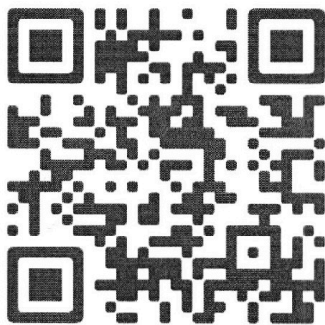




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111 \cdot K, \text{ где } K - \text{цифра от } 1 \text{ до } 9$$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot K$$

$$K \nmid 101 \text{ и } K \nmid 11 \quad (101, 11 - \text{простые})$$

$$B \cdot C : (101 \cdot 11)$$

$$C < 100 \text{ и } C \in \mathbb{N} \Rightarrow C \nmid 101$$

$$B < 1000 \text{ и } B \in \mathbb{N} \Rightarrow B \nmid 1111 \quad \Rightarrow \begin{matrix} C : 11 \\ B : 101 \end{matrix}$$

$$\text{т.к. } B : 101 \text{ и } C : 11 \Rightarrow C : 11$$

$$B \cdot C : 11, \text{ т.к.}$$

$$A \cdot B \cdot C = \text{Квадрат } A : 11 \cdot 11^2$$

$$B = 606$$

$$C = 33$$

$$A \cdot B \cdot C = 6 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 1111 \cdot K = (1111)^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot K = x^2, x \in \mathbb{N}$$

$$K = 2 \cdot \text{Квадрат} \quad K = 2 \text{ или } K = 8$$

$$\text{Ответ: } (2222; 606; 33); (8888; 606; 33)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$x+y+5 \neq 0, \text{ т.к. } x, y > 0 \Rightarrow xy = (x-2)(y+2), \text{ т.к. числитель равен}$$

$$0 = 2x - 2y - 4 \Rightarrow x = y + 2 \quad \text{числитель равен}$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = (y+2)^3 - y^3 - 6y(y+2) = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6y^2 - 12y = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x - \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi(x-y)) = \cos(2\pi x)$$

$\Downarrow$

$$\pi x - \pi y + 2\pi k = 2\pi x, k \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad \pi y - \pi x + 2\pi k = 2\pi x, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = -x + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 3x - 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: пары $(x; -x + 2k, k \in \mathbb{Z})$ и $(x; 3x - 2k, k \in \mathbb{Z})$

$$d) x, y \in \mathbb{Z}$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$\Downarrow$

$$0 = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\cos \pi x \neq \cos \pi y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \pi x - \cos \pi y = 0, \text{ т.к. } \cos \pi x \neq 0$$

$$\cos \pi x = \cos \pi y$$

$$x \equiv y$$

$$\frac{x}{6} \in [-1; 1] \Rightarrow x \in [-6; 6] \quad (\text{13 целых чисел})$$

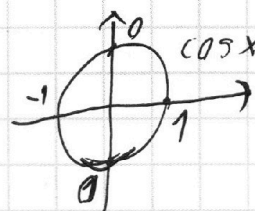
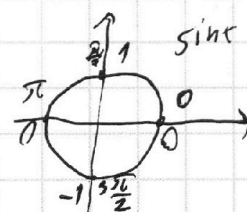
$$\frac{y}{2} \in [-1; 1] \quad y \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \leq \pi \quad \text{и} \quad \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} = \pi,$$

$$\Leftrightarrow \arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x=6 \quad \text{и} \quad y=2$$

Всего пар 13 · 5, но 1 не подходит. $(x=6, y=2)$

Ответ: 64





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть в классе x учеников, a - число билетов которые выданы

вер-ти поехать на концерт Тети и Васи в начале месяца = $\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4}$,

а в конце месяца: $\frac{C_{x-2}^{a-2}}{C_x^a}$

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} \cdot 6 = \frac{C_{x-2}^{a-2}}{C_x^a}$$

$$\frac{\frac{(x-2)!}{2! \cdot (x-4)!}}{\frac{x!}{(x-4)! \cdot 4!}} \cdot 6 = \frac{\frac{(x-2)!}{(a-2)! \cdot (x-a)!}}{\frac{x!}{(x-a)! \cdot a!}} \Rightarrow 6 \cdot \frac{(x-2)! \cdot 4!}{2! \cdot (x-4)! \cdot x!} = \frac{(x-2)! \cdot a!}{x! \cdot (a-2)!}$$

$$\frac{4!}{2} \cdot 6 = \frac{a!}{(a-2)!} \Rightarrow 72 = a \cdot (a-1)$$

$$a^2 - a - 72 = 0$$

$$(a-9)(a+8) = 0$$

$$a \geq 4 \text{ (по условиям)} \Rightarrow a = 9$$

$$a = 9$$

Ответ: 9 билетов

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} AC &= 30 \\ AP &= 25 \\ BP &= 5 \\ \angle BAC &= \alpha \\ \angle OBC &= 90^\circ - \alpha \\ \angle BOC &= 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle OCB &= \angle APH, \text{ т.к. } \angle OPB - \text{внешний} \\ \angle APH &= 90^\circ - \alpha \\ \angle AHP &= 90^\circ \Rightarrow PH - \text{высота } \triangle APC \end{aligned}$$

$$\angle APH = \angle OCB = \angle OBC = \angle OPC \Rightarrow PH - \text{биссектриса } \triangle APC$$

$$PH - \text{высота и биссектриса } \triangle APC \Rightarrow AP = PC = 25$$

$$\angle APC = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\text{по т. косинусов } 25^2 + 25^2 - 2 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) \cdot 25 \cdot 25 = 30^2$$

$$5^2 + 5^2 + 2 \cos 2\alpha \cdot 5 \cdot 5 = 6^2$$

$$\cos 2\alpha = \frac{36 - 50}{50} = -\frac{7}{25}$$

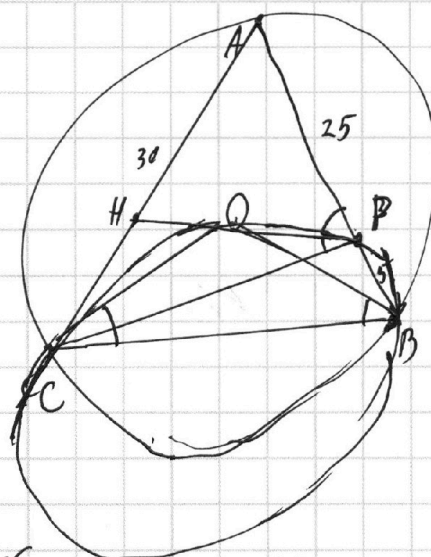
$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = -\frac{7}{25}$$

$$2 \sin^2 \alpha = \frac{32}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ или } \sin \alpha = -\frac{4}{5}, \text{ т.к. } \alpha \in (0; 90^\circ)$$

$$S_{ABC} = \frac{\sin \alpha \cdot AB \cdot AC}{2} = \frac{\frac{4}{5} \cdot (AP + BP) \cdot 30}{2} = \frac{4}{5} \cdot (25 + 5) \cdot 18 = 420 \text{ eq}^2$$

$$S_{ABC} = \frac{\sin \alpha \cdot AB \cdot AC}{2} = \frac{\frac{4}{5} \cdot (25 + 5) \cdot 30}{2} = 420 \text{ eq}^2$$

$$\text{Ответ: } 420 \text{ eq}^2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

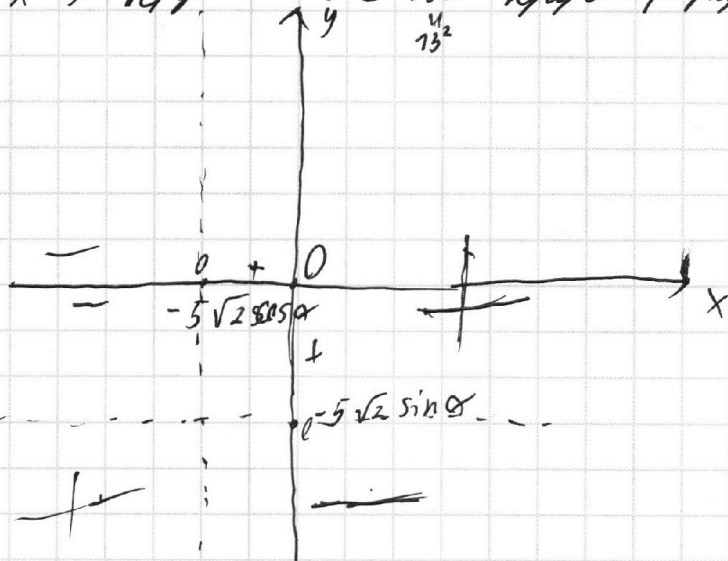
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 169 \end{cases}$$

$x^2+y^2 \leq 169$ — круг с радиусом 13



координаты точек:

2-я и 4-я четверти от осей координат отмечены на $-5\sqrt{2}\cos\alpha$; $-5\sqrt{2}\sin\alpha$ и x и y соответственно ≤ 0 , если их подставить в

$$(x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0$$

тогда заметим что точка пересечения внутри круга, т.к.

$$(-5\sqrt{2}\cos\alpha)^2 + (-5\sqrt{2}\sin\alpha)^2 = 50\cos^2\alpha + 50\sin^2\alpha = 50 < 169,$$

значит мы имеем 2 непересекающиеся прямые и взяли 2-я и 4-я четверти от осей. Их с пересечением с кругом. Заметим что на дуге круга отсчитаны углы $90^\circ \Rightarrow$ при повороте α длина дуги в четверти одинакова и равна половине ^{периметра} ~~длины~~ $2\pi r = \pi \cdot 26 = 13\pi$ тогда нужно найти максимальную длину отрезков из пересечения круга и непересекающихся прямых.

$$\text{длина 1 отрезка} = 2\sqrt{169 - 50\cos^2\alpha}, \text{ а второго} = 2\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha} \quad (\text{по теореме}$$

$$\text{их сумма} = 2\sqrt{169 - 50\cos^2\alpha} + 2\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha}$$

найдем максимум

т.к. радиус
от 0 до 13
и до пересечения с осью



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сумма отрезков $> 0 \Rightarrow$ ^{максимум} квадрата суммы достигнута. $\Leftrightarrow$ сумма достигнет максимума

$$\begin{aligned} & \left(2\sqrt{169-50\cos^2\alpha} + 2\sqrt{169-50\sin^2\alpha} \right)^2 = 8 \cdot 169 - 4 \cdot 50\cos^2\alpha - 4 \cdot 50\sin^2\alpha + \\ & + 8\sqrt{(169-50\cos^2\alpha)(169-50\sin^2\alpha)} = 8 \cdot 169 - 200 + 8\sqrt{169^2 - 169 \cdot 50(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + 2500\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha} \\ & = 1152 + 8\sqrt{169^2 - 50 \cdot 169 + 2500\sin^2 2\alpha} \end{aligned}$$

достигает максимума, когда $\sin^2 2\alpha = 1$

$$\sin 2\alpha = 1 \quad \text{или} \quad \sin 2\alpha = -1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2} \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$P = 13\pi + 2\sqrt{169-50 \cdot \frac{1}{2}} + 2\sqrt{169-50 \cdot \frac{1}{2}} = 13\pi + 24$$

Ответ: $13\pi + 24$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

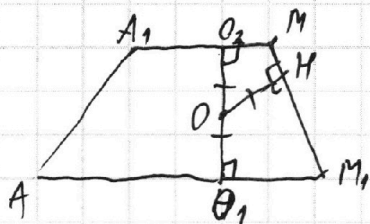
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.к. кривизна правильная, то ее боковые углы - равнобедренные трапеции. т.к. SC касалась стороны, то трапеции отрезаны. Тасиотрим сечение содержащее высоту к боковой грани и высоту между сканскими тер. и прох. через центр O .



$$\begin{aligned} O_1O_2 = O_1M_1 &\Rightarrow \angle O_1O_2M_1 = \angle O_1M_1M_1 \\ \angle O_1O_2M_1 = \angle O_1M_1M_1 &= 90^\circ \Rightarrow \angle O_1M_1M_1 = \\ &= \angle O_1M_1M_1 \\ &\Rightarrow O_1M_1 = M_1M_1 \end{aligned}$$

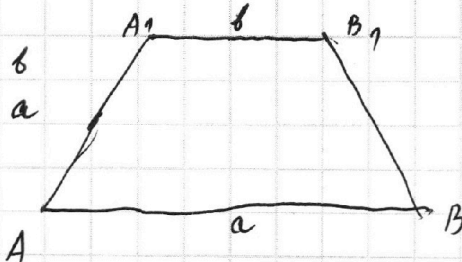
$$\text{аналогично } A_1M_1 = O_2M_1$$

AM_1 - высота и медиана кривизны основания, A_1M аналогично верхн. ск. M_1M_1 - высота трапеции

$$M_1M_1 = \frac{1}{3} (A_1M + AM_1), \text{ т.к. } A_1O_2 : O_2M = A_1O_1 : O_1M_1 = 2:1$$

пусть сторона кривизны основания = a , а верхняя b

$$\begin{aligned} A_1M_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} b \\ AM_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} a \end{aligned}$$



расположим. фок. точки A, A_1, B, B_1
 $S = \frac{(a+b) \cdot \frac{\sqrt{3}(a+b)}{2}}{2}$

$$\begin{aligned} A_1A^2 &= \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} (a+b) \right)^2 = \\ &= A_1A^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} + \frac{3}{4} (a^2 + 2ab + b^2) = \end{aligned}$$

$$A_1A^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - ab + \frac{3}{4} (a^2 + 2ab + b^2) = \frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{3}{4} (a^2 + 2ab + b^2) - ab$$

$$\sqrt{4} \quad 2\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$$

$$\sqrt{a^2 + 4b^2 + 2ab} = a + b, \text{ т.к. } \angle = A_1A = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4b^2 + 2ab} = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$$

A_1, B, B_1 - точки

$$3(a^2 + b^2) - 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$6a^2 + 6b^2 - 4ab = 0$$

$$4a^2 + 4b^2 + 4ab = a^2 + 2ab + b^2$$

$$3a^2 + 3b^2 - 2ab = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

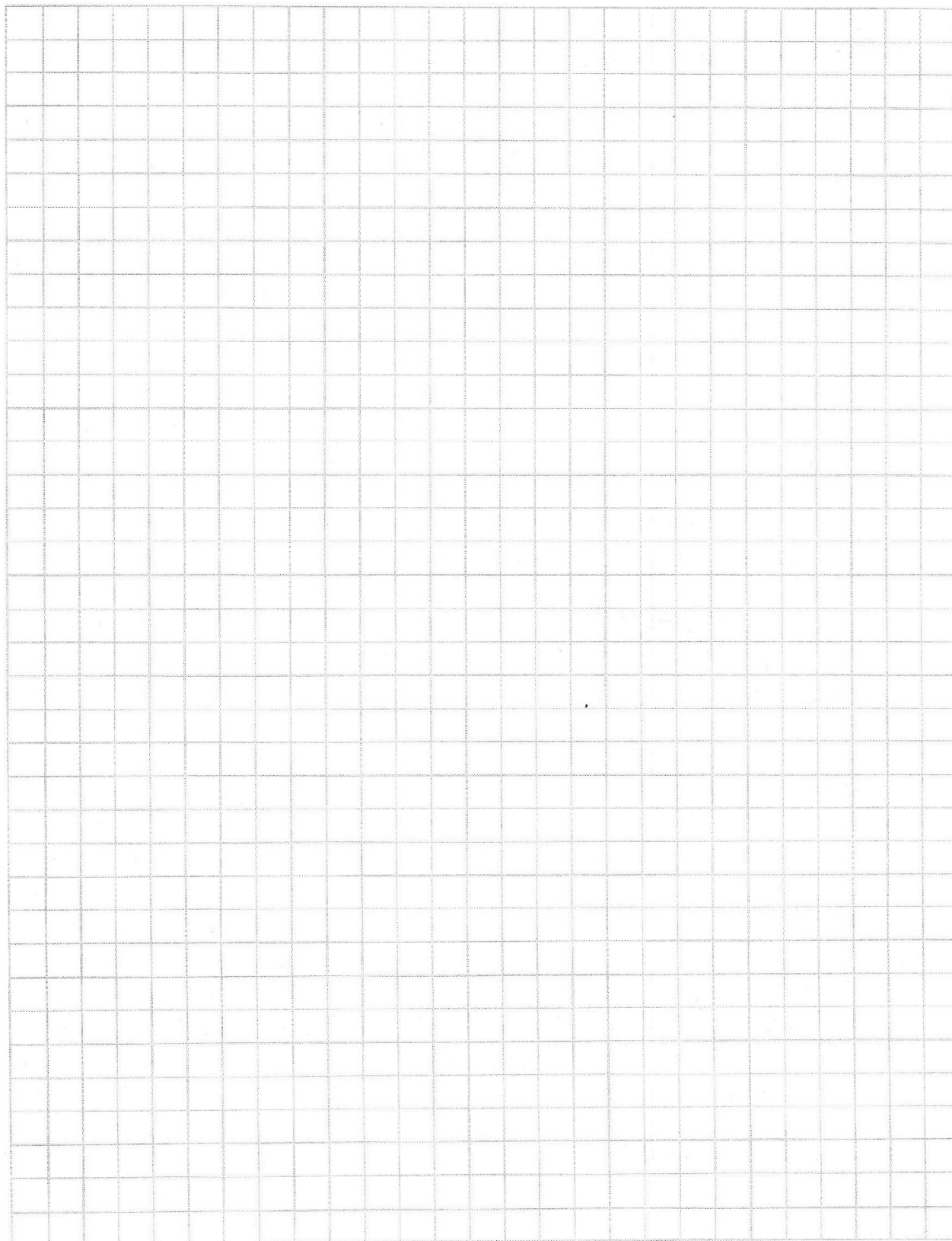
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





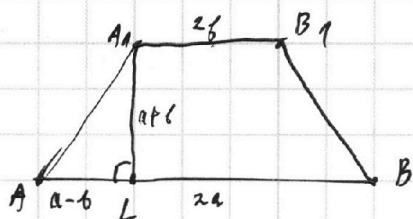
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Боковые грани - равнобедренные трапеции и т.к. $\sum$ высоты боковых трапеций, то трапеции описанные! Опустим высоты на грани и на Т.к. получили центр оскр. с равными расстояниями до стороны

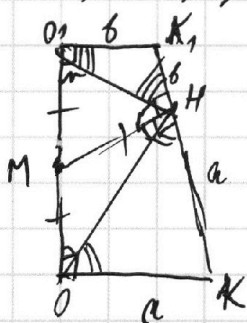


$$AA_1B_1B - \text{описанная} \Rightarrow AB + A_1B_1 = AA_1 + BB_1$$

$$A_1B_1 = 2b$$

$$AB = 2a$$

рассмотрим Δ . расстояния до описанной равны. Рассмотрим секцию содержащую высоты на боковые грани и перпендикуляр на плоскости оскр. и прох. через центр оскр.



$$MH = MO \text{ и } \angle MOK = \angle MNK \Rightarrow \angle HOK = \angle OHK \Rightarrow OK = KH = a$$

$$\text{аналогично } OA_1 = KA_1H_1 = b \quad AK_1 = KH_1 + HK = a + b$$

$$\Rightarrow \text{высота трапеции} = a + b$$

$$A_1L - \text{гипотенуза} = a + b \quad \Rightarrow \quad A_1A_1 = \sqrt{(a+b)^2 + (a-b)^2} = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

$$AL = a - b$$

$$AA_1 + BB_1 = AB \neq A_1B_1$$

$$2\sqrt{2(a^2 + b^2)} = 2a + 2b$$

$$2a^2 + 2b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2 = 0$$

$$a = b$$

$$AA_1B_1B - \text{квадрат} \quad S = (2a)^2 = 4a^2$$

$$S_{\text{бок. гр.}} = 4a^2 \cdot 4 = 16a^2$$

$$S_{\text{верх. см.}} = 4a^2$$

$$\frac{S_{\text{верх. см.}}}{S_{\text{бок. гр.}}} = \frac{1}{4} \neq$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a sphere and a tetrahedron.

Diagrams:

- Top left: A small diagram of a tetrahedron with a point P inside.
- Top center: A sphere with a tetrahedron inscribed inside it. The sphere's radius is labeled 25. The tetrahedron's edges are labeled 30 and 35. A point P is marked on one of the edges.
- Top right: A sphere with a tetrahedron inscribed inside it. The sphere's radius is labeled 25. The tetrahedron's edges are labeled 30 and 35. A point P is marked on one of the edges.
- Bottom left: A circle with a point P on its circumference. The circle's radius is labeled 25. The point P is labeled with coordinates (a+b, 2a).
- Bottom center: A circle with a point P on its circumference. The circle's radius is labeled 25. The point P is labeled with coordinates (a+b, 2a).
- Bottom right: A diagram of a tetrahedron with a point P inside. The tetrahedron's edges are labeled 30 and 35. A point P is marked on one of the edges.

Equations and Calculations:

$$AB = 30, AC = 35$$

$$2\sqrt{2a^2 + b^2} = 2a + 2b$$

$$\sqrt{2(a^2 + b^2)} = a + b, a = 6$$

$$CO \cdot BP + OP \cdot BC = BO \cdot CP$$

$$OP \cdot BC = BO \cdot (CP - 5)$$

$$\angle P = 25^\circ$$

$$4r^2 = 4h^2 + (2a - b)^2$$

$$4r^2 = (a + b)^2$$

$$2r = a + b, 625 + 625 + 2 \cos 2\alpha \cdot 625 = 900$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{14}{25} = -\frac{14}{25}$$

$$AP + BC = AB + CD \sin 2\alpha =$$

$$1 - 2 \sin^2 \alpha = -\frac{7}{25}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$x^2 + 50 \sin^2 \alpha = 169$$

$$\pm x = \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$2x = 2\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$29 = 2\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$

$$169 - 200 + 8\sqrt{169 - 50 + 250 \sin^2 \alpha} = 8\sqrt{169 + 250 \sin^2 \alpha} + c$$

$$\sin^2 2\alpha = 1, \sin 2\alpha = 1, \text{ when } \sin 2\alpha = 1$$

$$1 - \sin^2 2\alpha = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1 1 1 1 K

$$\cos(\pi x - \pi y) = \cos(2\pi x)$$

11.101-K K: 1, 3

$$a \cdot (a-1) = 72$$

$$(a+8)(a-9) = 72 \Rightarrow a = 9$$

60 6 2 11.101.2 = 6.3.11.101

33

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{(x-2)!}{\frac{(x-4)! \cdot 2!}{x!}} = \frac{12}{x \cdot (x-1)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+6}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow xy = (x-2)(y+2)$$

$$\frac{72}{x \cdot (x-1)} = \frac{(x-2)!}{\frac{(x-4)! \cdot (x-2)!}{x!}} = \frac{x \cdot (x-1)}{(x-2)! \cdot (x-2)!}$$

x, y > 0

$$0 = 2x - 2y - 4$$

$$x = y + 2$$

$$\sin \pi x + \sin \pi y$$

$$(y+2)^3 - y^3 - 6y(y+2)$$

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6y^2 - 12y = 8$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x + \cos \pi x \cos \pi y = \cos^2 \pi x$$

$$\cos(\pi y - \pi x) = \cos \pi x \Rightarrow \sin \pi x = \cos \pi y$$

$$\pi(x - \pi y) \quad x = y$$

$$0 = (\cos \pi x - \cos \pi y)$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad x = 0$$

$$\arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 1, y = 2$$

$$\frac{C_x^4}{6 \cdot \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4}} = \frac{C_{x-2}^{a-2}}{C_x^a}$$

$$\frac{(x-2)!}{2 \cdot (x-4)!} = \frac{(x-2)! \cdot 6}{x! \cdot 2 \cdot 4!} = \frac{(x-1)x}{8}$$

$$= \frac{(x-2)!}{\frac{(x-4)! \cdot (x-2)!}{x!}} = \frac{(x-2)!}{x!} \cdot a \cdot (a-1)$$