

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№1

Рассмотрим число A

A: 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999

т.е. $A = x \cdot 11 \cdot 101$, где x - однозначное число

т.к. 101 - простое, то множитель 101 должен быть в B или C, но $C < 100 \Rightarrow B \mid B:101$

Таким образом $B = 606$ т.к. по усл. в задаче B есть цифра 6

$B = 2 \cdot 3 \cdot 101$, т.е. $B \mid 11$, но $\cancel{A} \mid 11$ и $A \mid 11 \cdot 101 \Rightarrow C \mid 11$

По усл. цифра х.д. одна из цифр С это 3. Единственное удовл. число с цифрой 3, которое при делении на 11, это 33

Итого $B = 2 \cdot 3 \cdot 101$

$$C = 3 \cdot 11$$

$$A = x \cdot 11 \cdot 101, \quad x - \text{одноз.}$$

Число A·B·C явилось кв-том X должно явно.

~~единой~~ ~~ст~~ имеет степ. двойки, т.е. $X = 2$ или $X = 8$

Таким образом под все условные тройки (A; B; C)

подходит (8888; 606; 33) и (2222; 606; 33)

Ответ: (8888; 606; 33) и (2222; 606; 33).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{N}^{\circ} 2 \quad x, y > 0 \\ k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}, \quad x \neq 2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \cancel{x} \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} \quad | : (x+y+5) > 0$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-2)(y+2)} \quad | \cdot xy(x-2)(y+2), \quad x \neq 2, \quad x, y > 0$$

$$(x-2)(y+2) = xy$$

$$xy - 2y + 2x - 4 = xy$$

$$\cancel{xy} - 2y + 2x - 4 = \cancel{xy}$$

$x - y = 2$, также $x \neq 2$, но при $x=2$: $2 - y = 2 \Rightarrow y = 0$, но тогда $y > 0$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = \underbrace{(x-y)}_2 (x^2 + xy + y^2) - 6xy = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6xy = \\ = 2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x^2 - 2xy + y^2) = 2 \underbrace{(x-y)}_{\frac{2}{4}}^2 = 8$$

Ostber: $M = 8$,

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3} \text{ a) } (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\text{Сод. спр.: } \sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x - \cos \pi x \cdot \cos \pi y,$$

$$\cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi x - \pi y) = \cos(2\pi x),$$

$$\pi x - \pi y = 2\pi x + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x - y = 2x + 2k$$

$$y = -x - 2k$$

$$\text{Сдр. спр.: } \cancel{\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2}} \cdot \sin \pi x = 0 - \cancel{\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x}$$

$$\cancel{\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \pi x \cdot \sin \frac{\pi x - \pi y}{2}} + \cancel{0}$$

$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \left(\sin \pi x \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} + \cos \pi x \cdot \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \right) = 0$$

$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin(\pi x + \frac{\pi x - \pi y}{2}) = 0$$

$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0,$$

$$\sin \frac{(3\pi x - \pi y)}{2} = 0;$$

$$\begin{cases} \frac{\pi x + \pi y}{2} = n\pi, \\ \frac{3\pi x - \pi y}{2} = m\pi; \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x + y = 2n, \\ 3x - y = 2m \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 2n, & (1) \\ y = 3x - 2m; & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x + 2n = -x - 2k$$

$$2n + 2k = 0$$

$$n + k = 0$$

$$n = -k \Rightarrow y = -x - 2k$$

т.е. Пара $(x; -x - 2k)$ ~~занесена~~

$$\text{Проверка: } (\sin \pi x + \sin(-\pi x - 2\pi k)) \cdot \sin \pi x =$$

$$= (\cos \pi x - \cos(-\pi x - 2\pi k)) \cdot \cos \pi x$$

$$(\sin \pi x - \sin \pi x) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi x) \cdot \cos \pi x$$

$0 = 0$ — Верно

$\Rightarrow (x; -x - 2k)$ — подходит

$$(2) 3x - 2m = -x - 2k$$

$$4x = 2(m - k)$$

$$x = \frac{m - k}{2} \Rightarrow \sin \pi x \in \{-1, 0, 1\}, \cos \pi x \in \{0, 1\}$$

Рассм. 4 случая.

$$1) \sin \pi x = 1; \cos \pi x = 0: (1 + \sin \pi y) 1 = (0 - \cos \pi y) 0$$

$$2) \sin \pi x = -1; \cos \pi x = 0: (1 + \sin \pi y) (-1) = (0 - \cos \pi y) 0$$

$$3) \sin \pi x = 0; \cos \pi x = 1: (1 + \sin \pi y) 0 = (0 - \cos \pi y) 1$$

$$4) \sin \pi x = 0; \cos \pi x = -1: (1 + \sin \pi y) 0 = (0 - \cos \pi y) (-1)$$

$$\sin \pi y = -1 \quad \pi y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$y = -\frac{1}{2} + 2t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Значит } x = \frac{1}{2} + 2z, z \in \mathbb{Z}; \quad y = -\frac{1}{2} + 2t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

т.е. также, что и $(x; -x - 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \sin \pi x = 0, \cos \pi x = -1 : (0 + \sin \pi y) \cdot 0 = (-1 - \cos \pi y)(-1)$$

$$\text{тогда } (m-k) \equiv 2 \\ \text{и } x = 1 + 2z, z \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \pi y = -1$$

$$\pi y = -\pi + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$$

$$y = -1 + 2t,$$

$$\text{Значит } x = 1 + 2z, y = -1 + 2t, z, t \in \mathbb{Z}$$

т.е. получаем, что и $(x; -x - 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$

$$3) \sin \pi x = -1, \cos \pi x = 0 : (-1 + \sin \pi y) \cdot (-1) = (0 - \cos \pi y) \cdot 0$$

$$\text{тогда } (m-k) \equiv 3 \\ \text{и } x = \frac{3}{2} + 2z, z \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \pi y = 1$$

$$\pi y = -\frac{3\pi}{2} + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$$

$$y = -\frac{3}{2} + 2t$$

$$\text{Значит } x = \frac{3}{2} + 2z, y = -\frac{3}{2} + 2t, z, t \in \mathbb{Z}$$

т.е. получаем, что и $(x; -x - 2k)$

$$4) \sin \pi x = 0, \cos \pi x = 1 : (0 + \sin \pi y) \cdot 0 = (\cancel{-1} - \cos \pi y) \cdot 1$$

$$\text{тогда } (m-k) \equiv 0 \\ \text{и } x = 2z$$

$$\cos \pi y = 1$$

$$\pi y = 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$$

$$y = 2t$$

т.е. получаем, что и $(x; -x - 2k)$

Таким образом получим решения $(x; -x - 2k)$:

П.с. в каждом из случаев фраза "решение сущее" означает, что ~~если~~ означает, что можно подобрать такое K , чтобы решение записалось в таком виде.

$$5) x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi, \quad \text{т.е. } \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$1) y=2 \Rightarrow x \in \{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6\}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \frac{\pi}{2} < \pi,$$

$$\arcsin \frac{x}{6} < \frac{\pi}{2}, \text{ т.е. } x \neq 6 \Rightarrow \text{подходит 6 пар вида } (x_0; 2)$$

$$2) x \neq 2, \text{ тогда}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} < \pi - \arcsin \frac{y}{2} - \text{Верно всегда, а пара } x$$

две четверти у находятся 7 шт., две четверти у находятся 6 шт.

$$\text{Итого } 6 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 32$$

Ответ: а) $(x; -x - 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$
б) 32 пары



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{1}{4}$ Туссю добавили к 4 шарах. еще К бинетов. $K \in \mathbb{N}$
 А всего учеников в классе n
 Тогда вер-тв для 4-ех бинетов: $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$

А вер-тв для $(K+4)$ бинетов: $\frac{C_{n-2}^{2+k}}{C_n^{4+k}}$

Получаем ур-е: 6. $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{2+k}}{C_n^{4+k}}$

$$6. \frac{\frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(k+2)!(n-k-4)!}}{\frac{n!}{(k+4)!(n-k-4)!}}$$

$$72 = \frac{(K+4)!}{(K+2)!}$$

$$72 = (K+4)(K+3)$$

$$K^2 + 7K + 12 = 72$$

$$K^2 + 7K - 60 = 0$$

$$(K+12)(K-5) = 0$$

$$\begin{cases} K = -12, \text{ но } K \in \mathbb{N} - \text{ не подж.} \\ K = 5 \end{cases}$$

Т.о. добавили 5 бинетов, значит всего $4+5=9$ бинетов

Ответ: 9 бинетов.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{6} \begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169; \end{cases} \quad (1)$$

$$(2) (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0$$

$$x \neq -5\sqrt{2}\cos\alpha \begin{cases} x+5\sqrt{2}\cos\alpha \leq 0, \\ y+5\sqrt{2}\sin\alpha \geq 0; \\ x+5\sqrt{2}\cos\alpha \geq 0, \\ x+5\sqrt{2}\sin\alpha \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5\sqrt{2}\cos\alpha, \\ y \geq -5\sqrt{2}\sin\alpha; \\ x \geq -5\sqrt{2}\cos\alpha, \\ y \leq -5\sqrt{2}\sin\alpha; \end{cases}$$

(2) $x^2 + y^2 \leq 169$
задает окружность с ц. в. в. т. (0;0) и радиусом 13.

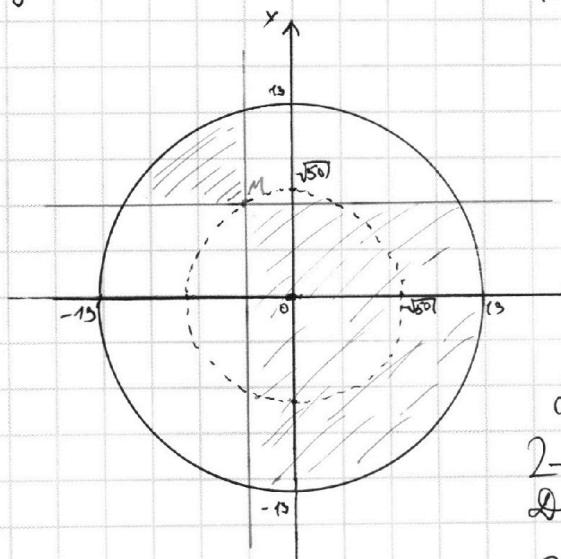
т. о. (1) задает собой 2 перпендикулярные прямые (изогд. II осн.)

на эссе:

на эссе показано как две области попадают (очев. из получ. схемы)

Тогда будем определять эти две области по точке пересечения прямых, ее коорд: $(-5\sqrt{2}\cos\alpha; -5\sqrt{2}\sin\alpha)$
назовем ее Т.М

Тогда расст. от $(0,0)$ до $M: \sqrt{50\cos^2\alpha + 50\sin^2\alpha} = \sqrt{50}$
т.е. Т.М лежит на окр. с центром в $(0,0)$ и $R=\sqrt{50}$



Точка М движ. по окр. на окр. центральном

Периметр фигуры сост. из сущих двух хорд и двух дуг окр-ти

Длина верт. хорды:

$$2\sqrt{13^2 - 50\cos^2\alpha}$$

Длина горизонт. хорды

$$2\sqrt{13^2 - 50\sin^2\alpha}$$

Всего длина окружн.: 26π



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сумма длин дуг α всегда будет равна 2π в единицах радиан. открытых для них задач.

Т. е. ищем макс зона: выраж.

$$2(\sqrt{13^2 - 50\cos^2 \lambda} + \sqrt{13^2 - 50\sin^2 \lambda}) \text{ ли } \text{ достичь.}$$

$$\cos \lambda \sin \lambda = \pm \cos \lambda$$

$$\text{т.е. } \lambda = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Первый: } 2(\sqrt{144} + \sqrt{144}) + 13\pi = 48 + 13\pi$$

Ответ: макс перв. $48 + 13\pi$,

$$\text{при } \lambda = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

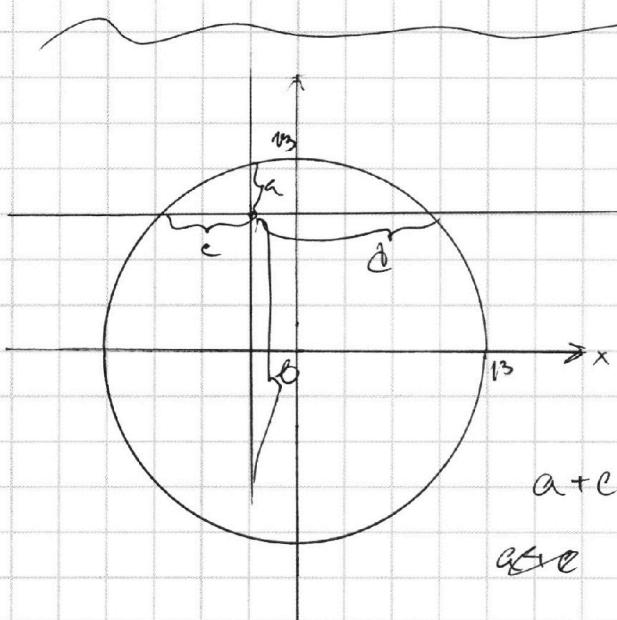
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\cancel{-5\sqrt{2} \cos \alpha = -5\sqrt{2} \sin \alpha} \\ \cos \alpha = \sin \alpha$$

$$(-5\sqrt{2} \cos \alpha; -5\sqrt{2} \sin \alpha)$$

$$50 \cos^2 \alpha + 50 \sin^2 \alpha$$

$$a+c+\sqrt{a^2+c^2} + b+d+\sqrt{b^2+d^2}$$

окт

$$xy + 5\sqrt{2}(\sin \alpha + \cos \alpha) + \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$xy + 5\sqrt{2}t + \frac{t^2 - 1}{2} \leq 0$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$x-y \leq 5\sqrt{2} \sin \alpha - 5\sqrt{2} \cos \alpha \quad \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$x-y \geq 5\sqrt{2} \sin \alpha - 5\sqrt{2} \cos \alpha \quad xy + 10\sqrt{2}t + t^2 - 1 \leq 0$$

$$t^2 + 10\sqrt{2}t + 2xy - 1 \leq 0 \quad m \in [10\frac{1}{2}; 9\frac{1}{2}]$$

$$D = 200 - 4(2xy - 1)$$

$$xy \leq -\left(\frac{t^2 - 1}{2} + 5\sqrt{2}t\right) \quad xy \leq m$$

$$D = 169 - 4m^2 \leq 0 \quad -\left(\frac{t^2}{2} + 5\sqrt{2}t - \frac{1}{2}\right) \quad y = \sqrt{169 - x^2}$$

$$4m^2 \geq 169$$

$$m^2 \geq \frac{169}{4}$$

$$m = \frac{13}{2}$$

$$x^4 - 169x^2 + m^2 = 0$$

$$\text{min: } -9\frac{1}{2}; \text{ max: } 10\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{169 - x^2} = \frac{m}{x}$$

$$169 - x^2 = \frac{m^2}{x^2},$$

$$169x^2 - x^4 = m^2,$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

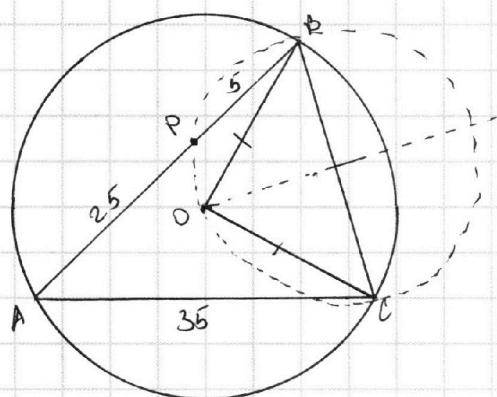
5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$C: \cancel{X_3}, \cancel{X_3}, 30, \cancel{X^2}, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 43, 53, 63, 73, 83, 93$$

$$A: 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999$$

$\begin{matrix} 11 \\ 11 \cdot 101 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 11 \\ 2 \cdot 11 \cdot 101 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 11 \\ 3 \cdot 11 \cdot 101 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 11 \\ 2^2 \cdot 11 \cdot 101 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 11 \\ 5 \cdot 11 \cdot 101 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 11 \\ 23 \cdot 11 \cdot 101 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 11 \\ 7 \cdot 11 \cdot 101 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 11 \\ 23 \cdot 11 \cdot 101 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 11 \\ 3^2 \cdot 11 \cdot 101 \end{matrix}$

$$101 = 77 \cancel{201} \cancel{101}$$

$$B = 606 = 2 \cdot 3 \cdot 101$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 11 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 11 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$A = X \cdot 11 \cdot 101$$

$$\begin{array}{r} Y = -X - 2K \\ X = -Y - 2K \end{array}$$

$$Y = 2 \cdot 6$$

$$Y = 1 \cdot 6$$

$$Y = 0 \cdot 7$$

$$Y = -1 \cdot 6$$

$$Y = -2 \cdot 7$$

$$2 \cdot 3 \cdot 101^2 \cdot 11 \cdot X$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x+2)^{k+2}} + \frac{1}{(x+2)^{k+3}} + \dots + \frac{1}{(x+2)^{k+7}} \\ &= \frac{1}{(x+2)^{k+4}} \left(\frac{1}{(x+2)^{-2}} + \frac{1}{(x+2)^{-3}} + \dots + \frac{1}{(x+2)^{-7}} \right) \\ &= \frac{1}{(x+2)^{k+4}} \cdot \frac{(x+2)^{-2} - (x+2)^{-7}}{(x+2)^{-2} - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \pi x &= \cos^2 \pi x - \cos 2\pi x \\ \cos 2\pi x &= 2\pi \sin^2 \pi x \end{aligned}$$

$$(K+12)(K-5) = 0 \Rightarrow K = 5 \text{ or } K = -12$$

$$\pi x = 2\pi kx + 2\pi K$$

$$2. X, Y > 0$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\begin{array}{c} Y+x+5 \\ \hline XY \\ -5 -3 -1 1 3 5 \end{array} = \frac{Y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$XY = (X-2)(Y+2)$$

$$XY = XY - 2Y + 2X - 4$$

$$\cancel{-Y+X-2=0}$$

$$\cancel{XY-X-Y=2}$$

$$\begin{aligned} &= 2X^2 + 2XY + 2Y^2 - 6XY = 2X^2 - 4XY + 2Y^2 = \\ &= 2(X-2)^2 - 3XY = 2(3XY) = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= X^3 - Y^3 - 6XY = \\ &= (X-Y)(X^2 + XY + Y^2) - 6XY \end{aligned}$$

$$\cancel{X^2 - 5XY + Y^2 =}$$

$$\cancel{X^2 + 2XY + Y^2 - 3XY =}$$

$$\cancel{-(X-2)^2 - 3XY = 2(3XY)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x - \cancel{\cos^2 \pi} \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi x - \pi y) = \cos(2\pi x)$$

$$\pi x - \pi y = 2\pi x + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

или

$$x - y = 2\pi(x + k)$$

$$x - y = 2x + 2k$$

$$y = x - 2\pi x + 2\pi k$$

$$y = -x + 2k$$

$$\sin \pi x + \sin \pi(-x - 2k)$$

$$(\sin \pi x + \sin(-\pi x - 2\pi k)) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos(-\pi x - 2\pi k)) \cos \pi x$$

$$\sin \pi x - \sin \pi x$$

$$0 = (\cos x - 1) \cdot 0 = 0$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = -2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\sin \pi x \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} + \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \pi x = 0$$

$$\sin\left(\pi x + \frac{\pi x - \pi y}{2}\right) = 0$$

$$1 - \cos \pi y = 0$$

$$\cos \pi y = 1$$

$$\pi y = 2\pi k$$

$$y = 2k$$

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3x - 2k = -x - 2k$$

$$3x - y = 2k$$

$$y = 3x - 2k$$

$$4x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3x - 2k = -x - 2k$$

$$4x = 2(n - k)$$

$$x = \frac{n - k}{2}$$