



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } A = \overline{\alpha\alpha\alpha\alpha} = \alpha(10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 11 \cdot 101 \cdot \alpha, \\ (\text{11 и 101 - простые}) \quad \begin{cases} \alpha \in \mathbb{N} \\ \alpha \leq 9 \end{cases}$$

т.к. $\alpha \leq 9$, то $\alpha \neq 0$, $\alpha \nmid 11$, $\alpha \nmid 101$, а ~~значит~~ $A \nmid 11$ и $A \nmid 101$, но

$$\text{т.к. } ABC - \text{полный квадрат, то } ABC \mid 11^2 \\ ABC \mid 101^2$$

$$1. \quad \begin{array}{l} ABC \mid 101^2 \\ A \mid 101 \\ A \nmid 101^2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} BC \mid 101 \\ C < 100 \Rightarrow C \nmid 101 \end{array} \quad \Rightarrow \quad B \mid 101$$

Трёхзначные числа, делящиеся на 101 имеют вид ~~808~~
но т.к. в записи B должна быть 2, то $B = 2$. $(B \in \mathbb{N}, B \leq 9)$

$$\boxed{B = 202}$$

$$2. \quad \begin{array}{l} ABC \mid 11^2 \\ A, B \nmid 11^2 \\ B \nmid 11 \\ A \mid 11 \end{array} \quad \Rightarrow \quad C \mid 11 \quad \begin{array}{l} \text{Двухзначные числа, делящи-} \\ \text{ся на 11 имеют вид } \overline{cc}. \\ \begin{cases} C \in \mathbb{N} \\ C \leq 9 \end{cases} \end{array}$$

но т.к. в записи C есть 3,

$$C = 33.$$

$A \cdot B \cdot C = \alpha \cdot 2 \cdot 101^2 \cdot 3 \cdot 11^2$ — квадрат, а значит α делит 11^2 и 101^2 , т.к. $\alpha \leq 9$, $\alpha \in \mathbb{N}$, то $\alpha = 1$.

Ответ: (6666, 202, 33)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

Если $x \neq 1$, а $y \neq 1$, получим

$$(1) \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{xy}, \text{ т.к. } x, y > 0, \text{ то } x+y+2 > 0, \text{ а}$$

значит (1) \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(y+1)} = \frac{1}{xy} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x-y=1. \end{cases}$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = 1^2 = 1.$$

Ответ: 1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓3.

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \quad | : 2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) \sin(\pi x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) \cdot \cos(\pi x)$$

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) = 0 \right]$$

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) = 0 \right]$$

$$\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cdot \sin(\pi x) - \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cos(\pi x) = 0 \right] \quad \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) = 0 \right]$$

$$\left[\frac{\pi}{2}(x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right] \quad | : \frac{\pi}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} y = x - 1 - 2k \\ y = -3x + 1 + 2n \end{array} \right] \quad (*)$$

$$\left[\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right] \quad | : \frac{\pi}{2}$$

$$8) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{y}{4} < \pi + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{5} \right)$$

$$\arccos \frac{y}{4} < \pi + \arccos \frac{x}{5} \quad (1) \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq 3: -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \arccos \frac{y}{4} \geq 0 \\ \arccos \frac{x}{5} \geq 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{array} \right)$$

т.к. $\arccos \frac{y}{4} \in [0; \pi]$, то (1) выполним всегда, кроме (когда ф-ция определена)

$$\left\{ \begin{array}{l} \arccos \frac{y}{4} = \pi \\ \arccos \frac{x}{5} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -4 \\ x = 5 \end{array} \right. \quad (2) \quad \text{заметим, что } (*) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y + 1 + 2k \\ x = \frac{2n+1+2y-4}{3}, \text{ если} \end{array} \right.$$

Ну а теперь переберём все значения y и x :
(y -степени нет) $y = \pm 2$, то
значение изменится

$$x = \{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5\}, \text{ если } y: 2 \quad (\text{таких } y \text{ всего 5})$$

$$x = \{-4, -2, 0, 2, 4\}, \text{ если } y: 2 \quad (\text{таких } y \text{ всего 4})$$

$$x = \{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5\}, \text{ если } y: 2 \quad (\text{таких } y \text{ всего 5})$$

$$x = \{-4, -2, 0, 2, 4\}, \text{ если } y: 2 \quad (\text{таких } y \text{ всего 4})$$

Значит всего пар (x, y)

$$5 \cdot 7 + 4 \cdot 5 = 35 + 20 = 55.$$

Использовал способ (2) $55 - 1 = 54$.

Ответ: a) $\left\{ \begin{array}{l} y = x - 1 - 2k \\ y = -3x + 1 + 2n \end{array} \right. \quad k, n \in \mathbb{Z}$
б) 54.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{4}$$

Русь было билетов K , а одиннадцати классиков.
Тогда $K > 4$, $n \geq 2$, $n \geq K$, ~~а также $n \leq K$~~ .

Всего вариантов раздать билетов C_n^K

Раздать так, чтобы билет досталось и Петре, и Васе

C_{n-2}^{K-2} (двести досталось 2 билета, кол-во бил. 1 на 2)

Вероятность $\frac{C_{n-2}^{K-2}}{C_n^K} = 2,5 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$ (\times)

Установка $C_n^K = \frac{n!}{(n-K)! \cdot K!}$ (\times) \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)K}{(n-1)n} = 2,5 \cdot \frac{3 \cdot 4}{(n-1)(n)} \quad | \cdot (n-1)n > 0, \text{ т.к. } n \geq 2.$$

$$K^2 - K = 30$$

$$K^2 - K - 30 = 0$$

$$K_1 = 6$$

$$K_2 = -5 < 0, \text{ - не удовл. усл. } K > 4$$

Ответ: 6

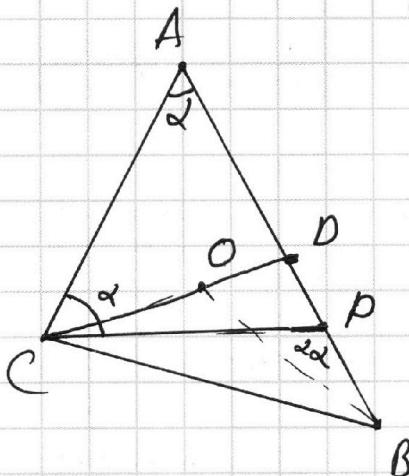


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{5}$

Рассмотрим $\angle A = \alpha$, тогда

$\angle BOC = 2\alpha$ (центральный)

$\angle BOC = \angle BPC = 2\alpha$

(отмеченной одинаковы)

$\angle BPC = \angle A + \angle ACO \Rightarrow$ (внешний для $\triangle APC$)

$2\alpha \quad \alpha \Rightarrow \angle ACO = \alpha$.

Рассмотрим $D = OC \cap AB$.

$\triangle APC - P/15^\circ$ по двум углам.

$$PC = AP = \frac{15}{2}, \quad AC = 9, \quad \rho_{APC} = \frac{15+9}{2} = \frac{24}{2} = 12 \quad (\text{по формуле Герона})$$

По формуле Герона $S_{APC} = 2 \cdot 3 \cdot \left(12 - \frac{15}{2}\right) = 3(24 - 15) = 27$.

Найдём $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$. $\cos \alpha = \frac{AC}{2 \cdot AP} = \frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 15} = \frac{3}{5} = 0,6$.
(из т. косинусов для $\triangle APC$)

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8$$

(т.к. $\alpha \in [0; \pi]$, то $\sin \alpha \geq 0$)

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,96$$

$$S_{BPC} = \frac{1}{2} \cdot PB \cdot PC \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot 0,96 \cdot 5 \cdot \frac{15}{2} = 18$$

$$S_{ABC} = S_{BPC} + S_{APC} = 18 + 27 = 45$$

Ответ: 45

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

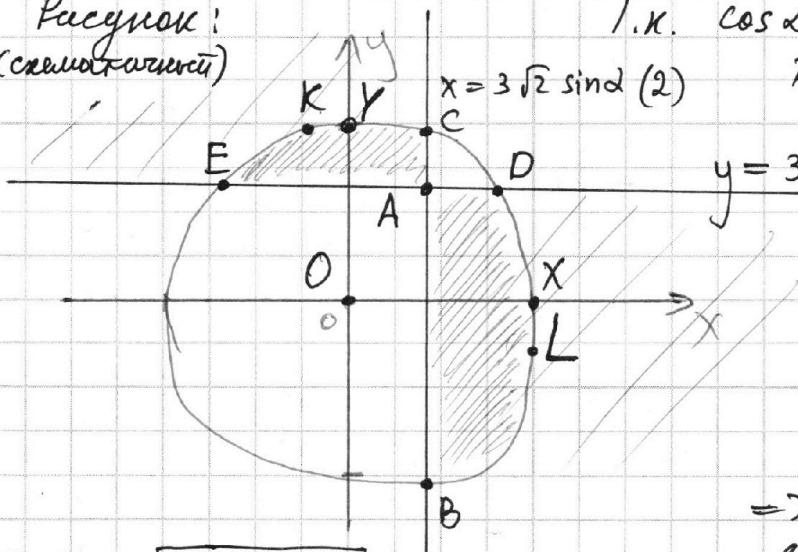
№6

2-е ур-ие задает окружность с центром в $(0,0)$ и $r=5$.

Первое делит плоскость на 4 части, 2 из к-х (но между интервалов) нам подходит.

Расклад:

(схематичн)



т.к. $\cos\alpha \in [-1; 1]$

то область значений y оп-чий

$$y = 3\sqrt{2}\cos\alpha \quad (1) \quad (1) \cup (2)$$

$$[-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$$

$$3\sqrt{2} < 5 \Rightarrow \\ 18 < 25$$

\Rightarrow прямое (1) \cup (2)

всегда пересекают
нашую окружность, а значит
рас. всплывает именно толк.

$$BC = 2\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha}$$

$$DE = 2\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha}$$

(гип.)

$$P = BC + DE + KE + DL + LB$$

$$\text{Найдём } \angle DOB = \angle DOx + \angle xOB$$

$$\arcsin\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\cos\alpha\right)$$

$$\arccos\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\sin\alpha\right)$$

Аналогично

$$\angle COE = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\sin\alpha\right) + \arccos\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\cos\alpha\right)$$

При этом, используя
известные, что $\angle OAB = \alpha$
и в силу симметрии
аналогично для
угла OAL .
Однако
последующее
засечено

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P = 2\sqrt{25 - 18\cos^2 \alpha} + 2\sqrt{25 - 18\sin^2 \alpha} + \left(\arcsin\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\cos\alpha\right) + \arcsin\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\sin\alpha\right) + \arccos\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\sin\alpha\right) + \arccos\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\cos\alpha\right) \right) \cdot 5$$

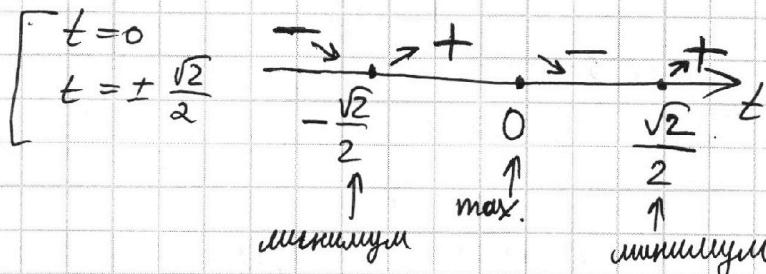
Рассмотрим $\cos \alpha = t$, где $t \in [-1; 1]$.

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{-36t}{\sqrt{25 - 18t^2}} - \frac{36t}{\sqrt{25 - 18t^2}} + Q(t) \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{T.к. } \frac{d\arcsin(f(t))}{dt} &= \frac{df/dt}{\sqrt{1-f^2(t)}} \\ \frac{d\arccos(f(t))}{dt} &= -\frac{df/dt}{\sqrt{1-f^2(t)}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} f=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow Q(t)=0. \end{array} \right.$$

Найдём нули производной (*)

$$\cancel{36t} \frac{36t}{\sqrt{25 - 18t^2}} = \frac{36t}{\sqrt{7 + 18t^2}}$$



$$\cos \alpha = 0.$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

А знахание равно

$$M = P(0) = 2 \cdot 5 + 2\sqrt{7} + 5\left(0 + \frac{\pi}{2} + \cancel{\frac{\pi}{2}}\right) = 10 + 2\sqrt{7} + 5\pi$$

Ответ: $M = 10 + 2\sqrt{7} + 5\pi$, при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

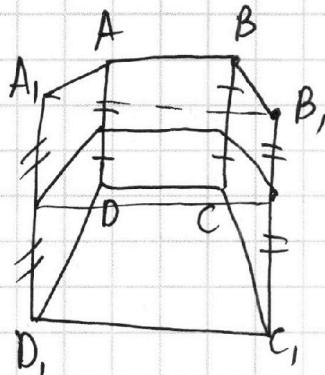


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



N⁷

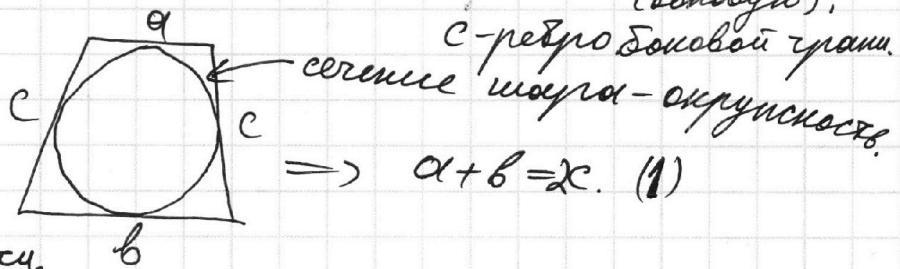
Пусть эта пирамида ABCDA₁B₁C₁D₁,

1) Пусть основание пирамиды n-угольники $n:2$. (a -ст. в. гр.
 b -ст. низк. гр.)

Тогда, если рассмотреть 1 грани
(боковую);

(*) Т.к. $n:2$, то

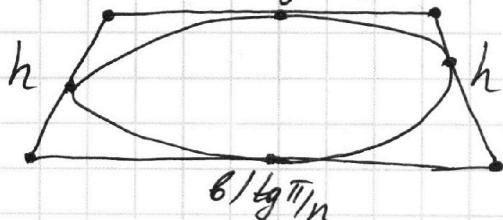
расстояние между
серединами 2 пр-ми
ли-ниже это диаметр
вписанной окружности.



Соединим середины двух противоположных
сторон основания и рассмотрим искомость
через неё ^(*) (также описанная трапеция)

$a/b/tg\pi/n$

h - длина отрезка
границы



$$\frac{a+b}{b/tg\pi/n} = 2h \quad (2)$$

из (1) и (2) $\frac{c}{h} = \frac{tg\pi/n}{h} \geq 1$ (т.к. h - ~~расстояние~~ - расстояние
между прямыми, а c -
диаметр сечущей $\Rightarrow c \geq h$)

$$\frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \geq \frac{\pi}{4}$$

$n \leq 4$. \Rightarrow для $n:2$ касая пирамиды
струю ABCD A₁B₁C₁D₁ и
при этом $c=h \Rightarrow$ это параллелизм

в квадрате вписаны сору, то это куб. $\Rightarrow \frac{S_{\text{б}}}{S_{\text{н}}} = 4$ куб, а т.к.

$$\frac{S_{\text{б}}}{S_{\text{н}}} = 4$$



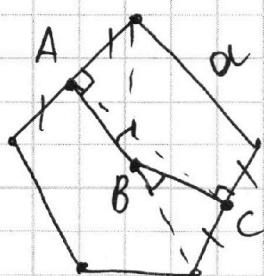
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 - 2
 - 3
 - 4
 - 5
 - 6
 - 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) №2. Возьмем вершину и её противоположную сторону, ~~одну из~~ возьмем одну из вершин при той стороне и сделаем поворот на π вокруг центра правильного многоугольника:



(Пример задачи $n=5$)

По аналогии с Р.1.

$$a+b=2c$$

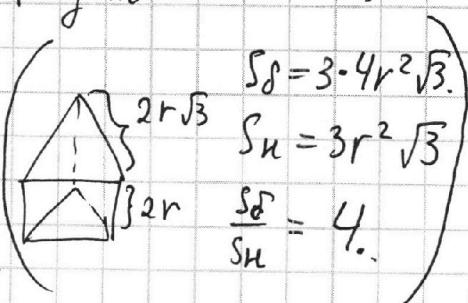
$$AC + A_1C_1 = 2h, \quad AB = BC = \frac{\alpha}{2} \sqrt{g \frac{\pi}{n}}$$

Расстояние между любыми двумя ~~и~~ серединами сторон в пятиугольнике при $n \geq 5$, кроме соседних сторон), меньше стороны этого многоугольника.

$$\angle ABC = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} = \pi - \frac{n-1}{n}$$

$$AR = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2 \operatorname{tg}^2 \pi/n} - \frac{\alpha^2}{2 \operatorname{tg}^2 \pi/n} \cos(\pi \frac{n-1}{n})^2} = \frac{\alpha}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \pi/n} \sqrt{1 - \cos(\pi \frac{n-1}{n})^2}$$

(No T. kocamyca)



Для этого $n=3$ other оребужно 4

Ombem: 4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \text{def} \begin{cases} d=2 \\ e=2 \\ f=2 \end{cases} ABC - \text{квадрат}$$

$$C = \overline{bc} \begin{cases} b=3 \\ c=3 \end{cases}$$

11, 101, 2, a

$$A = 0 \cdot 111 =$$

$$= [01 \cdot 11 \cdot 101]$$

1111 | 111
| 101

A: 101 1 раз

c: 101

$$\Rightarrow B: 101 \quad 101 \quad \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ 7 \\ 4 \\ X \end{matrix}$$

$$B = 202 \frac{1}{11} \quad X$$

C: 11

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = C: 11$$

1

2

3

4

5

6

7

8

9

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+2+y}{xy} = \frac{x+2+y}{(x-1)(y+1)}$$

$$(x-1)(y+1) = xy$$

$$x \bar{+} y - 1 = 0$$

$$x \bar{+} y = 1$$

$$x^3 - y^3 - 3xy$$

$$(x^2 + xy + y^2) - 3xy =$$

$$= (x-y)^2$$

$$(\sin(\pi x) + \sin(\pi y)) \sin(\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(\pi y)) \cos(\pi x)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta \end{cases}$$

$$\sin(\dots) + \sin(\dots) = 2 \sin\alpha \cos\beta$$

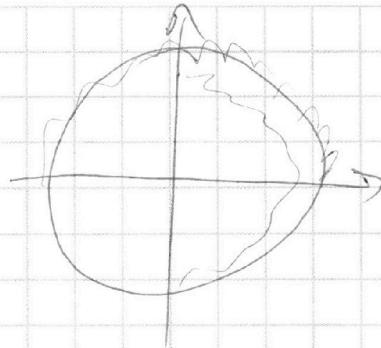
$$\alpha+\beta=A$$

$$\alpha-\beta=B$$

$$\beta = A-B$$

$$\sin \frac{A+B}{2}$$

$$\cos \frac{A-B}{2}$$



$$\arccos \in [0; \pi]$$

$$\arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\sin \pi x \cdot \sin \frac{\pi}{2}(x+y) \cdot \cos \frac{\pi}{2}(x-y) = [\cos \pi x \cdot \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \frac{\pi}{2}(x-y)] \perp 2$$

$$\cos \frac{\pi}{2}(x-y) = 0$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}(x-y)) - \cos(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y) = \cos(\frac{\pi}{2}(x-y)) + \cos(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y)$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \end{cases}$$



$$y: 2, x: 2$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = \sin\alpha \cos\beta \quad \text{if } \sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\arcsin x + \arccos y < \frac{3\pi}{2}$$

$$\pi x - \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y = \pi x$$

$$\frac{\pi}{2}(x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad | : \frac{\pi}{2}$$

$$x-y = 1+2k$$

$$-4 \leq y \leq 4$$

$$\pi - \arccos x \quad y = x-1-2k$$

$$\cos(\arccos \frac{y}{5}) = \cos(\frac{3\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{5}) \quad 3x+y = 1+2n$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$-y = 5 - 1 - 2k$$

$$-2k = -8$$

$$k = 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

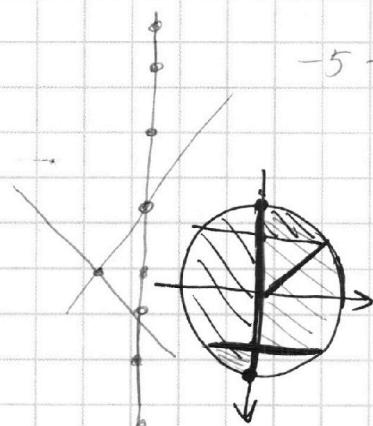
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} -4 &= x - 1 - 2k \\ \frac{-1}{9} &\quad \left| \begin{array}{l} -36 \\ 17 \\ \hline 1 \end{array} \right. \\ \frac{1}{9} &\quad \boxed{\begin{array}{l} + \\ - \\ = \\ \hline \end{array}} \end{aligned}$$

$x = -3 + 2k$

$\textcircled{9}, \textcircled{-3}, \textcircled{7}, \textcircled{-1}, \textcircled{6}$

$$-4 = -3x + 1 + 2n$$

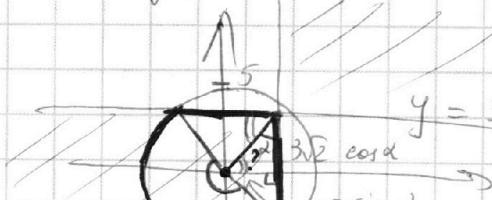


$$\beta = \arctg \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) =$$

$$x = \frac{y - 1 - 2n}{-3} = \frac{2n + 1 + y}{3}$$

Пусть k нечетный $k \geq 1$, $n \geq 2$.

$$P(\text{получить двум четных}) = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$$



$$x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} &\frac{(k-1)k}{(k-2)! (n-k)!} \cdot \frac{n!}{(n-1)n} \\ &\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (n-1)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (n-1)} \end{aligned}$$

$$\sqrt{(3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &< 5 \\ 2 &< 25 \\ \sin \alpha &= 1 \\ 5 \sin^2 \alpha &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{36}} \\ &+ \\ &\frac{1}{\sqrt{36}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5 &, k=-1 \\ -3 & \\ -1 & \\ 1 & \\ 3 & \\ 5 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (k-6)(k+5) &= \\ &= k^2 - k - 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{5, 3, 1, -1, -3, -5}{3} \\ &x = \frac{4+2n}{3} = \\ &= 2 \frac{2+17}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{3, 10, \sqrt{36}}{15, 2} \\ &\frac{1}{\sqrt{36}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{65}{5} \\ &\frac{1}{\sqrt{36}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\pi/2 - 2}{2} \\ &3\sqrt{2} \sqrt{5} \\ &9 \cdot 2 \sqrt{25} \\ &18 < 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{(k-1)k}{(k-2)! (n-k)!} \cdot \frac{n!}{(n-1)n} \\ &\frac{1}{(k-2)! (n-k)!} \cdot \frac{n!}{(n-1)n} \end{aligned}$$



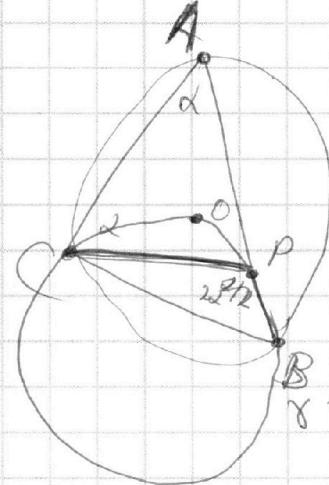
На одной странице можно оформлять **только** одну задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении** каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

624



$$\arcsin^2 = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\arccos(0) = 15^\circ$$

(21)

$\frac{\pi}{2}$

$$\frac{abc}{4R} = S$$

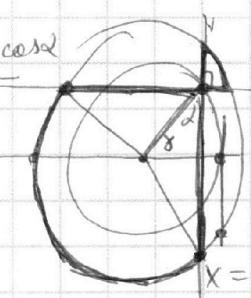
$$25 - 18 + 18 \cos^2 t^2 = -7 + 18t^2$$

$$\sqrt{12 \cdot 3 \cdot (12 - \frac{15}{2})^2} =$$

$$\arcsin(0)$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot (12 - \frac{15}{2}) = \pi \times 15^\circ$$

$$= 3 \cdot 9 = 27$$



$$x^2 + 18 \cos^2 \alpha = 25.$$

$$x = -\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}$$

$$y = -\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$$

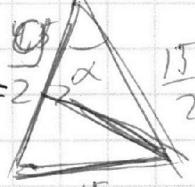
$$\times \frac{15}{17}$$

~~$$\frac{736}{43} \times 3$$~~

~~$$3\sqrt{2} \cos \alpha$$~~

$$\{3\sqrt{2} \sin \alpha, 3\sqrt{2} \cos \alpha\}$$

$$\frac{15}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} =$$



$$\cos \alpha = \frac{9}{15}$$

$$= \frac{15 \cdot 5}{4} = 4 \cdot 5 = 20.$$

$$0,64$$

6 кр. правд...

$$0,48 \cdot 2 =$$

$$= 0,96$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{5} \cos \alpha \left(\sqrt{1 - \frac{18}{25} \cos^2 \alpha} + \cancel{\frac{3\sqrt{2}}{5} \sin \alpha} \cdot \sqrt{1 - \frac{18}{25}} \right)$$

$$\arccos \cancel{\alpha} \left(\frac{6\sqrt{2}}{5} \cos \alpha \sqrt{1 - \frac{18}{25} \cos^2 \alpha} \right)$$

$$+ \arccos \left(\frac{6\sqrt{2}}{5} \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{18}{25} \sin^2 \alpha} \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{S_D}{S_n} = \frac{S_1}{S_n \cdot \cos 2}$
 $= \frac{S_n - S_B}{S_n \cdot \cos 2} = \frac{\frac{1}{\cos 2} - \frac{S_B}{S_n \cdot \cos 2}}{1}$
 $S_D = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot c$
 $\frac{4S_D}{S_n} ? \cdot b$
 $\pi\text{-угольник}$
 $\frac{2(\alpha + \beta)c}{b^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2}{c^2} = \left(\frac{\alpha}{b} + 1\right)^2$
 $\boxed{\alpha + \beta = 2c}$
 $\alpha + \beta = 2h$
 $\alpha = 2h - \beta$
 $\frac{2(\alpha + \beta)c}{b^2} = \frac{(2h - \beta + \beta)^2}{c^2} = \frac{4h^2}{c^2}$
 $\frac{4S_D}{S_n} = \frac{4h^2}{c^2}$

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x_1 = \arcsin\left(\sqrt{1 - \frac{3\sqrt{2}}{5} \cos^2 \alpha}\right)$
 $x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$
 $y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$
 $d_1 + d_2 + \varphi_1 + \varphi_2$
 $\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha$
 $\gamma \in [0; \frac{\pi}{2}]$
 $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$d_1 = \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}$
 $d_2 = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$
 $\sin \beta = \sqrt{1 - x^2}$
 $\beta = \arcsin\left(\frac{x}{5}\right)$
 $\alpha + \beta = \varphi$
 $\varphi = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \cos \alpha\right)$
 $\beta = \arcsin\left(\sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \sin \alpha\right)^2}\right)$
 $\beta = \arccos\left(\frac{3\sqrt{2}}{5} \sin \alpha\right)$

$\sin \varphi = \alpha \cdot \cos(\arcsin(\beta)) + \beta \cdot \cos(\arcsin(\alpha)) = \alpha \cdot \sqrt{1 - \beta^2} + \beta \cdot \sqrt{1 - \alpha^2}$
 ~~$\cos(\arcsin(x)) = \cos(\frac{\pi}{2} - \arccos(x)) =$~~
 $\arccos(\alpha) + \arccos(\beta) = \varphi$
 $\cos \varphi = \alpha \cdot \beta - \sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{1 - \beta^2}$
 $\arcsin(\alpha) + \arccos(\beta) = \varphi$
 $\cos \varphi = \beta \cdot \sqrt{1 - \alpha^2} + \alpha \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$

$\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$
 $\beta =$

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

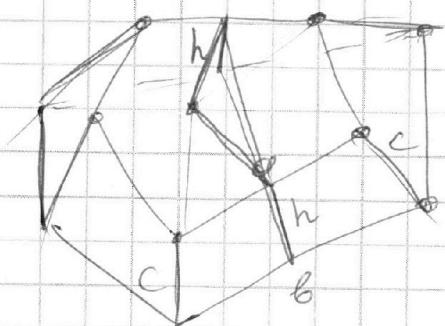
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

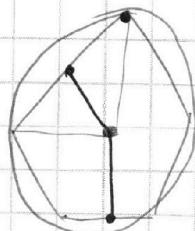
$n/2$

5



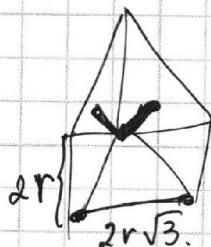
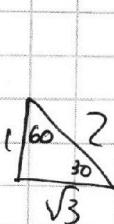
$$a+b=2c$$

Круг призма
может
получить. Илья



$$\frac{n-1}{2}$$

$$\frac{2\pi}{n}$$



$$3 \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$r = \frac{a \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} =$$

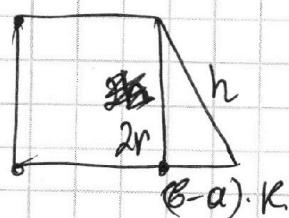
$$= \frac{a \sqrt{3}}{6}$$

$$r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = \frac{a}{2r}$$

$$a = \frac{r \cdot 6}{\sqrt{3}} = \boxed{2r\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{2} \sin 60^\circ \cdot 4r^2 \cdot 3 = r^2 \cdot 3\sqrt{3}$$



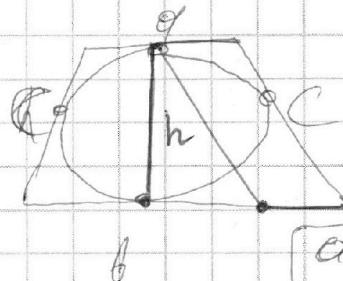
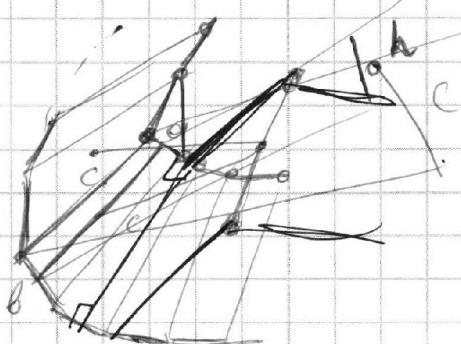


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a+b = 2c$$

1) $n=2$

$$a+b = \frac{a+b}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

$$\sin \frac{\pi}{n} = 1$$

$$\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

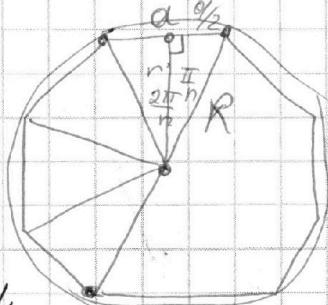
$$[n=2]$$

$$\tan \frac{\pi}{n} = \frac{a}{2r}$$

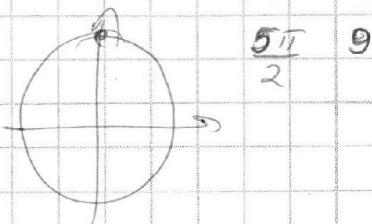
d диаметр окр.

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{a}{2R}$$

$$d = \frac{a}{\tan \frac{\pi}{n}}$$



$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{a}{\sin \frac{\pi}{n}}$$



$$\frac{5\pi}{2}$$

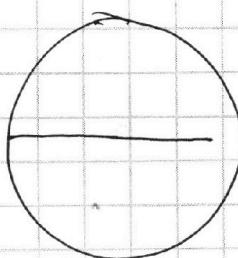
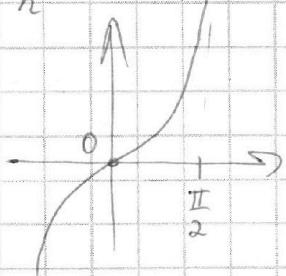
$$\begin{aligned} & \frac{a}{\sin} + \frac{a}{\cos} \\ & a+b = 2c \\ & a+b = 2h \end{aligned}$$

$$c > h$$

$$\frac{c}{h} = \tan \frac{\pi}{n} \geq 1$$

$$\frac{\pi}{n} \geq \arctan(1)$$

$$\frac{\pi}{n} \geq \frac{\pi}{4}$$



$$h < c$$

$$\sin \frac{\pi}{n} < \tan \frac{\pi}{n}$$

$$\frac{1}{\tan \frac{\pi}{n}} < \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

$$1 < \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

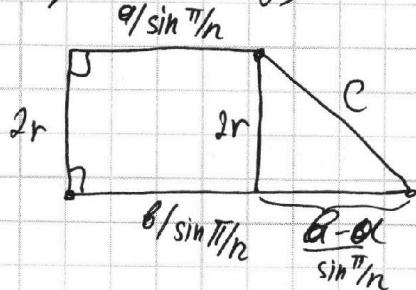
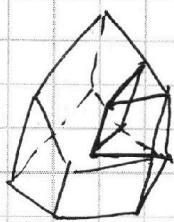
7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

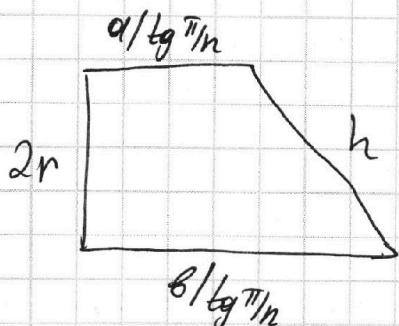
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) $n/2$. Рассмотреть n -угольник вписанного в окружность.

Тогда, по-прежнему, $\alpha + \beta = 2\pi$.



$$C = \sqrt{4r^2 + \left(\frac{\alpha - \beta}{\sin \pi/n}\right)^2}$$



$$h = \sqrt{4r^2 + \left(\frac{\beta - \alpha}{\tan \pi/n}\right)^2}$$