дуга $CD = 6\cdot\left(\arcsin\left(\frac{4\sin\alpha}{6}\right) + \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{4\cos\alpha}{6}\right)\right)$

дуга $BE = 6\cdot\left(\arcsin\left(\frac{4\cos\alpha}{6}\right) + \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{4\sin\alpha}{6}\right)\right)$

$BE + CD = 6\cdot\pi$

$P(\varphi(\alpha)) = 2BH_1 + 2CH_2 + CD + BE =$

$= 2\sqrt{36-16\cos^2\alpha} + 2\sqrt{36-16\sin^2\alpha} + 6\cdot\pi$

$$\frac{dP}{d\alpha} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{36-16\cos^2\alpha}}\cdot(+32\cos\alpha) + \cancel{2}\cdot\frac{(+32\sin\alpha)}{\cancel{2}\sqrt{36-16\sin^2\alpha}} = 0$$

$\cancel{\frac{\cos\alpha}{\sqrt{36-16\cos^2\alpha}}}$

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{9-4\cos^2\alpha}} + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{9-4\sin^2\alpha}} = 0$$

$$\cos\alpha\sqrt{9-4\sin^2\alpha} = -\sin\alpha\sqrt{9-4\cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha(9-4\sin^2\alpha) = \sin^2\alpha(9-4\cos^2\alpha)$$

$$9\cos^2\alpha = 9\sin^2\alpha$$

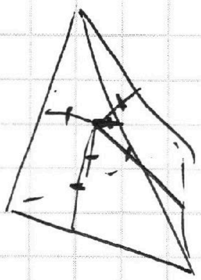
$$\sin\alpha = \cos\alpha \Rightarrow, \alpha = \frac{\pi}{4}$$

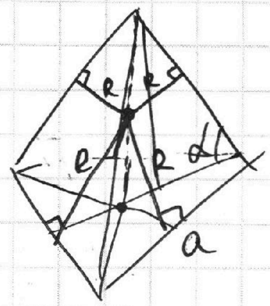
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒ СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

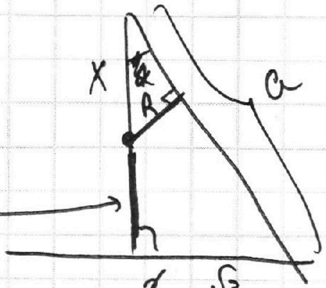
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№7





$\sqrt{R^2-\left(\frac{1}{3}\frac{a\sqrt3}{2}\right)^2} \longrightarrow$



$\frac{2}{3}\cdot a\frac{\sqrt3}{2}$

$$\frac{R}{x}=\frac{\cancel{a}\sqrt3}{3\cancel{a}}$$

$$\cos\alpha=\frac{a\sqrt3}{3\cdot a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

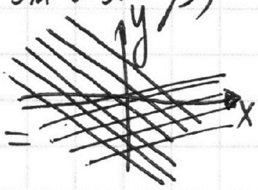
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1\mp\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$= 2\cdot\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha+\beta)}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha-\beta)}{2}} = \sqrt{1 - \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

$$= \sqrt{1 - \cancel{\cos^2\alpha\cos^2\beta} + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \cancel{\cos^2\alpha\cos^2\beta} + \sin^2\alpha\sin^2\beta - (\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta)\cdot(\cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta)}$$

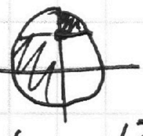
$$= \sqrt{1 + 2\sin^2\alpha\sin^2\beta - (\cos^4\alpha\cos^4\beta - \cancel{\ldots} - \sin^4\alpha\sin^4\beta)}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$



$$= \cancel{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cancel{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\boxed{= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$



$\sqrt{28}$ $2\sqrt{2}$ $36-8=$

$$\cos\alpha + \cos\beta = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cancel{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cancel{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\boxed{= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\in\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\frac{x}{7}\in[-1;1]; \quad \frac{y}{4}\in[-1;1]$$

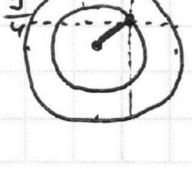
$\sin x$ возрастает при $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\arccos\in[0;\pi]$

$\arcsin\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

все кроме

$\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4}$



$$\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

СТРАНИЦА __ ИЗ __

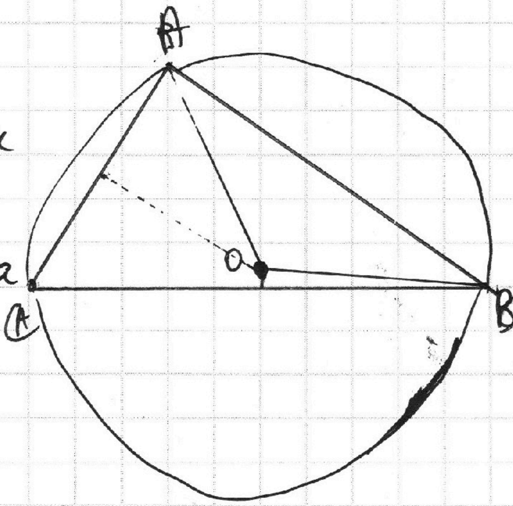
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

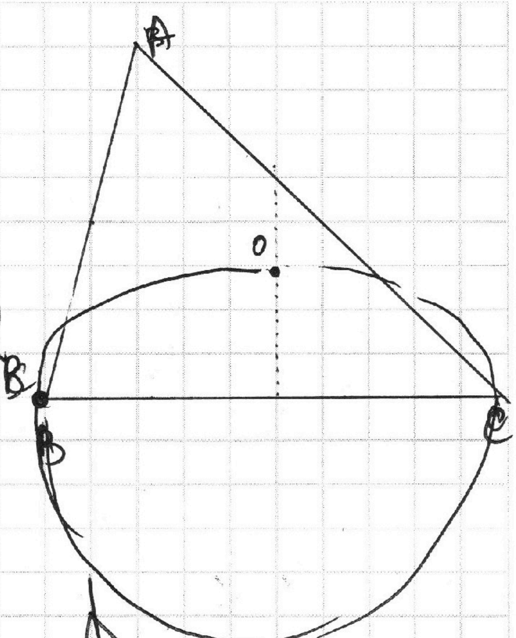
№5

10 человек

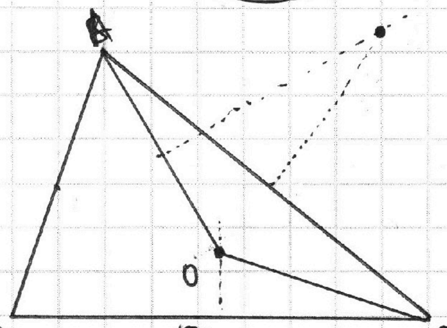
↓

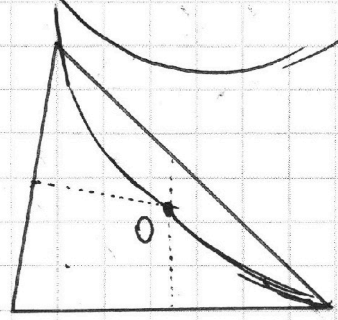
4 билета





C





$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 46 \end{array}$$

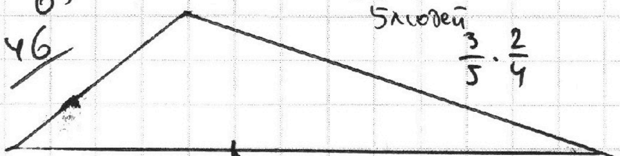
C

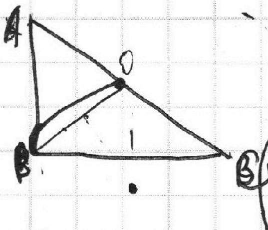
B

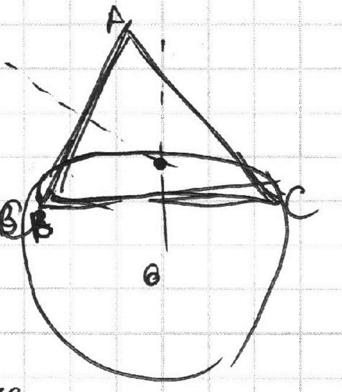
3 билета

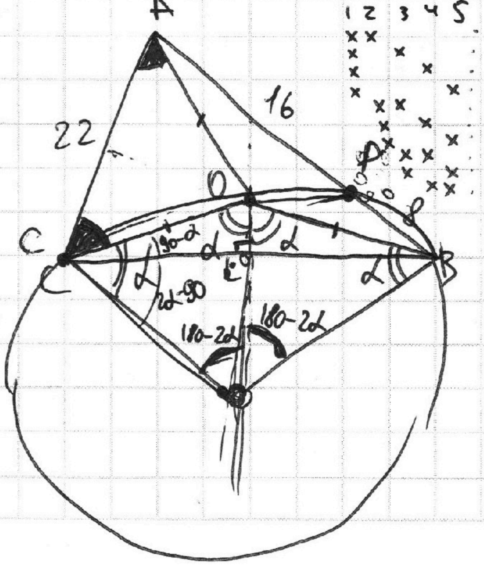
5 людей

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$









1 2 3 4 5

3 человека

2 билета

4 человека

$\frac{2}{3}$

$\frac{n}{N}$

$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$