



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a, \quad a \in \mathbb{Z}, a \in [1; 9]$$

101 - простое, $\Rightarrow B \cdot C : 101$, т.к. $a \not\equiv 101$ и $A \cdot B \cdot C = x^2, x \in \mathbb{N}$

$C \not\equiv 101$, т.к. $C \in [10; 99], C \in \mathbb{Z}$

$B : 101$. Трехзначные числа, кратные 101: $\begin{matrix} 101 \\ 202 \\ 303 \\ 404 \\ 505 \\ 606 \\ 707 \\ 808 \\ 909 \end{matrix}$ и ничего другого.

какая бы одна из цифр $B - 2$, $\Rightarrow B = 202$

$A \cdot B = 101^2 \cdot 11 \cdot a \cdot 2$, $\Rightarrow C : 11$ т.к. $A \cdot B \cdot C = x^2, x \in \mathbb{N}$ и $a \not\equiv 11$

двузначные числа, кратные 11: $\begin{matrix} 11 \\ 22 \\ 33 \\ 44 \\ 55 \\ 66 \\ 77 \\ 88 \\ 99 \end{matrix}$

какая бы одна из цифр $C - 3$, $\Rightarrow C = 33$

$A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot a \cdot 2 \cdot 3$, $\Rightarrow a : 6$, т.к. $A \cdot B \cdot C = x^2, x \in \mathbb{N}$

$a \in [1; 9]$ и $a : 6$, $\Rightarrow a = 6$,

$A = 6666$; $B = 202$; $C = 33$ и ничего другого.

Ответ: $\{A = 6666; B = 202; C = 33\}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy} \quad x \neq 0; y \neq 0$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} \quad x \neq 1; y \neq -1$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$(x+y+2)(xy+x-y-1) - (x+y+2)xy = 0$$

$$(x+y+2)(xy+x-y-1) = 0, \Rightarrow \text{либо } (x+y+2)=0, \text{ либо } (x-y-1)=0, \text{ либо } \text{оба} = 0$$

$$x^3 - y^3 - 3xy - 1 = (x-y-1)(x^2 + y^2 + x - y + xy + 1)$$

$$x^3 - y^3 - 3xy - 1 = (x-y-1)(x^2 + y^2 + x - y + xy + 1), //$$

$$x^3 - y^3 - 3xy = (x-y-1)(x^2 + y^2 + x - y + xy + 1) + 1$$

Пусть $x+y+2=0$:

$$x = -2-y; y > 0, \Rightarrow x < 0, \text{ противоречие.}$$

Пусть $x-y-1$ Тогда $x-y-1=0$, т.к. $(x+y+2)(x-y-1)=0$:

Также возможно, например $\{x=2; y=1\}$.

$$x^3 - y^3 - 3xy = (x-y-1)(x^2 + y^2 + x - y + xy + 1) + 1$$

$$x^3 - y^3 - 3xy = 1, \text{ т.к. } (x-y-1)=0$$

Покажем, что также можно получить, например $\{x=2; y=1\}$:

$$8 - 1 - 6 = 1$$

Другие значения не, т.к. доказано, что $(x-y-1)=0$. Ответ: $M=1$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Реша $y=0$

2) $x = -(2n-2)$

$x = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$

Реша $y=0$

1) $x = -\frac{1}{3}(2n-1)$

$x = \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$

$0 < -1; 0 < \frac{3}{5}; 0 < \frac{1}{5}; 0 > -\frac{1}{5}; 0 > -\frac{3}{5}; 0 > -1$

2) $x = -(2n-1)$

$x = \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$

Реша $y=-1$

1) $x = -\frac{1}{3}(2n-2)$

$x = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$

$-\frac{1}{4} < \frac{1}{5}; -\frac{1}{4} < \frac{2}{5}; -\frac{1}{4} < 0; -\frac{1}{4} > -\frac{2}{5}; -\frac{1}{4} > -\frac{4}{5}$

2) $x = -2n$

$x = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$

Реша $y=-2$

1) $x = -\frac{1}{3}(2n-3)$

$x = \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$

$-\frac{2}{5} < -1; -\frac{2}{5} < \frac{3}{5}; -\frac{2}{5} < \frac{1}{5}; -\frac{2}{5} < -\frac{1}{5}; -\frac{2}{5} > -\frac{3}{5}; -\frac{2}{5} > -1$

Реша $y=-3$

2) $x = -(2n+1)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☒☐☐☐☐

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Реша $y = -3$!

Ответ: 2 ⁴

$$1) x = -\frac{1}{3}(2n-4)$$

$$x = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$$

$$-\frac{3}{4} < \frac{4}{5}; -\frac{3}{4} < \frac{2}{5}; -\frac{3}{4} < 0; -\frac{3}{4} < -\frac{2}{5}; -\frac{3}{4} > -\frac{4}{5}$$

Реша $y = -4$!

$$2) x = -(2n+2)$$

$$x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$$

Реша $y = -4$

$$1) x = -\frac{1}{3}(2n-5)$$

$$x = \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$$

$$-1 < 1; -1 < \frac{2}{5}; -1 < \frac{1}{5}; -1 < -\frac{1}{5}; -1 < -\frac{3}{5}; -1 < -1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$d) x \in [-5; 5], \text{ т.к. } \frac{x}{5} \in [-1; 1]$$

$$y \in [-4; 4], \text{ т.к. } \frac{y}{4} \in [-1; 1]$$

Решаю $y=4$:

$$1) x = -\frac{1}{3}(3+2n), n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -1 + \frac{2}{3}n, n \in \mathbb{Z} \quad n:3, \text{ т.к. } x - \text{целое}$$

$$x \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$$

$$\arccos \frac{1}{4} = 0 \quad 1.1) \arcsin(-1) = \frac{3\pi}{2}, \text{ не подходит}$$

$$1.2) \arcsin(-\frac{3}{5}) < \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark \quad 1.6) \arcsin(1) < \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$1.3) \arcsin(-\frac{1}{5}) < \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$1.4) \arcsin(\frac{1}{5}) < \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$1.5) \arcsin(\frac{3}{5}) < \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$2) x = -(2n-5), n \in \mathbb{Z}$$

$x \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$ и будем рассматривать те угловые значения

$$\arccos x = 0$$

$$1.1) \arcsin(\frac{1}{5}) < \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$1.2) \arcsin(\frac{3}{5}) < \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$1.3) \arcsin(1) < \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark$$

Решаю $y=3$:

$$1) x = -\frac{1}{3}(2+2n), n \in \mathbb{Z}$$

$$x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$$

$$\arccos x + \arcsin(-x) = \frac{3\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{y}{4} > \frac{x}{5}$$

Решь $y=3$

$$1) x = -\frac{1}{3}(2+2n), n \in \mathbb{Z}$$

$$x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$$

$$\frac{3}{4} < \frac{4}{5} \Rightarrow \text{нельзя}$$

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{5}; \frac{3}{4} > 0; \frac{3}{4} > -\frac{2}{5}; \frac{3}{4} > -\frac{4}{5}$$

$$2) x = -(2n-4), n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$$

Решь $y=2$:

$$1) x = -\frac{1}{3}(1+2n), n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \{-\frac{1}{3}; -1; -\frac{5}{3}; -3; -\frac{7}{3}; -5\}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{5}; \frac{1}{2} < \frac{3}{5}; \frac{1}{2} > \frac{1}{5}; \frac{1}{2} > -\frac{1}{5}; \frac{1}{2} > -\frac{3}{5}; \frac{1}{2} > -1$$

$$2) x = -(2n-3), n \in \mathbb{Z}$$

$$x \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$$

Решь $y=1$:

$$1) x = -\frac{1}{3}(1+2n), n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \{-\frac{1}{3}; -1; -\frac{5}{3}; -3; -\frac{7}{3}; -5\}$$

$$\frac{1}{4} < \frac{4}{5}; \frac{1}{4} < \frac{2}{5}; \frac{1}{4} > 0; \frac{1}{4} > -\frac{2}{5}; \frac{1}{4} > -\frac{4}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) t = \pi x; k = \pi y$$

$$\sin^2 t + \sin t \cdot \sin k = \cos^2 t + \cos t \cdot \cos k$$

$$\sin^2 t - \cos^2 t = \cos t \cdot \cos k - \sin t \cdot \sin k$$

$$(\sin t + \cos t)(\sin t - \cos t) = \cos(t+k)$$

$$\sin t \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos t \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \cos(t - \frac{\pi}{4}); \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\sin t \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos t \cdot \cos \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\cos(t - \frac{\pi}{4})}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cos(t - \frac{\pi}{4})$$

$$\frac{\sin t \sin \frac{\pi}{4} - \cos t \cdot \cos \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{-\cos(t + \frac{\pi}{4})}{\cos \frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2} \cos(t + \frac{\pi}{4})$$

$$-2 \cos(t - \frac{\pi}{4}) \cos(t + \frac{\pi}{4}) = \cos(t+k)$$

$$2 \cos(t - \frac{\pi}{4}) \cos(t + \frac{\pi}{4}) = \cos 2t + \cos \frac{\pi}{2} = \cos 2t, \text{ т.к. } \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$-2 \cos 2t = \cos(t+k)$$

$$\cos(\pi - 2t) = \cos(t+k)$$

$$\pi - 2t = \pm(t+k) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1) \pi - 3t = k + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{1}{3}(y + 2n - 1), n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \pi - t = -k + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -(2n - y - 1), n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = -\frac{1}{3}(y + 2n - 1), n \in \mathbb{Z} \\ x = -(2n - y - 1), n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вероятность попасть Пете и Вале на концерт! Пусть 11-классников x

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{\frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}}{\frac{x!}{4!(x-4)!}} = \frac{(x-2)! \cdot 4! \cdot 4!}{2! \cdot (x-4)! \cdot x!} = \frac{4 \cdot 3}{x(x-1)} = \frac{12}{x(x-1)}$$

C_x^4 - всего вар-ов раздать 4 билета 11-классникам.

C_{x-2}^2 - Пусть Вера и Петя уже получили билеты, $x-2$ - кол-во для 11-классников без них, тогда осталось $4-2=2$ билета

C_{x-2}^2 - кол-во вар-ов раздать 2 билета 11-классникам без Вери и Пети.

Пусть добавили y билетов, тогда вероятность попасть Пете и Вале

на концерт, т.е. кол-во 11-классников и билетов:

$$\frac{C_{x-2}^{2+y}}{C_x^{4+y}} = \frac{\frac{(x-2)!}{(2+y)!(x-4-y)!}}{\frac{x!}{(4+y)!(x-4-y)!}} = \frac{(x-2)! \cdot (4+y)! \cdot (x-4-y)!}{x! \cdot (2+y)! \cdot (x-4-y)!} = \frac{(4+y)(3+y)}{x(x-1)}$$

C_x^{4+y} - всего вар-ов раздать $4+y$ билетов 11-классникам.

Пусть Вера и Петя уже получили билеты, $x-2$ кол-во 11-классников без них, тогда осталось $4+y-2 = y+2$ билета

C_{x-2}^{2+y} - кол-во вар-ов раздать $2+y$ билетов 11-классникам без Вери и Пети.

По условию $\frac{(4+y)(3+y)}{x(x-1)} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{x(x-1)} \Rightarrow y^2 + 7y + 12 = 30$

$$y^2 + 7y - 18 = 0$$

выделим слагаемые $y^2 + 7y - 18 = (y+9)(y-2) = 0$, $y > 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$ выделили билеты в тот же месяц $4+2=6$ Ответ: 6.



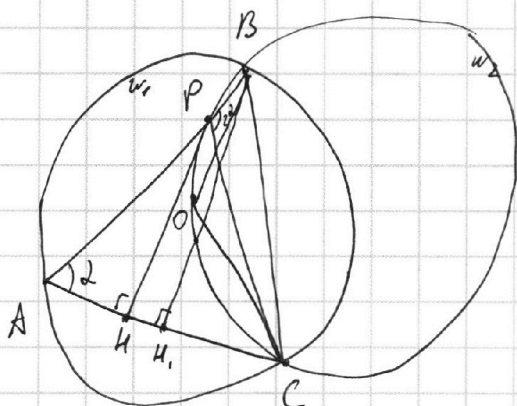
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AP = \frac{15}{2} \quad BP = 5 \quad AC = 9$$

Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда

$\angle BOC = 2\alpha$, т.к. опирается на ту же дугу и имеет вершину в центре дуги $\overset{\text{опр.}}{w_1}$

$\angle BOC = \angle BPC$, т.к. опирается на одну дугу в w_2

тогда $\angle BPC = 2\alpha$, тогда $\angle APC = 180^\circ - \angle BPC = 180^\circ - 2\alpha$

$$\angle PCA = 180^\circ - \angle PAC - \angle CAP = 180^\circ - 180^\circ + 2\alpha - \alpha = \alpha \Rightarrow \angle ACP = \angle PAC$$

$\triangle APC$ - равнобедр. $AP = PC = \frac{15}{2}$

PH - высота $\triangle APC$ $AH = HC = \frac{9}{2}$, т.к. $\triangle ABC$ - равнобедр. и PH - высота

$$PH = \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{81}{4}} = 6$$

BH_1 - высота $\triangle ABC$, $BH_1 \parallel PH$, т.к. $\angle PHA = \angle BH_1A$.

$\angle APH = \angle ABH_1$, т.к. верт., $\Rightarrow \triangle ABH_1 \sim \triangle APH$, $\Rightarrow$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PH}{BH_1} \quad \frac{15}{15} = \frac{6}{BH_1} \Rightarrow BH_1 = 10$$

$$S_{\triangle ABC} = BH_1 \cdot AC \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} = 45$$

Ответ 45.



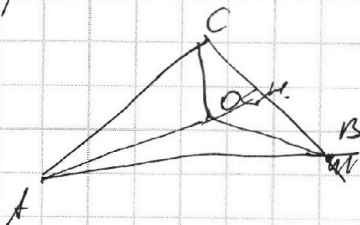
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\triangle ABC$ - искомое основание



$$AB = AC = BC = a$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \text{ т.к. } \triangle ABC - \text{равност.}$$

Пусть R - радиус сферы. Расстояния от центра O до ребер сферичности,

т.к. ребра касаются сферы равны радиусу.

Т.к. расстояния равны, то для $\triangle ABC$ они лежат на прямой перп. $\triangle ABC$, т.к. $\triangle ABC$ - равност.

Пусть O - центр пересечения высот $\triangle ABC$, тогда $AO = CO = BO$, т.к. $\triangle ABC$ - равноб. тр.

$$AH - \text{высота}, AH = \frac{\sqrt{3}}{2} a; \quad OB = \frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$OH = \frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{\sqrt{3}}{6} a$$

центр O и центр ω находятся в одной точке, т.к. расстояния от искомое основание до центра и от вершины до центра равны, а также равны расстояния от вершин вершины основания до центра и от ребер искомое основание до центра.

Т.к. расстояния от вершин до центра и от ребер до центра равно: $\frac{\sqrt{3}}{6} a$ (находим центр ω), перпендикуляр от которого до ребер равны, будут равны $OH = \frac{\sqrt{3}}{6} a$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сумма площадей боковых граней $(\frac{\sqrt{3}}{6}a) \cdot a \cdot 4 = \frac{2\sqrt{3}a^2}{3}$

Тогда отношение площади боковой поверхности к площади
итого основания $\frac{\frac{2\sqrt{3}a^2}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{8}{3}$

Ответ: $\frac{8}{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~14~~

$$\frac{C_x^2}{C_x^4} = \frac{\frac{x!}{2!(x-2)!}}{\frac{x!}{4!(x-4)!}} = \frac{4!(x-4)!}{2!(x-2)!} = \frac{12}{(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{\frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}}{\frac{x!}{4!(x-4)!}} = \frac{(x-2)! (x-4)!}{2!(x-4)! x!} = \frac{12}{(x-1)x}$$

$$\frac{C_{x-2}^{2+y}}{C_x^{4+y}} = \frac{\frac{(x-2)!}{(2+y)!(x-4-y)!}}{\frac{x!}{(4+y)!(x-4-y)!}} = \frac{(x-2)!(4+y)!(x-4-y)!}{x!(x-4-y)!(2+y)!} =$$

$$= \frac{(y+3)(y+4)}{x(x-1)}$$

$$\frac{(y+3)(y+4)}{x(x-1)} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{x(x-1)}$$

$\arccos x +$

$$(y+3)(y+4) = 30$$

$$y^2 + 7y - 18 = 0$$

$$y = \frac{49 \pm \sqrt{49 + 12}}{2} = \frac{-7 \pm 11}{2} = \begin{cases} 2 \\ -9 \end{cases}$$

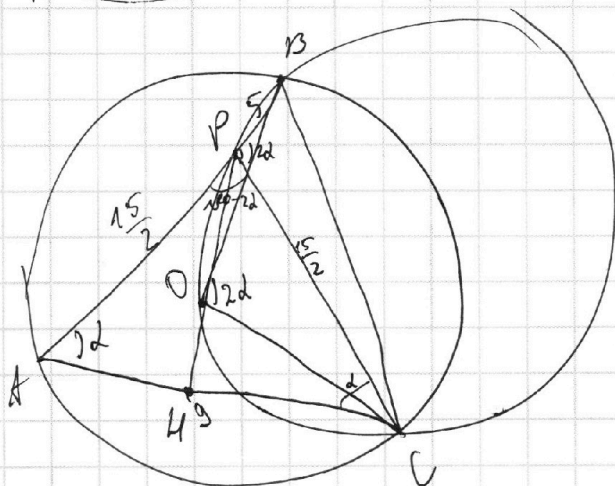
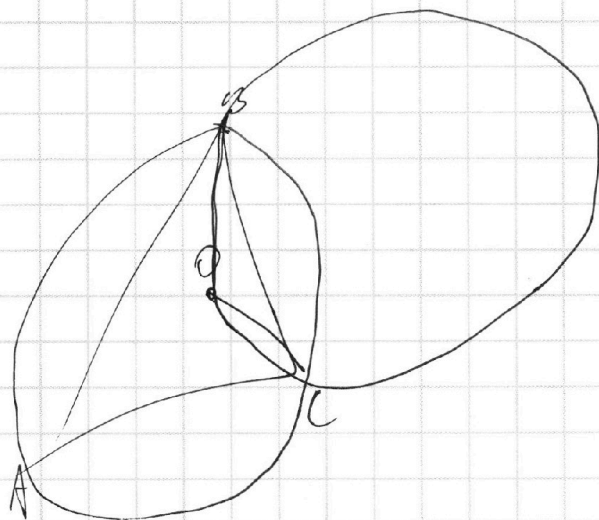


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle BOC = \angle BPC = \frac{\angle BAC}{2}$$

$\angle BPC$

$$x^2 = 81 + \frac{625}{4} - 9 \cdot 25 \cdot \cos \alpha$$

$$x^2 = 25 + \frac{225}{4} - 9 \cdot 15 \cdot \cos 2\alpha$$

$$56 + 100 = 9 \cdot 25 \cdot \cos \alpha - 9 \cdot 15 \cos 2\alpha$$

$$52 = 15(5 \cos \alpha - 3 \cos 2\alpha)$$

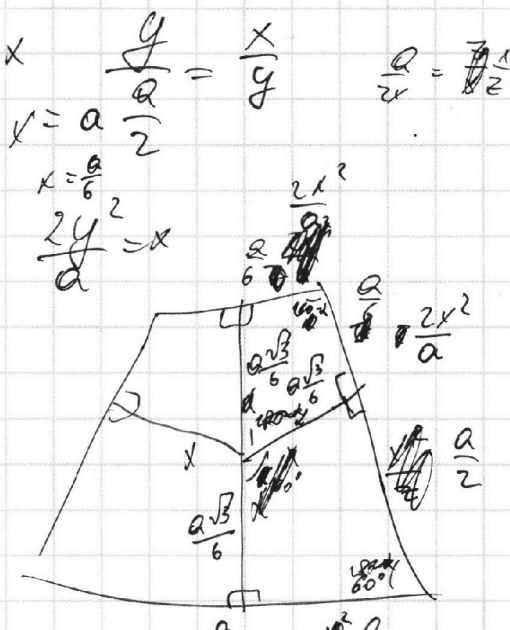
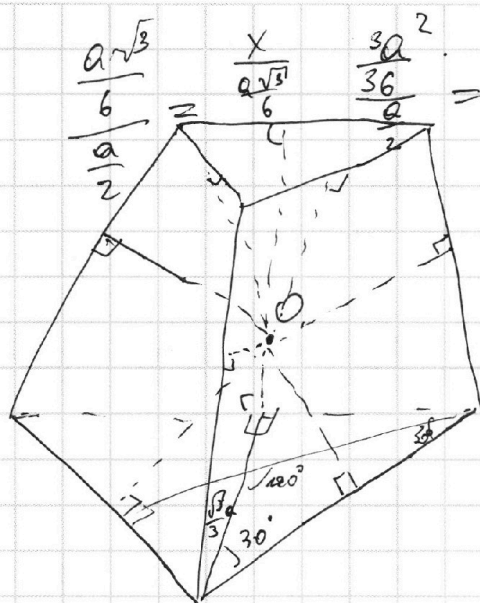


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a^2 = 2b^2 - 2b^2 \cdot \cos 120^\circ$$

$$a^2 = 3b^2$$

$$b = \frac{\sqrt{3}a}{3}$$

$$y \in [-4; 4]$$

$$x \in [-5; 5]$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$a \sqrt{\cos(-\frac{3}{4})} \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}]$$

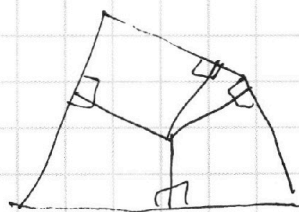
$$\arccos(-\frac{4}{5}) \in$$

$$\frac{2\sqrt{3}a^2}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{3}$$

$$a \sqrt{\cos x} + a \sqrt{\sin(-x)} = \frac{3\pi}{2} \quad x^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$x = \frac{a}{2}$$



$$\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{\sqrt{3}}{3} a - \frac{\sqrt{3}}{6} a$$

$$\frac{a}{2} - \frac{a}{6} = \frac{a}{3}$$

$$a\sqrt{3} \left(\frac{a}{3} + \frac{a}{3} \right)$$

$$\frac{2\sqrt{3}a^2}{9} \cdot 3 = \frac{2\sqrt{3}a^2}{3}$$

$$\frac{a^2}{4} = \cos 30^\circ$$

$$\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{a}{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - y^3 - 3xy$$

$$(x+y+z)(x^2-y^2-xy)$$

$$(x^3 + x^2y + 2x^2 - xy^2 - y^3 - 2y^2 - x^2y - xy^2)$$

$$2t = t + k + 2\pi n$$

$$t = k + 2\pi n \quad x = 2 - y$$

$$\pi x = \pi y + 2\pi n \quad x = 4 \quad y = -2$$

$$x = y + 2h$$

$$64 + 8 +$$

$$\pi - 2t = \pm(t + k) + 2\pi n \quad x = 2$$

$$\pi - 2t = t + k + 2\pi n \quad x = 2$$

$$\pi - 3t = k + 2\pi n \quad x = \frac{1}{2} \quad y = 2$$

$$\pi - 3t = k + 2\pi n \quad x = \frac{1}{2} \quad y = 2$$

$$\pi x = t \quad x = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}$$

$$\pi y = k \quad x = -\frac{1}{3}(y + 2n - 1)$$

$$\sin^2 t + \sin t \cdot \sin k = \cos^2 t + \cos t \cdot \cos k$$

$$\sin^2 t \cdot \cos^2 t = \cos t \cdot \cos k - \sin t \cdot \sin k$$

$$2\sin^2 t - 1 = (\cos t + \cos k)(\sin t - \cos k)$$

$$-1 = 2n - y - 1 \quad \frac{\cos(t + \frac{\pi}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 30^\circ \cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$y = 2n$$

$$1 \quad 2$$

$$2\sin^2 t = \cos(t + k)$$

$$-2\cos(t - \frac{\pi}{4})\cos(t + \frac{\pi}{4}) = \cos(t + k)$$

$$-\cos^2 t + \cos \frac{\pi}{2}$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\cos(t + \frac{\pi}{4}) = \cos(t + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin t - \cos t$$

$$2\cos(t - \frac{\pi}{2})\cos(t + \frac{\pi}{2})$$

$$\cos 2t + \cos \pi$$

$$-\cos 2t = \cos(t + k) \quad (0 + 0) \cdot 0$$

$$2t = t + k + 2\pi n$$

$$\cos(\pi - 2t) = \cos(t + k)$$

$$\frac{3}{2} = x$$

$$t = \frac{\pi}{4} - \frac{2t - \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} \cos x$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$8 - 1 - 6$$

$$-\cos 2t$$

$$\sin x + \sin y = \cos(\pi - 2t) = -\cos 2t$$

$$\sin x + \sin y$$

$$2\cos(\frac{\pi}{4})\cos \frac{3\pi}{4} =$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} = -1$$

$$0 = x \quad y = 1$$

$$\cos(t + k)$$

$$2\cos(t - \frac{\pi}{2})\cos(t + \frac{\pi}{2})$$

$$\cos 2t + \cos \pi$$

$$\sin t + \cos t$$

$$\cos(t + \frac{\pi}{4}) = \cos(t + \frac{\pi}{4})$$

$$-\cos(t + \frac{\pi}{4})$$

$$-\cos(t + k)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1000 \cdot a + 100 \cdot 0a + 10a + a = 1111 \cdot a = 11 \cdot a \cdot 101$$

$$1) C = 30 + C$$

$$B \cdot C : 10111$$

$$B : 101, \text{ т.к. } C : 101$$

$$1.1) B = 200 + b_1 + b_2$$

$$B = 202$$

$$(x-y-1)(x^2+y^2+x-y+xy+1) =$$

$$= x^3 - yx^2 - x^2 + y^2x - y^3 - y^2 +$$

$$A \cdot B = 101^2 \cdot 2 \cdot a \cdot 11 \Rightarrow C : 11 \Rightarrow C = 33$$

$$A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 2 \cdot 11^2 \cdot 3 \cdot a$$

$$+ x^2 - xy - x - xy + y^2 + y +$$

$$+ x^2y - xy^2 - xy + x - y - 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{xy+x-y-1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{y+x+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$(y+x+2)(x-1)(y+1) = (y+x+2)xy$$

$$(y+x+2)(xy+x-y-1-xy) = 0$$

$$(y+x+2)(x-y-1) = 0$$

$$\frac{x^3 - y^3}{x^3} \cdot \frac{x-y-1}{x^2}$$

$$(x-y-1)(x^2+y^2+x-y+xy+1)$$

$$x^3 - x^2y - x^2 - xy^2 + y^3$$

$$= x^3 - x^2y - x^2 + y^2x - y^3 - y^2 + x^2 - xy - x - xy + y^2 + y + x^2y -$$

$$- xy^2 - xy + x - y - 1$$

$$1 - \frac{1}{3} = 2 - y$$

$$\frac{2}{3} = 2 - y$$

$$x = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{4} = 2 - y - 1$$

$$\frac{1}{4} = 2 - y$$

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$