



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a, a \in \mathbb{Z}, a \in [1; 9]$$

101 - простое, $\Rightarrow B \cdot C : 101$, т.к. $a \neq 101$ и $A \cdot B \cdot C = x^2, x \in \mathbb{N}$

$C \neq 101$, т.к. $C \in [10; 99]$, $C \in \mathbb{Z}$

↓

$B: 101$. Трехзначные числа, кратные 101:
и члены другие.

101
 202
 303
 404
 505
 606
 707
 808
 909

Когда бы одна из цифр $B - 2$, $\Rightarrow B = 202$

$$A \cdot B = 101^2 \cdot 11 \cdot a \cdot 2, \Rightarrow C : 11 \text{ т.к. } A \cdot B \cdot C = x^2, x \in \mathbb{N} \text{ и } a \neq 11$$

двузначные числа, кратные 11:
и члены другие.

11
 22
 33
 44
 55
 66
 77
 88
 99

Когда бы одна из цифр $C - 3$, $\Rightarrow C = 33$

$$A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot a \cdot 2 \cdot 3, \Rightarrow a : 6, \text{ т.к. } A \cdot B \cdot C = x^2, x \in \mathbb{N}$$

$$a \in [1; 9] \text{ и } a : 6, \Rightarrow a = 6,$$

$A = 6666$; $B = 202$; $C = 33$ и члены другие.

Ответ: $\{A = 6666; B = 202; C = 33\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy} \quad x \neq 0; y \neq 0$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} \quad x \neq 1; y \neq -1$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$(x+y+2)(xy+x-y-1) - (x+y+2)xy = 0$$

$$(x+y+2)(xy(x-y-1)) = 0, \Rightarrow \text{либо } (x+y+2)=0, \text{ либо } (x-y-1)=0, \text{ либо } xy=0$$

$$x^3 - y^3 - 3xy = (x-y-1)(x^2 + y^2 + x - y + xy + 1)$$

$$x^3 - y^3 - 3xy - 1 = (x-y-1)(x^2 + y^2 + x - y + xy + 1), //$$

$$x^3 - y^3 - 3xy = (x-y-1)(x^2 + y^2 + x - y + xy + 1) + 1$$

Рассмотрим $x+y+2=0$:

$$x = -2 - y; y > 0, \Rightarrow x < 0, \text{ противоречие.}$$

Рассмотрим $x-y-1=0$, т.к. $(x+y+2)(x-y-1)=0$:

Рассмотрим возможное, например $\{x=2; y=-1\}$.

$$x^3 - y^3 - 3xy = (x-y-1)(x^2 + y^2 + x - y + xy + 1) + 1$$

$$y^3 - y^3 - 3xy = 1, \text{ т.к. } (x-y-1)=0$$

Рассмотрим, что ранее значение получило возможно, например $\{x=2; y=-1\}$:
 $\boxed{8-1-6=1}$

Других значений нет, т.к. доказано, что $(x-y-1)=0$. Отсюда $M=1$.

L



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение $y \geq 0$

$$2) X = -(2n - 2)$$

$$Y = \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$$

Решение $y < 0$

$$1) X = -\frac{1}{3}(2n - 1)$$

$$X = \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\} \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \\ 0 < \frac{1}{3}; 0 < \frac{3}{3}; 0 < \frac{1}{3}; 0 > -\frac{1}{3}; 0 > -\frac{3}{3}; 0 > -1$$

$$2) X = -(2n - 1)$$

$$X \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$$

Решение $y = -1$

$$1) X = -\frac{1}{3}(2n - 2)$$

$$X \in \{-5; -3; 0; 2; 4\} \quad \checkmark \quad \checkmark \\ -\frac{1}{3} < \frac{1}{3}; -\frac{1}{3} < \frac{2}{3}; -\frac{1}{3} < 0; -\frac{1}{3} > -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3} > -\frac{4}{3}$$

$$2) X = -2n$$

$$X \in \{-5; -3; 0; 2; 4\}$$

Решение $y = -2$

$$1) X = -\frac{1}{3}(2n - 3)$$

$$X \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\} \quad \checkmark \quad \checkmark \\ -\frac{2}{3} < -1; -\frac{2}{3} < \frac{3}{3}; -\frac{2}{3} < \frac{1}{3}; -\frac{2}{3} < -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3} > -\frac{3}{3}; -\frac{2}{3} > -1$$

Решение $y = -3$

$$2) X = -(2n + 1)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рисунок $y = -3$

$$1) x = -\frac{1}{3}(2n+4)$$

$$x = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$$

$$-\frac{3}{4} < \frac{4}{5}; -\frac{3}{4} < \frac{2}{5}; -\frac{3}{4} < 0; -\frac{3}{4} < -\frac{2}{5}; -\frac{3}{4} > -\frac{4}{5}$$

Рисунок $y = -4$

$$2) x = -(2n+2)$$

$$x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$$

Рисунок $y = -4$

$$1) x = -\frac{1}{3}(2n+5)$$

$$x = \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$$

$$-1 < 1; -1 < \frac{3}{5}; -1 < \frac{1}{5}; -1 < -\frac{1}{5}; -1 < -\frac{3}{5}; -1 < -1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0) x \in [-5; 5], \text{ r.v. } \frac{x}{5} \in [-1; 1]$$

$$y \in [-4; 4], \text{ r.v. } \frac{y}{4} \in [-1; 1]$$

Рисунок $y = 4$:

$$1) X = -\frac{1}{3}(3+2n), n \in \mathbb{Z}$$

$$X = -1 + \frac{2}{3}n, n \in \mathbb{Z} \quad n \geq 3, \text{ т.к. } X \text{ - целое}$$

$$\text{X} \subset \{ -5; -3; -1; 1; 3; 5 \}$$

$$\arccos \frac{1}{5} = 0 \quad 1.1) \arcsin(-1) = \frac{3\pi}{2}, \text{ не подходит}$$

$$1.2) \arcsin\left(\frac{-3}{5}\right) < \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark \quad 1.6) \arcsin(1) < \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$1.3) \arcsin\left(\frac{-1}{5}\right) < \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$1.4) \arcsin\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$1.5) \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$2) X = - (2n-5), n \in \mathbb{Z}$$

$X \subset \{ -5; -3; -1; 1; 3; 5 \}$ и будем рассматривать уже угловые изображения

$$\arccos x \geq 0, \quad 1.1) \arcsin\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$1.2) \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$1.3) \arcsin(1) < \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark$$

Рисунок $y = 3$:

$$1) X = -\frac{1}{3}(2+2n), n \in \mathbb{Z}$$

$$X = \{ -9; -2; 0; 2; 4 \}$$

$$\arccos x + \arcsin(-x) = \frac{3\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{c} y \\ \swarrow \\ \frac{y}{4} > -\frac{x}{5} \end{array}$$

Решение $y = 3$

1) $x = -\frac{1}{3}(2+2n), n \in \mathbb{Z}$

$$x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$$

$$\frac{3}{4} < \frac{9}{5} \Rightarrow \text{неверно}$$

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{5}; \frac{3}{4} > 0; \frac{3}{4} > -\frac{2}{5}; \frac{3}{4} > -\frac{4}{5}$$

2) $x = -(2n-4), n \in \mathbb{Z}$

$$x = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$$

Решение $y = 2$:

1) $x = -\frac{1}{3}(1+2n), n \in \mathbb{Z}$

$$x = \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$$

$$\frac{1}{2} < 1; \frac{1}{2} < \frac{3}{5}; \frac{1}{2} > \frac{1}{5}; \frac{1}{2} > -\frac{1}{5}; \frac{1}{2} > -\frac{3}{5}; \frac{1}{2} > -1$$

2) $x = -(2n-3), n \in \mathbb{Z}$

$$x \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$$

Решение $y = 1$:

1) $x = -\frac{1}{3}(1+2n), n \in \mathbb{Z}$

$$x = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$$

$$\frac{1}{4} < \frac{4}{5}; \frac{1}{4} < \frac{2}{5}; \frac{1}{4} > 0; \frac{1}{4} > -\frac{2}{5}; \frac{1}{4} > -\frac{4}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a) t = \pi x ; r = \pi y$$

$$\sin^2 t + \sin t \cdot \sin r = \cos^2 t + \cos t \cdot \cos r$$

$$\sin^2 t - \cos^2 t = \cos t \cdot \cos r - \sin t \cdot \sin r$$

$$(\sin t + \cos t)(\sin t - \cos t) = \cos(t+r)$$

$$\sin t \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos t \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \cos(t + \frac{\pi}{4}) ; \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\sin t \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos t \cdot \cos \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\cos(t + \frac{\pi}{4})}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cos(t + \frac{\pi}{4})$$

$$\frac{\sin t \sin \frac{\pi}{4} - \cos t \cdot \cos \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{-\cos(t + \frac{\pi}{4})}{\cos \frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2} \cos(t + \frac{\pi}{4})$$

$$-2 \cos(t - \frac{\pi}{4}) \cos(t + \frac{\pi}{4}) = \cos(2t)$$

$$2 \cos(t - \frac{\pi}{4}) \cos(t + \frac{\pi}{4}) = \cos 2t + \cos \frac{\pi}{2} = \cos 2t, \text{ o.t. } \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$-\cos 2t = \cos(t+r)$$

$$\cos(\pi - 2t) = \cos(t+r)$$

$$1) \pi - 2t = \pm(t+r) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1) \pi - 3t = k + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{1}{3}(y + 2n - 1), n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \pi - t = k + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -(2n - y - 1), n \in \mathbb{Z}$$

Ober: $\begin{cases} x = -\frac{1}{3}(y + 2n - 1), n \in \mathbb{Z} \\ x = -(2n - y - 1), n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Вероятность попасть Петре и Васе на компьютер!
Пусть x -классиков

$$\text{P} \left(\frac{\binom{x}{x-2}}{\binom{x}{x}} \right) = \frac{\frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}}{\frac{x!}{(x-4)!4!}} = \frac{(x-2)! \cdot (x-4)! \cdot 4!}{2! (x-4)! \cdot x!} = \frac{4 \cdot 3}{(x-1)x} = \frac{12}{x(x-1)}$$

$\binom{x}{x}$ - всего вариантов раздать 4 билета 11-классикам.

Пусть Вася и Петя уже получили $x-2$ билета 11-классиков, тогда осталось $4-2=2$ билета

$\binom{x}{x-2}$ - всего вариантов раздать 2 билета 11-классикам Васи и Пети.

Пусть получили y билетов, тогда вероятность попасть Петре и Васе

на компьютер, т.к. всего 11-классиков и начали есть:

$$\text{P} \left(\frac{\binom{x}{x-2+y}}{\binom{x}{x}} \right) = \frac{\frac{(x-2+y)!}{(2+y)!(x-4-y)!}}{\frac{x!}{(4+y)!(x-4-y)!}} = \frac{(x-2)!(4+y)!(x-4-y)!}{x!(2+y)!(x-4-y)!} = \frac{(4+y)(3+y)}{x(x-1)}$$

$\binom{x}{x}$ - всего вариантов раздать $4+y$ билета 11-классикам.

Петя Вася и Петя уже получили билеты, $x-2$ всего 11-классиков меньше,

тогда осталось $4+y-2=y+2$ билета

$\binom{x}{x-2}$ - всего вариантов раздать $y+2$ билета 11-классикам Васи и Пети.

$$\text{По условию } \text{P} \left(\frac{(4+y)(3+y)}{x(x-1)} \cdot \frac{2}{5} \right) = \frac{12}{x(x-1)} \Rightarrow y^2 + 7y + 12 = 30$$

$$y^2 + 7y - 18 = 0 \quad y^2 + 7y - 18 = (y+9)(y-2) = 0 \quad y > 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$$

выделение билетов в пользу Пети $y=2$ б. ответ: 6.

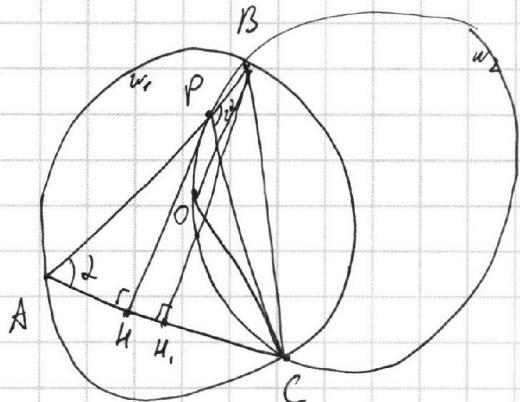
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$AP = \frac{15}{2} \quad BP = 5 \quad AC = 9$$

Русло $\angle BAC = \alpha$, т.к.

$\angle BOC = 2\alpha$, т.к. опирается на эту же

дугу и имеет вершину в центре данной
окружности

$\angle BOC = \angle BPC$, т.к. опираются на одну дугу w_2

тогда $\angle BPC = 2\alpha$, тогда $\angle APC = 180^\circ - \angle BPC = 180^\circ - 2\alpha$

$\angle PCA = 180^\circ - \angle PAC - \angle CAP = 180^\circ - 180^\circ + 2\alpha - \alpha = \alpha \Rightarrow \angle ACP = \angle PAC$,

$\triangle APC$ -равнобедр. $AP = PC = \frac{15}{2}$

РК-биссектриса $\angle APC$ $AK = KC = \frac{9}{2}$, т.к. $\triangle ABC$ -равнобедр. и РК-биссектриса

$$RK = \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{81}{4}} = 6$$

биссектрисы

BK -биссектриса $\angle ABC$, $BK \parallel RK$, т.к. $\angle PHA = \angle BKA$.

$\triangle APH \sim \triangle BKH$, т.к. биссектрисы, $\Rightarrow \triangle BKH \sim \triangle PHK$, \Rightarrow

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PH}{BK} \quad \frac{15}{15} = \frac{6}{BK}, \Rightarrow BK = 6$$

$$S_{\triangle ABC} = BK \cdot AC \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} = 27$$

Ответ 45.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

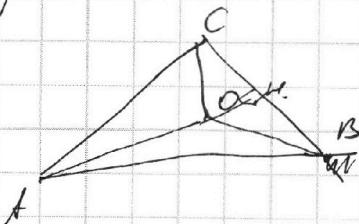


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим $\triangle ABC$ - равнобедренный с основанием AB .



$$AB = BC = AC = a$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \text{ т.к. } \triangle ABC \text{ - равносторонний.}$$

Рассмотрим $\triangle ABC$. Рассстояние от центра O до любой из сторон, т.к. от всех ребер, касающихся шара с радиусом r .

Т.к. расстояния равны, то для $\triangle ABC$ они лежат на прямой ABC , т.к. $\triangle ABC$ - равнобедренный.

Рассмотрим O - центр пересечения высот $\triangle ABC$, тогда $AO = BO = CO = r$, т.к. $\triangle ABC$ - равнобедренный.

$$\text{Найдем высоту } AH, AH = \frac{\sqrt{3}}{2} a; \text{ найдем } OB = \frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$OK = \frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} a$$

Центр O и центр r находятся в одной точке, т.к. расстояния от центра основания до центра и от вершины до центра равны, а также равны расстояния от центра вершины основания до центра и от центра основания до центра.

Т.к. расстояние от центра до центра и от центра до центра равно! ^{на базовом уравнении} расстояние от центра до центра r и R равно $\sqrt{3}r$, т.к. $OK = \frac{\sqrt{3}}{6} a$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сущна площадь сайдового ураимб $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right) \cdot a \cdot 4 = \frac{2\sqrt{3}a^2}{3}$

Рога откачие плаша ду сайдовай поверхности с шанды аштено оштаваш

$$\frac{2\sqrt{3}a^2}{3} : \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{8}{3}$$

Окоф: $\frac{8}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4
X

$$\frac{\binom{x}{2}}{\binom{4}{x}} = \frac{\cancel{x!} \cdot \cancel{2!(x-2)!}}{\cancel{x!} \cdot \cancel{4!(x-4)!}} = \frac{4!(x-4)!}{7!(x-2)!} = \frac{12}{(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{\binom{x-2}{2}}{\binom{4}{x}} = \frac{(x-2)!}{\cancel{2!(x-4)!} \cdot \cancel{x!}} = \frac{(x-2) \cdot (x-3) \cdot \cancel{x!} \cdot \cancel{4!}}{2!(x-4)! \cdot x!} = \frac{12}{(x-1)x}$$

$$\frac{\binom{x-2}{2+y}}{\binom{4+y}{x}} = \frac{(x-2)!}{\cancel{(2+y)!} \cdot \cancel{(x-4-y)!} \cdot \cancel{x!}} = \frac{(x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-5) \cdot \cancel{(x-6)!} \cdot \cancel{(2+y)!}}{\cancel{(y+3)!} \cdot \cancel{(x-4-y)!} \cdot \cancel{(2+y)!}} =$$

$$= \frac{(y+3)(y+4)}{x(x-1)}$$

$$\frac{(y+3)(y+4)}{x(x-1)} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{x(x-1)}$$

автcosx +

$$(y+3)(y+4) = 30$$

$$y^2 + 7y + 18 - 30 = 0$$

$$y = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{2} = \frac{-7 \pm 11}{2} = \begin{cases} 2 \\ -9 \end{cases}$$

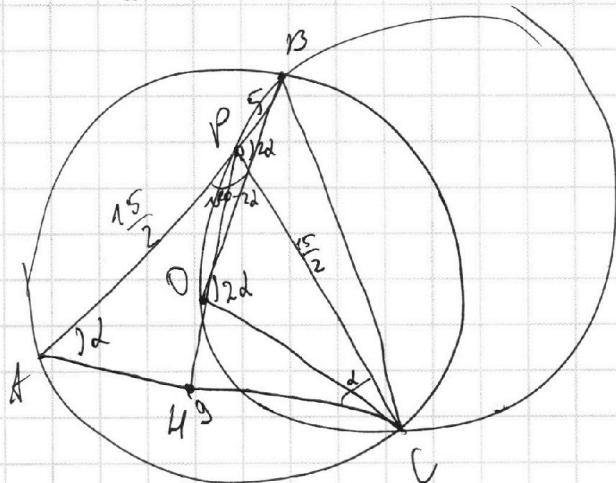
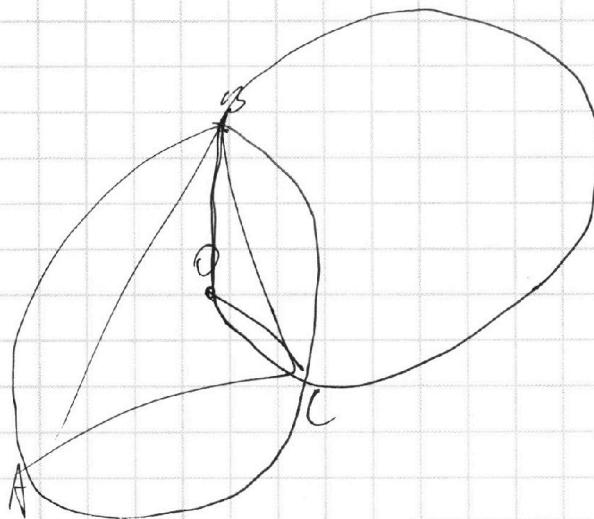


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle BOC = \angle BPC = \frac{\angle BAC}{2}$$

$\angle BOP$

$$x^2 = 81 + \frac{625}{4} - 9 \cdot 25 \cdot \cos \alpha$$

$$x^2 = 25 + \frac{225}{4} - 9 \cdot 15 \cdot \cos 2\alpha$$

$$56 + 100 = 9 \cdot 25 \cdot \cos \alpha - 9 \cdot 15 \cos 2\alpha$$

$$52 = 15(5 \cos \alpha - 3 \cos 2\alpha)$$

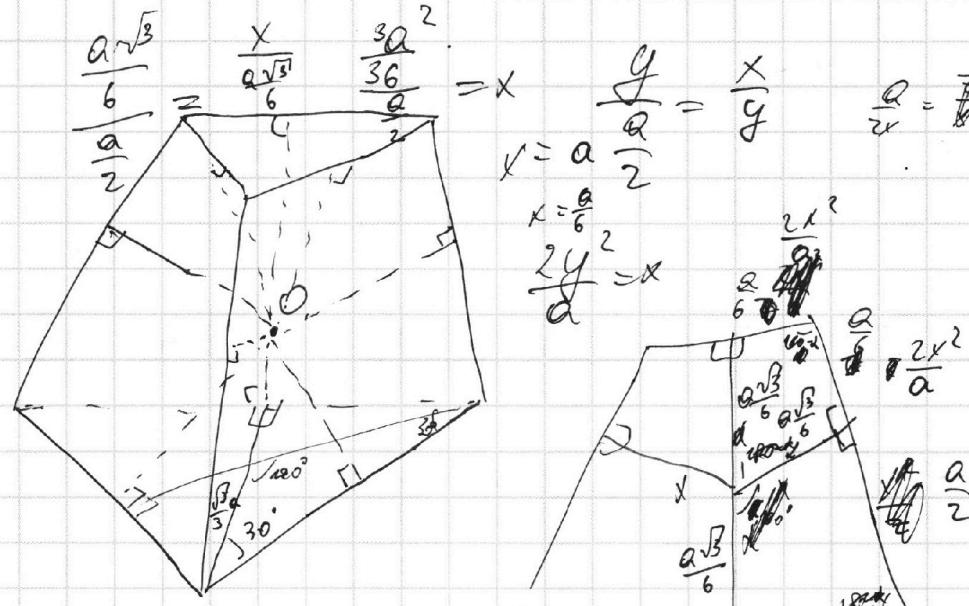


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a^2 = b^2 - 2b^2 \cdot \cos 120^\circ$$

$$a^2 = 3b^2 \quad \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$a \sqrt{3} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{x^2}{a^2} = \frac{2x^2}{a^2}$$

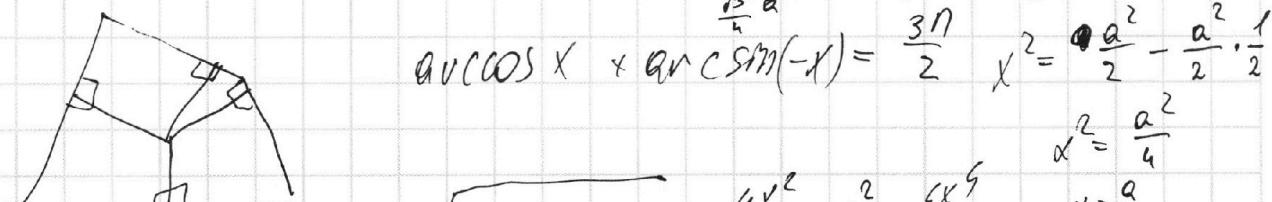
$$g \in [-4; 4]$$

$$k \in [-5; 5]$$

$$\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right] \quad \frac{x}{z} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{2\sqrt{3}a^2}{\frac{3}{\sqrt{3}a^2}} = \frac{8\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{3}$$

$$\arccos x + \arcsin(-x) = \frac{3\pi}{2} \quad x^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2}$$



$$\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}a = a - \frac{2a}{6} - \frac{2a}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} \left(\frac{a}{3} + \frac{a}{3} \right)$$

$$\frac{2\sqrt{3}a^2}{9} \cdot 3 = \frac{2\sqrt{3}a^2}{3}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$x = \frac{a}{2}$$

$$\frac{a^2}{4}$$

$$= \cos 30^\circ$$

$$\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{a}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - y^3 - 3xy$$

$$-\cos 2f \cos(f+k) \quad (0 \rightarrow 0) \cdot 0$$

$$2f = f+k + 2\pi n$$

$$(x+y+2)(x^2-y^2) \cancel{xy}$$

$$\cos(\Pi-2f) = \cos(f+\frac{\Pi}{2})$$

$$(x^3 + x^2y + 2x^2 - xy^2) \cancel{(y^3 - 2y^2)} \cancel{x^2y - xy^2} \cancel{x^2y - xy^2}$$

$$f = \frac{\Pi}{4} - \frac{2f - \frac{\Pi}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$2f = f+k + 2\pi n$$

$$\cancel{f} \cancel{2\pi n} \frac{1}{2} = \cos k$$

$$f = k + 2\pi n \quad x = 2-y$$

$$\cos(xy) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\Pi x = \Pi y + 2\pi n \quad x=4 \quad y=-2$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$x = y+2n$$

$$69 + 8 +$$

$$\Pi - 2f = f+k + 2\pi n \quad x = -2$$

$$8 - 1 - 6 \quad -\cos 2f$$

$$\Pi - 2f = f+k + 2\pi n \quad x = \frac{1}{2} \quad y = -2$$

$$\sin x + \sin y = \cos(\Pi - 2f) = -\cos 2f$$

$$\Pi - 3f = k + 2\pi n \quad x = \frac{1}{2} \quad y = -2$$

$$\sin x + \sin y$$

$$\Pi x = f \quad x = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}$$

$$2 \cos(\frac{\Pi}{4}) \cos(\frac{3\Pi}{4}) =$$

$$\Pi y = k \quad y = -\frac{1}{3}(y+2n-1)$$

$$\sin^2 f + \sin f \cdot \sin k = \cos^2 f + \cos f \cdot \cos k \quad 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} = -1$$

$$\sin^2 f \cdot \cos^2 f = \cos f \cdot \cos k - \sin f \cdot \sin k$$

$$\cos \sin(f+k)$$

$$2 \sin^2 f - 1 = (\cos f + \cos k)(\sin f - \sin k)$$

$$2 \cos(f - \frac{\Pi}{2}) \cos(f + \frac{\Pi}{2})$$

$$y = 2n$$

$$\cos 2f + \cos \Pi$$

$$2 \sin^2 f = \cos(f+k)$$

$$1 \quad 2 \quad 1 - 2 \cos^2 f$$

$$-2 \cos(f - \frac{\Pi}{4}) \cos(\frac{\Pi}{4}) = \cos(f+k)$$

$$\sin f - \cos f$$

$$-\cos f + \cos \frac{\Pi}{2} \quad 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\frac{\cos(f + \frac{\Pi}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{\cos(f + \frac{\Pi}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \cos(f+k)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 2000 \cdot a + 100 \cdot 6a + 10a + a = 1111 \cdot a = 11 \cdot a \cdot 101$$

$$1) C = 30 + l$$

$$B \cdot C : 10111$$

$$1.1) B = 200 + b_1 + b_2$$

$$B = 202$$

$$(x \cdot y - 1)(x^2 + y^2 + x - y + xy + 1) =$$

$$= x^3 - yx^2 - x^2 + y^2x - y^3 - y^2 +$$

$$A \cdot B = 201^2 \cdot 2 \cdot a \cdot 11 \Rightarrow C : 11, \Rightarrow C = 33$$

$$A \cdot B \cdot C = 201^2 \cdot 2 \cdot 11^2 \cdot 3 \cdot a$$

$$+ x^2 - xy + x - xy + y^2 + y +$$

$$+ y^2 - xy \quad xy + x - y - 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{xy+x-y-1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{y+x+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$(y+x+2)(x-1)(y+1) = (y+x+2)xy$$

$$1.2) \quad 1 - \frac{1}{3} = 2 - y$$

$$(y+x+2)(xy + x - y - 1 - xy) = 0$$

$$\frac{2}{3} = 2 - y$$

$$\frac{1}{3} = 1 - y$$

$$\frac{1}{3} = 2 - y - 1$$

$$(y+x+2)(x - y - 1) = 0$$

$$\frac{x^3 - y^3}{x^3} \quad \frac{x-y-1}{x^2}$$

$$\frac{13}{14} = 2 - y$$

$$\frac{1}{14} = 2 - y$$

$$(x-y-1)(x^2 + y^2 + x - y + xy + 1)$$

$$\frac{1}{14} \quad \frac{15}{14}$$

$$x^3 - x^2y - x^2 - xy^2 + y^3 -$$

$$- x^2y - xy - y^2 + x - y - 1$$