



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha) (y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $A = \overline{a a a a} = a(10^3 + 10^2 + 10 + 1) = a \cdot 1111 = 11 \cdot 101 \cdot a$,
 (11 и 101 - простые числа) $\begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ a \leq 9 \end{cases}$

Т.к. $a \leq 9$, то $a \neq 11$, $a \neq 101$, a ~~просто~~ $A:11$ и $A:101$, то

Т.к. ABC - полный квадрат, то $ABC:11^2$
 $ABC:101^2$

1. $\left. \begin{matrix} ABC:101^2 \\ A:101 \\ A \neq 101^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} BC:101 \\ C < 100 \Rightarrow C \neq 101 \end{matrix} \Rightarrow B:101$

Трёхзначные числа, делящиеся на 101 имеют вид $\overline{b o b}$
 Но т.к. в записи B должна быть 2, то $b = 2$. $\begin{cases} b \in \mathbb{N} \\ b \leq 9 \end{cases}$

$B = 202$

2. $\left. \begin{matrix} ABC:11^2 \\ A, B \neq 11^2 \\ B \neq 11 \\ A:11 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} C:11 \\ \text{Но т.к. в записи } C \text{ есть } 3, \\ C = 33. \end{matrix}$ Двухзначные числа, делящиеся на 11 имеют вид $\overline{c c}$. $\begin{cases} c \in \mathbb{N} \\ c \leq 9 \end{cases}$

$A \cdot B \cdot C = a \cdot 2 \cdot 101^2 \cdot 3 \cdot 11^2$ - квадрат, а значит $\begin{matrix} a:2 \\ a:3 \end{matrix}$, а

~~также~~ значит $a:6$, такие числа это 0, 6, 12, ...
 т.к. $a \leq 9$, $a \in \mathbb{N}$, то $a = 6$.

Ответ: (6666, 202, 33)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓2.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

Если $x \neq 1$ и $y \neq -1$, получим

$$(1) \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{xy}, \text{ т.к. } x, y > 0, \text{ то } x+y+2 > 0, \text{ а}$$

значит $(1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(y+1)} = \frac{1}{xy} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = \overset{1}{(x-y)}(x^2 + xy + y^2) - 3xy = x^2 - 2xy + y^2 = \overset{1}{(x-y)^2} = 1^2 = 1.$$

Ответ: 1



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \quad | : 2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) \sin \pi x = \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \cdot \cos \pi x$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2}(x-y) = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cdot \sin \pi x - \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \cos \pi x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}(x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad | : \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad | : \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - 1 - 2k \\ y = -3x + 1 + 2n \end{cases} \quad (*)$$

$$b) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2} \quad \arccos \frac{x}{5} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Обз: } -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$\arccos \frac{y}{4} < \pi + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{5}\right)$$

$$\arccos \frac{y}{4} < \pi + \arccos \frac{x}{5} \quad (1) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 + 2k \\ x = \frac{2n + 1}{3} - y \end{cases}$$

т.к. $\arccos \frac{y}{4} \in [0; \pi]$, то (1) выполн всегда, кроме (когда ф-ция определена)

$$\begin{cases} \arccos \frac{y}{4} = \pi \\ \arccos \frac{x}{5} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = 5 \end{cases} \quad (2) \quad \text{Заметим, что } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 + 2k \\ x = \frac{2n + 1}{3} - y \end{cases}$$

Ну а теперь проверим все значения y и x :
(y -тетин или нет) или y на ± 2 , то киле не изменился

~~y=1~~ $x = \{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5\}$, если $y: 2$ (таких y всего 5)

~~y=3~~ $x = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$, если $y \neq 2$ (таких y всего 4)

~~y=2~~ ~~x=5, 3, 1, 0, -1, -3, -5~~

~~y=1~~ ~~x=5, 3, 1, 0, -1, -3, -5~~ Значит всего пар (x, y)

~~y=0~~ ~~x=5, 3, 1, 0, -1, -3, -5~~

~~y=-1~~ ~~x=5, 3, 1, 0, -1, -3, -5~~

~~y=-2~~ ~~x=5, 3, 1, 0, -1, -3, -5~~

~~y=-3~~ ~~x=5, 3, 1, 0, -1, -3, -5~~

~~y=-4~~ ~~x=5, 3, 1, 0, -1, -3, -5~~

~~y=-5~~ ~~x=5, 3, 1, 0, -1, -3, -5~~

~~y=-6~~ ~~x=5, 3, 1, 0, -1, -3, -5~~

~~y=-7~~ ~~x=5, 3, 1, 0, -1, -3, -5~~

$$5 \cdot 7 + 4 \cdot 5 = 35 + 20 = 55.$$

Итого слугот (2) $55 - 1 = 54.$

Ответ: $a) \begin{cases} x = x - 1 - 2k \\ y = -3x + 1 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$
 $b) 54.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓4

Пусть всего билетов K , а одинадцатиклассников,
 Тогда $K > 4$, $n \geq 2$, $n \geq K$, ~~$n \geq 4$~~

~~Всего вариантов раздать билеты C_n^K~~

Раздать так, чтобы билеты достались и Пете, и Вове

C_{n-2}^{K-2} (двум досталось 2 билета, кол-во бил. $\downarrow$ на 2)
 кол-во уч. $\downarrow$ на 2)

~~Вероятность~~ $\frac{C_{n-2}^{K-2}}{C_n^K} = 2,5 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$ (X)
 в конце в начале месяца $\cdot 2,5$

Учитывая $C_n^K = \frac{n!}{(n-K)! \cdot K!}$, (X) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(n-1)K}{(n-1)n} = 2,5 \cdot \frac{3 \cdot 4}{(n-1)n} \mid \cdot (n-1)n > 0, \text{ т.к. } n \geq 2.$

$K^2 - K = 30$

$K^2 - K - 30 = 0$

$K_1 = 6$

$K_2 = -5 < 0$, -не удовл. усл $K > 4$

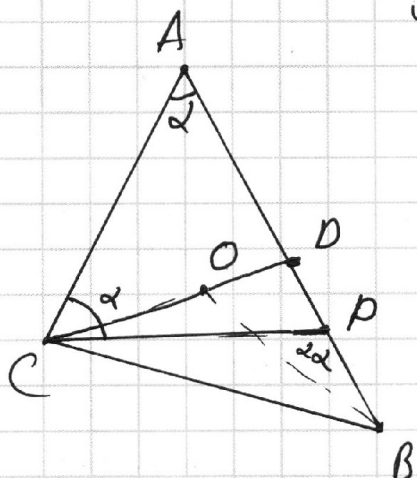
Ответ: 6



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№5

Пусть $\angle A = \alpha$, тогда

$\angle BOC = 2\alpha$ (центральный)

$\angle BOC = \angle BPC = 2\alpha$

(они опираются на одну дугу)

$\angle BPC = \angle A + \angle ACO \Rightarrow$ (внешний для $\triangle APC$)

$2\alpha'' \quad \alpha'' \Rightarrow \angle ACO = \alpha$.

Пусть $D = OC \cap AB$.

$\triangle APC$ - P - $\angle$ по двум углам.

$$PC = AP = \frac{15}{2}, \quad AC = 9, \quad p_{APC} = \frac{15+9}{2} = \frac{24}{2} = 12 \quad (\text{полупериметр } \triangle APC)$$

По формуле Герона $S_{APC} = 2 \cdot 3 \cdot \left(12 - \frac{15}{2}\right) = 3 \cdot (24 - 15) = 27$.

Найдем $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$. $\cos \alpha = \frac{AC}{2 \cdot AP} = \frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 15} = \frac{3}{5} = 0,6$.
(из т. косинусов для $\triangle APC$)

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8$$

(т.к. $\alpha \in [0; \pi]$, то $\sin \alpha \geq 0$)

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,96$$

$$S_{BPC} = \frac{1}{2} \cdot PB \cdot PC \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot 0,96 \cdot 5 \cdot \frac{15}{2} = 18$$

$$S_{ABC} = S_{BPC} + S_{APC} = 18 + 27 = 45$$

Ответ: 45



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

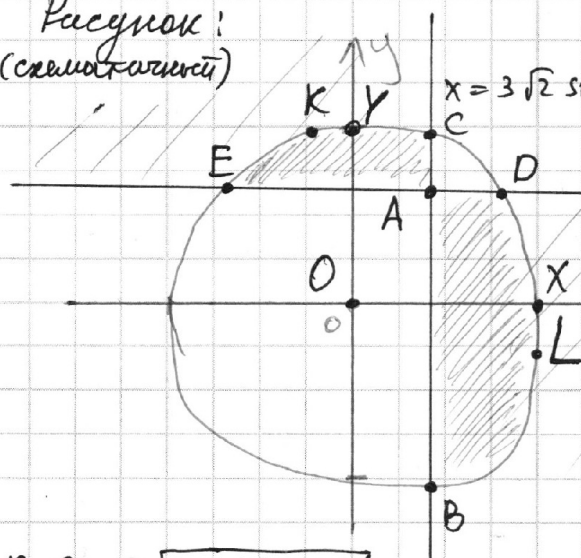
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

2-е ур-ние задает окружность с центром в (0,0) и $r=5$.

Первое делит плоскость на 4 части, 2 из к-х (по методу интервалов) нам подходят.

Рисунок:
(схематический)



Т.к. $\cos\alpha$ и $\sin\alpha \in [-1; 1]$

То области значений
у ур-ний

$$y = 3\sqrt{2} \cos\alpha \quad (1) \text{ и } (2)$$

$$[-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$$

$$3\sqrt{2} < 5 \uparrow^2 \Rightarrow \\ 18 < 25$$

$\Rightarrow$ прямые (1) и (2)

всегда пересекают
окружность, а значит
рис. выглядит именно так.

(при этом, крестиком
показано, что $\angle DOB = \alpha$
и в силу симметрии
аналогично
для $\angle COE$ можно
рассчитать аналогично
только $\alpha \in [0; \pi/2]$)

$$BC = 2\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha}$$

$$DE = 2\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha}$$

(дуга)

$$P = BC + DE + \text{дуга } EKC + \text{дуга } DLB$$

$$\text{Найдём } \angle DOB = \angle DOx + \angle xOB$$

$$\arcsin\left(\frac{3\sqrt{2}\cos\alpha}{5}\right) + \arccos\left(\frac{3\sqrt{2}\sin\alpha}{5}\right)$$

Аналогично

$$\angle COE = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{2}\sin\alpha}{5}\right) + \arccos\left(\frac{3\sqrt{2}\cos\alpha}{5}\right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☒ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P = 2\sqrt{25-18\cos^2\alpha} + 2\sqrt{25-18\sin^2\alpha} + \left(\begin{array}{l} \arcsin(\frac{3\sqrt{2}}{5}\cos\alpha) + \\ \arcsin(\frac{3\sqrt{2}}{5}\sin\alpha) + \\ \arccos(\frac{3\sqrt{2}}{5}\sin\alpha) + \\ \arccos(\frac{3\sqrt{2}}{5}\cos\alpha) \end{array} \right) \cdot 5$$

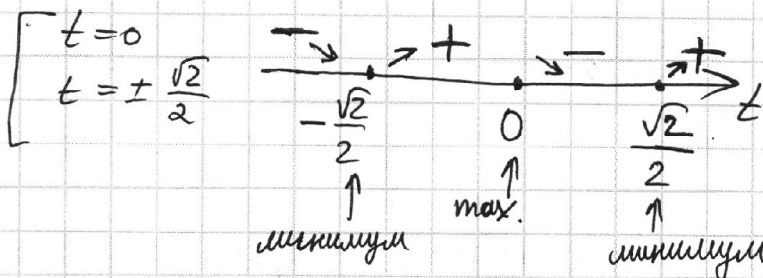
Пусть $\cos\alpha = t$, ~~то~~ $t \in [-1; 1]$.

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{-36t}{\sqrt{25-18t^2}} - \frac{36t}{\sqrt{25-18t^2}} + Q(t) \quad (*)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Т.к. } \frac{d\arcsin(f(t))}{dt} = \frac{f'(t)}{\sqrt{1-f^2(t)}} \\ \frac{d\arccos(f(t))}{dt} = -\frac{f'(t)}{\sqrt{1-f^2(t)}} \end{array} \right\} + = 0 \Rightarrow Q(t) = 0.$$

Найдём нули производной (*)

$$\cancel{36t} \cdot \frac{36t}{\sqrt{25-18t^2}} = \frac{36t}{\sqrt{25-18t^2}}$$



$$\cos\alpha = 0.$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

А значение равно

$$M = P(0) = 2 \cdot 5 + 2\sqrt{7} + 5\left(0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 10 + 2\sqrt{7} + 5\pi$$

Ответ: $M = 10 + 2\sqrt{7} + 5\pi$, при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

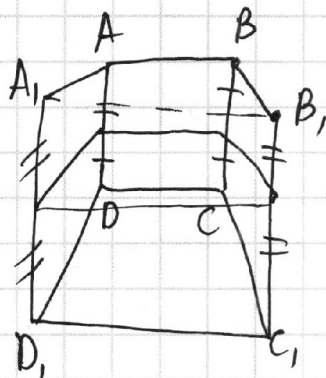


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

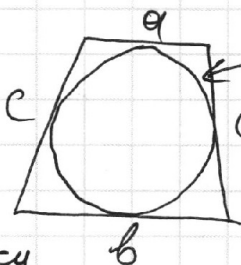


№7

Пусть ~~эта пирамида~~ $ABCD, A_1B_1C_1D_1$,

1) Пусть основание пирамиды n -угольником $n \geq 2$. (a - ст. в. гр. b - ст. ниж. гр.)

Тогда, если рассмотреть грань (боковую):



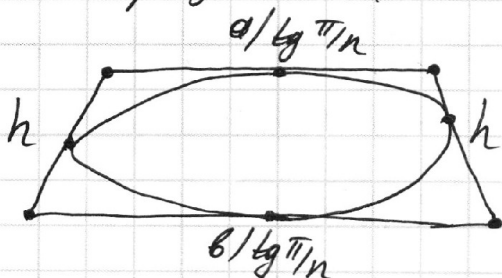
c - радиус боковой грани. c - радиус вписанной окружности.

$$\Rightarrow a + b = 2c. \quad (1)$$

(*) Т.к. $n \geq 2$, то расстояние между серединами в пр-м мн-нике это диаметр вписанной окружности.

Соединим середины двух противоположных сторон оснований и рассмотрим плоскость через нее (*) (такая описанная трапеция)

h - длина апофемы.



$$\frac{a+b}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{2h}} = 2h \quad (2)$$

из (1) и (2) $\frac{c}{h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{h} \geq 1$ (т.к. h - ~~высота~~ - расстояние между прямыми, а c - длина секущей $\Rightarrow c \geq h$)

$$\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{n} \Rightarrow n \leq 4.$$

$n \leq 4 \Rightarrow$ для $n \geq 2$ наша пирамида строго $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ и

при этом $c = h \Rightarrow$ это параллелепипед

в него вписана сфера, то это куб. $S_D = 4a^2$ $S_n = a^2$ $\frac{S_D}{S_n} = 4$ $\Rightarrow$ куб, а т.к.

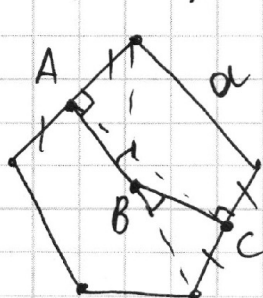


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) п.2. Возьмем вершину и ей противоположную сторону, ~~сделаем~~ возьмем одну из вершин при той стороне и сделаем поворот на $\frac{\pi}{n}$ вокруг центра правильного многоугольника:



(пример для $n=5$)

По аналогии с п.1.

$$a + b = 2c$$

$$AC + A_1C_1 = 2h, \quad AB = BC = \frac{a}{2 \tan \frac{\pi}{n}}$$

Расстояние между любыми двумя ~~из~~ серединами сторон в правильном n -ике при $n \geq 5$ (кроме соседних сторон), меньше стороны этого многоугольника

$$\angle ABC = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} = \pi \frac{n-1}{n}$$

$$AR = \sqrt{\frac{a^2}{2 \tan^2 \frac{\pi}{n}} - \frac{a^2}{2 \tan^2 \frac{\pi}{n}} \cos(\pi \frac{n-1}{n})} = \frac{a}{\sqrt{2} \tan \frac{\pi}{n}} \sqrt{1 - \cos(\pi \frac{n-1}{n})}$$

(По т. косинусов)

$$\left(\begin{array}{l} S_{\Delta} = 3 \cdot 4r^2 \sqrt{3} \\ S_{\square} = 3r^2 \sqrt{3} \\ \frac{S_{\Delta}}{S_{\square}} = 4 \end{array} \right)$$

Для ~~такой~~ $n=3$ ответ очевидно 4

Ответ: 4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{def} \begin{cases} d=2 \\ e=2 \\ f=2 \end{cases}$$

$$C = \overline{bce} \begin{cases} b=3 \\ c=3 \end{cases}$$

$$11, 101, 2, a$$

ABC — квадрат.

$$A: 101 \text{ 1 раз}$$

$$e: 101$$

⇒

$$B: 101$$

$$A = a \cdot 1111 =$$

$$= a \cdot 11 \cdot 101$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{)1111} \\ \underline{101} \\ 101 \\ \underline{101} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \overline{)202} \\ \underline{101} \\ 101 \\ \underline{101} \\ 0 \end{array}$$

$$B = 202 \cdot 11$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \begin{cases} C: 11 \\ C = 33 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+2+y}{xy} = \frac{x+2+y}{(x-1)(y+1)}$$

$$(x-1)(y+1) = xy$$

$$x+y-1=0$$

$$\boxed{x+y=1}$$

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9

$$x^3 - y^3 - 3xy$$

$$(x^2 + xy + y^2) - 3xy = (x-y)^2$$

$$(\sin(\pi x) + \sin(\pi y)) \sin(\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(\pi y)) \cos(\pi x)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta \end{cases}$$

$$\sin(\dots) + \sin(\dots) = 2 \sin\alpha \cos\beta$$

$$\alpha+\beta=A$$

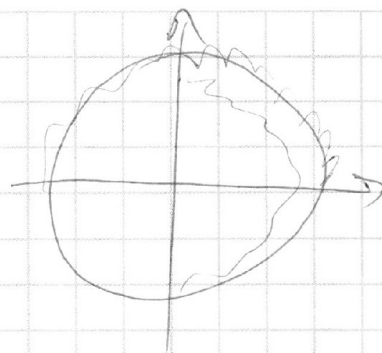
$$\alpha-\beta=B$$

$$\alpha = \frac{A+B}{2}$$

$$\beta = \frac{A-B}{2}$$

$$\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

arccos



$$\arccos \in [0; \pi]$$

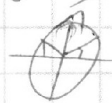
$$\arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\sin \pi x = \sin \frac{\pi}{2}(x+y) \cdot \cos \frac{\pi}{2}(x-y) = \cos \pi x \cdot \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \cdot 2$$

$$\cos \frac{\pi}{2}(x-y) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2}(x-y) \right) = \cos \left(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2}(x-y) \right) + \cos \left(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y \right)$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \end{cases}$$



$$y: 2, x: 2$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x \right) = \sin(\arccos x) = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \right)$$

$$\pi x - \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y = \dots$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$X - \text{целое} \Rightarrow y - \text{целое}$$

$$\frac{\pi}{2}(x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad | : \frac{\pi}{2}$$

$$x-y = 1 + 2k$$

$$-4 \leq y \leq 4$$

$$\pi - \arccos x \quad y = x - 1 - 2k$$

$$\cos(\arccos \frac{y}{4}) = \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{5} \right) \quad 3x+y = 1+2n$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$-y = 5 - 1 - 2k$$

$$-2k = -8$$

$$k = 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-4 = x - 1 - 2k$$

$$x = -3 + 2k$$

$$-5, k = -1$$

$$-3$$

$$-1$$

$$1$$

$$3$$

$$5$$

$$(k-6)/(k+5) =$$

$$= k^2 - k - 30$$

$$5+2n$$

$$\frac{1}{\sqrt{36}} + \frac{36}{5} < 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{36}} + \frac{36}{5} < 0$$

$$-4 = -3x + 1 + 2n$$

$$-5 - 2n = -3x$$

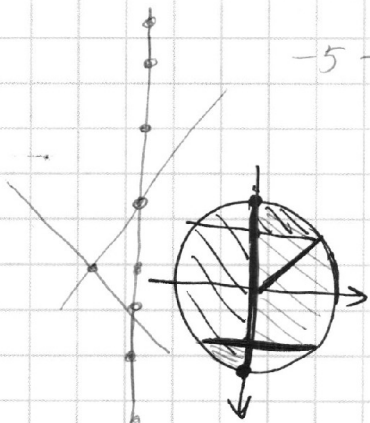
$$x = \frac{5+2n}{3}$$

$$t \left(\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$5, 3, 1, -1, -3, -5$$

$$x = \frac{4+2n}{3} =$$

$$= 2 \frac{2+n}{3}$$



$$-3 = x - 1 - 2k$$

$$x = -2 + 2k$$

$$\beta = \arctg \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \arctg \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$x = -1 + 2k$$

$$x = \frac{y-1-2n}{-3} = \frac{2n+1+y}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} - 2 \sqrt{2} \sqrt{5}$$

$$9 \cdot 2 \sqrt{25}$$

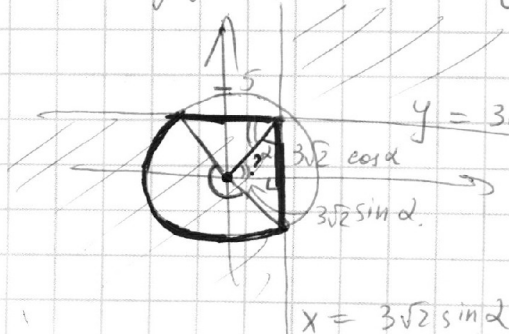
$$18 < 25$$

Пусть вышек

$$k > 4, \text{ один кол. } n \geq 2$$

$$P(\text{получить два вышка}) = \frac{C_{n+2}^{k+2}}{C_n^k}$$

$$\frac{(k-1)k}{n-2 \cdot k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{(k-2)! \cdot (n-k)! \cdot n!}{(n-1)k}$$



$$y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$y \text{ от } -3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{(3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2} < 5$$

$$\sqrt{36} < 5$$

$$7 < 25$$

$$\sin \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = 1$$

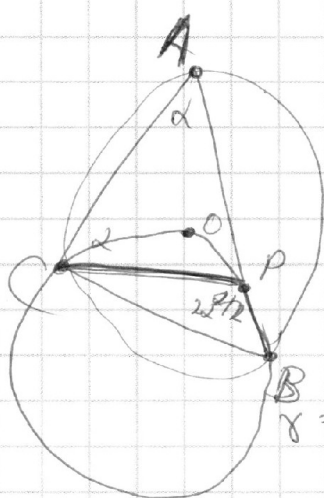


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\arcsin' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos(0) = 15$$

(21)

$$AP = \frac{15}{2}$$

$$BP = 5$$

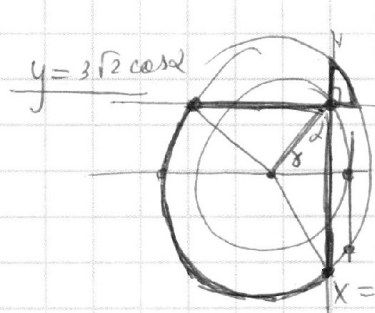
$$AC = 9$$

$$\frac{AB \cdot C}{4R} = S$$

$$25 - 18 + 18 \cos^2 \alpha = 7 + 18 \cos^2 \alpha$$

$$\sqrt{12 \cdot 3 \cdot (12 - \frac{15}{2})^2} =$$

$$\arcsin(0)$$



$$y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$25 - 18 \cos^2 \alpha = 24$$

$$= 7 + 18 \cos^2 \alpha$$

$$18 = 36 \cos^2 \alpha$$

$$x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x^2 + 18 \cos^2 \alpha = 25$$

$$x = -\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}$$

$$y = -\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$$

$$\{3\sqrt{2} \sin \alpha, 3\sqrt{2} \cos \alpha\}$$

$$\{3\sqrt{2} \sin \alpha, 3\sqrt{2} \cos \alpha\}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{5} \cos \alpha \left(\sqrt{1 - \frac{18}{25} \cos^2 \alpha} + \sqrt{1 - \frac{18}{25} \sin^2 \alpha} \right)$$

$$\arccos \frac{6\sqrt{2}}{5} \cos \alpha \sqrt{1 - \frac{18}{25} \cos^2 \alpha}$$

$$+ \arccos \left(\frac{6\sqrt{2}}{5} \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{18}{25} \sin^2 \alpha} \right)$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot (12 - \frac{15}{2}) = \pi$$

$$= \frac{120 \cdot 15}{100} = 18$$

$$= \frac{2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3}{10} = 18$$

$$= \frac{15 \cdot 5}{2} = 37.5$$

$$= \frac{15 \cdot 5}{4} = 18.75$$

$$= \frac{15 \cdot 5}{4} = 18.75$$

$$= \frac{15 \cdot 5}{4} = 18.75$$

$$= \frac{15 \cdot 5}{4} = 18.75$$

$$= \frac{15 \cdot 5}{4} = 18.75$$

$$= \frac{15 \cdot 5}{4} = 18.75$$

$$= \frac{15 \cdot 5}{4} = 18.75$$

$$= \frac{15 \cdot 5}{4} = 18.75$$

$$= \frac{15 \cdot 5}{4} = 18.75$$

$$= \frac{15 \cdot 5}{4} = 18.75$$

$$= \frac{15 \cdot 5}{4} = 18.75$$

$$= \frac{15 \cdot 5}{4} = 18.75$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

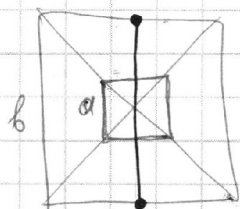
$$\frac{S_D}{S_n} =$$

$$= \frac{S_1}{S_n \cdot \cos \alpha}$$

$$= \frac{S_n - S_B}{S_n \cdot \cos \alpha} =$$

$$= \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{S_B}{S_n \cdot \cos \alpha}$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right)$$



$$S_D = \frac{a+b}{2} \cdot c$$

$$\frac{4 S_D}{S_n} = ? \cdot b$$

n-угольник

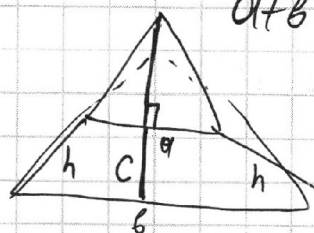
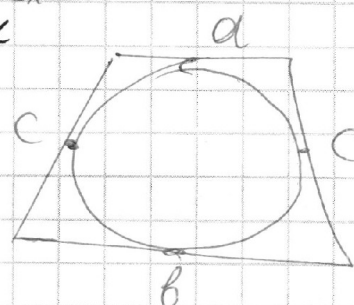
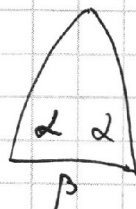
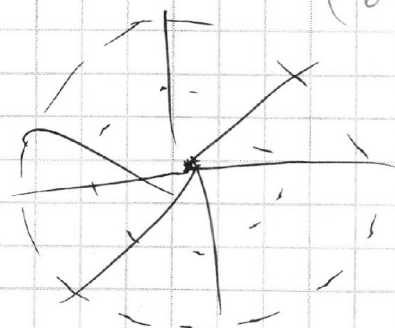
$$\frac{2(a+b)c}{b^2} =$$

$$= \frac{(a+b)^2}{b^2} =$$

$$\left(\frac{a}{b} + 1 \right)^2$$

$$a+b=2c$$

$$a+b=2h$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\chi_1 = \arcsin\left(\sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \cos 2\right)^2}\right)$
 $x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$
 $y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$
 $d_1 = 2\sqrt{25 - 18 \cos^2 2}$
 $d_2 = 2\sqrt{25 - 18 \sin^2 2}$
 $\sqrt{25 - 18 \sin^2 2}$
 $\frac{2}{2\pi} \cdot 2\pi r$
 $\sin \beta = \sqrt{1 - x^2}$
 $x = \cos \beta$
 $\arcsin(\alpha) + \arcsin(\beta) = \gamma = ?$
 $\sin \gamma = \alpha \cdot \cos(\arcsin(\beta)) + \beta \cdot \cos(\arcsin(\alpha)) = \alpha \cdot \sqrt{1 - \beta^2} + \beta \cdot \sqrt{1 - \alpha^2}$
 $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
 $\arccos(\alpha) + \arccos(\beta) = \gamma$
 $\cos \gamma = \alpha \cdot \beta - \sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{1 - \beta^2}$
 $\arcsin(\alpha) + \arccos(\beta) = \gamma$
 $\cos \gamma = \beta \cdot \sqrt{1 - \alpha^2} + \alpha \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$
 $\frac{5}{2\pi r}$
 $\frac{5}{10\pi}$
 $a = \frac{3\sqrt{2}}{5}$
 $b =$
 $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
 $\sqrt{25 - 18} = \sqrt{7}$

$d_1 + d_2 + y_1 + y_2$
 $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$
 $\gamma \in [0; \frac{\pi}{2}]$
 $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$
 $y = \alpha + \beta$
 $2 = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \cos \alpha\right)$
 $\beta = \arcsin\left(\sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \sin \alpha\right)^2}\right)$
 $\beta = \arccos\left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \sin \alpha\right)$
 $P = d_1 + d_2 + 5 \left(\arcsin\left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \cos \alpha\right) + \arcsin\left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \sin \alpha\right) + \arccos\left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \cos \alpha\right) + \arccos\left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \sin \alpha\right) \right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

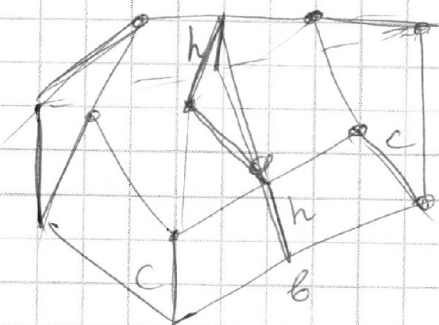
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

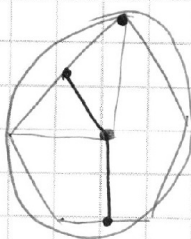
$$n/2$$

5



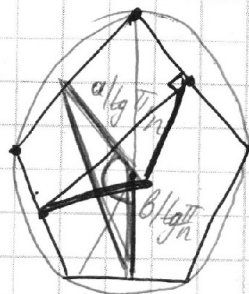
$$a+b=2c$$

Треугольник
можно
построить. Иначе

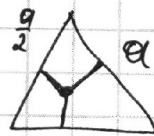
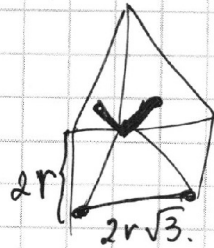
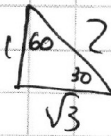


$$\frac{n-1}{2}$$

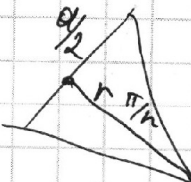
$$\frac{2\pi}{n}$$



$$\left[\frac{n}{2} \right] = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} = \pi$$



$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



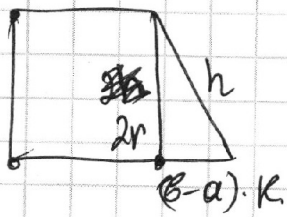
$$\tan \frac{\pi}{n} = \frac{a}{2r}$$

$$r = \frac{a}{2 \tan \frac{\pi}{n}}$$

$$a = \frac{r \cdot 6}{\sqrt{3}} = 2r\sqrt{3}$$

$$3 \cdot 4 \cdot r^2 \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} \sin 60^\circ \cdot 4r^2 \sqrt{3} = r^2 3\sqrt{3}$$



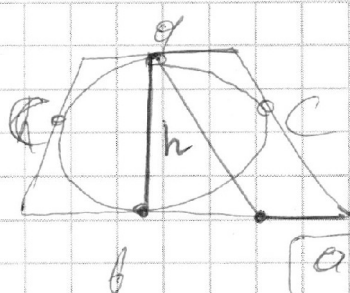
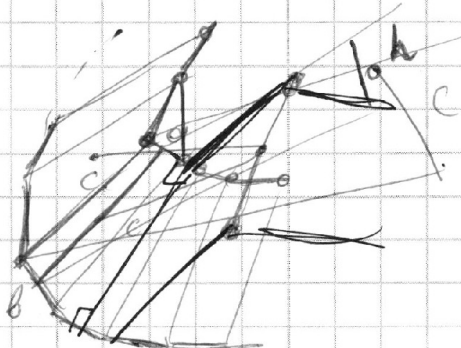


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a+b=2c$$

1) $n \div 2$

$$a+b = \frac{a+b}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

$$\sin \frac{\pi}{n} = 1$$

$$\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

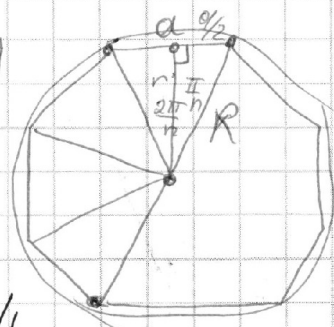
$$n=2$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = \frac{a}{2r}$$

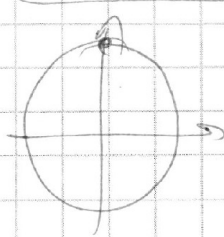
d омер. окр.

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{a}{2R}$$

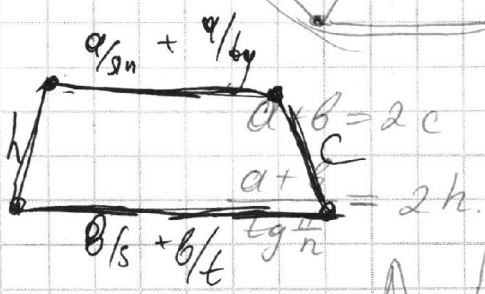
$$d = \frac{a}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$$



$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{a}{\sin \frac{\pi}{n}}$$



$$\frac{5\pi}{2} \quad 9$$

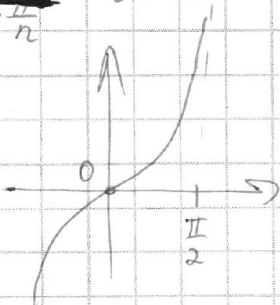


$$c > h$$

$$\frac{c}{h} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \geq 1$$

$$\frac{\pi}{n} \geq \arccos(1)$$

$$\frac{\pi}{n} \geq \frac{\pi}{4}$$

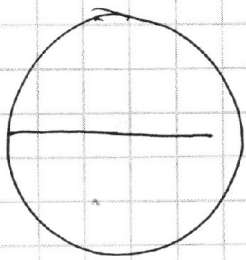


$$h < c$$

$$\sin \frac{\pi}{n} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} < \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

$$1 < \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

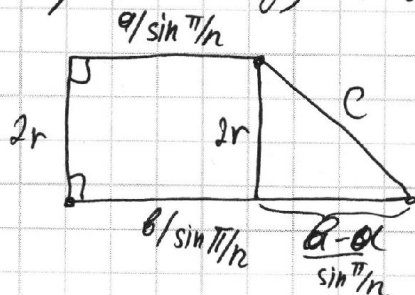


СТРАНИЦА
__ ИЗ __

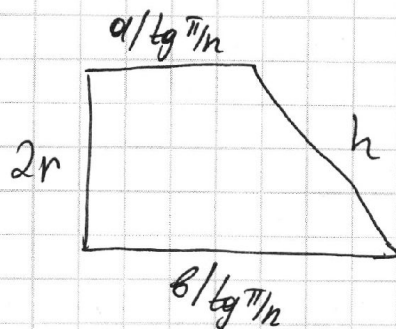
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) $n/2$. Пусть r — радиус вписанного шара.

Тогда, по-прежнему, $\alpha + \beta = 2\epsilon$.



$$c = \sqrt{4r^2 + \left(\frac{a-b}{\sin \pi/n}\right)^2}$$



$$h = \sqrt{4r^2 + \left(\frac{b-a}{\operatorname{tg} \pi/n}\right)^2}$$