



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
X						

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1

Предположим $A = \overline{aaaa} = a \cdot \overline{1011}$, где
 a - первая цифра четырёхзначного числа, тогда
 $ABC = \overline{1011} \cdot a \cdot BC = 103 \cdot 11 \cdot a \cdot BC$
 103 - простое число, поэтому B должна
 делиться на 103 , тогда ABC должно быть четырёх-
 значное число (C не может : $101, 7 \cdot a$ С-одинак.)
 Число 707 тоже из четырёх значий B ,
 то предположим : $101 \cdot 707 = 103, 202, 303,$
 $404, 505, 606, 707, 808, 909 \Rightarrow B = 707$
 Значит $ABC = 11 \cdot 101 \cdot 7 \cdot a \cdot C$. Остальное
 перебрали варианты a и C , где a - первая
 цифра, C - четырёхзначное с ходом для одной 1^4 .
 Число 707 : 7 и $: 11$, то $7 \cdot a$ является
 то должно быть простым 7^2 и 11^2 . Переизложим:
~~а=7~~ $\Rightarrow 7 \cdot 7 = 49$ и $11 \cdot 11 = 121$
 $a=3 \Rightarrow$ Но нету, что C не 11 ; $7 \cdot a = 7 \cdot 11, 7 \cdot 11 = 77 \Rightarrow$
 $C = 77$ не можж; $C \in \{3, 7\}, \dots, 9\}$. Значит
 единиц. Вернёмся $\Rightarrow a = 7$. Остальное находим
 $C : 11$ и соответс. цифры \Leftrightarrow число $C = 55$.
 Дальше: $(7777, 707, 11)$

Ort bei: (7777, 707, 15)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по условию: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3=0 \\ xy=(x-4)(y+4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3=0 \quad (1) \\ x-y-4=0 \quad (2) \end{cases}$$

Рассмотрим случаи:

(1): не могут $x > 0$ и $y > 0$ по условию.

Значит осталось только (2); Замечаем, что:

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = (A+B+C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) \quad \forall A, B, C$$

получив подстановки имеем $A = x; B = -y$

$$C = -4, \text{ получим: } x^3 - y^3 - 4^3 - 3 \cdot x \cdot (-y) \cdot (-4)$$

$$= (x - y - 4) \cdot (\dots) \quad \text{ибо } x - y - 4 = 0$$

ибо у нас $M = x^3 - y^3 - 12xy$ можно

$$\text{выразить } y \Rightarrow \Rightarrow x^3 - y^3 - 12xy = 0 + 4^3 =$$

$$= 64$$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{a). } (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin^3 \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

Обозначим $\pi x = \alpha$; $\pi y = \beta \Rightarrow$

$$(\sin \beta - \sin \alpha) \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cos \beta$$

$$\cos^2 \beta - \sin^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0$$

$$\cos 2\beta + \cos(\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{(из формулы} \\ \text{суммы косинусов)} \end{array}$$

$$\cos \frac{\alpha - \beta + 2\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta - 2\beta}{2} = 0$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - 3\beta}{2} = 0$$

↓

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\frac{\alpha - 3\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

, $n \in \mathbb{Z}$. Обратные
значения:

$$\pi x + \pi y = \pi + 2\pi n$$

$$\pi x - 3\pi y = \pi + 2\pi n$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 + 2n \\ x - 3y = 1 + 2n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + 2n - x \\ y = \frac{x - 1 - 2n}{3} \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

Значит р-л имеет вид

$$\begin{cases} (x; 1 + 2n - x) \\ (x; \frac{x - 1 - 2n}{3}) \end{cases}$$

, где $n \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6). $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\pi/2$. то как.
 обратные к тригоном. фн-и: $\arccos \in [0, 2\pi]$
 $\arcsin \in [-\pi/2; \pi/2] \Rightarrow \arccos - \arcsin \in [-\pi/2, 3\pi/2]$, а значит находятся все пары (x, y) кроме тех при которых:
 $\left\{ \begin{array}{l} \arccos \frac{x}{7} = 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} = \pi/2 \end{array} \right.$ (из условия равенства)

\Downarrow т.е. то уравнения $x, y \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 4 \end{array} \right.$$

- не получится

~~(поскольку $\arccos 7 > \pi/2$)~~

Верно ли что $(7, 4) - \text{р-е ур-е}$?
 да, очевидно что $(7, 4)$ удовлетворяет $(x, 1+2m-x)$
 $(7 : 1 + 2 \cdot 5 = 7)$. Остальные пары

можно проверить на сор. $\frac{x}{7} \in [-1; 1]$
 и $\frac{y}{4} \in [-1; 1]$, а также проверить ли

решение ур-е? $\Leftrightarrow x \in \{-7; -6; -5; \dots; 7\}$
 $y \in \{-4; -3; -2; \dots; 4\}$, кроме $(7, 4)$

р-е ур-е: $\left[\begin{array}{l} (x, 1+2m-x) \\ (x, \frac{x-3-2m}{3}) \end{array} \right]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~3 блоком*

Значит, что из \star будут подходить
все (x, y) вида $x \leq 2, y \leq 2$ и $x \geq 2, y \geq 2$
так $3 + 2n - x \equiv x + 3$. Таким образом
остаётся рассмотреть пары, где $x \leq 2$ и $y \geq 2$
или $x \geq 2$ и $y \leq 2$. Они должны подойти
также \star , т.е. $y = \frac{x-3-2n}{3} \in \mathbb{Z}$ ~~или~~
 $y \in \mathbb{Z}$. Ограничим $y = \frac{x-3-2n}{2} \equiv x+3$
потому x и y разной четности.

Ответ: все наборы (x, y) вида:

$$x \leq \frac{y}{2} \quad x \in \{-7, -6, \dots, 7\}, \text{ кроме } \\ y \in \{-4, -3, \dots, 4\} \quad (7, 4)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Мы съезжаем n . Кол-во биномов в
которых меньше k . Кол-во рён вероятно
в каждом биноме способов распределить
к биномам m/k и узбесим: C_n^k .
при этом таких способов подле 12
А вспом - это где fix бинома и
и еще выбрать 2 яч. гашенки из $n-2$:

C_{n-2}^2 . Носят в каждом биноме

$$P_{\text{каран}} = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\cancel{(n-2)(n-1)}}{\cancel{2!} \cdot \cancel{(n-3)(n-2)(n-1)}} = \frac{12}{n \cdot (n-1)} \cdot \underset{\text{В итоге}}{=} \frac{(n-2)!}{n! \cdot (n-3)!}$$

$$\begin{aligned} & \text{Аналогично } P_{\text{каш}} = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \\ & = \frac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot (n-k)!} = \frac{k \cdot (n-k)}{n \cdot (n-1)} \cdot \underset{\text{но увидел}}{=} \\ & \frac{k! \cdot (n-k)!}{n!} = \frac{12 \cdot 12}{n(n-1)} = \frac{k(n-k)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нужно 12.

$$K(K-1) = 53 \cdot 12 - 380 \text{ и } K = -53 \Rightarrow K = 12$$

не более двух корней. ~~Две корни~~ то

$K = 12$ и $K = -53$ корней. \Rightarrow более
корней. из трех корней по условию
задачи только $K = 12$

| Ответ: 12 биномов

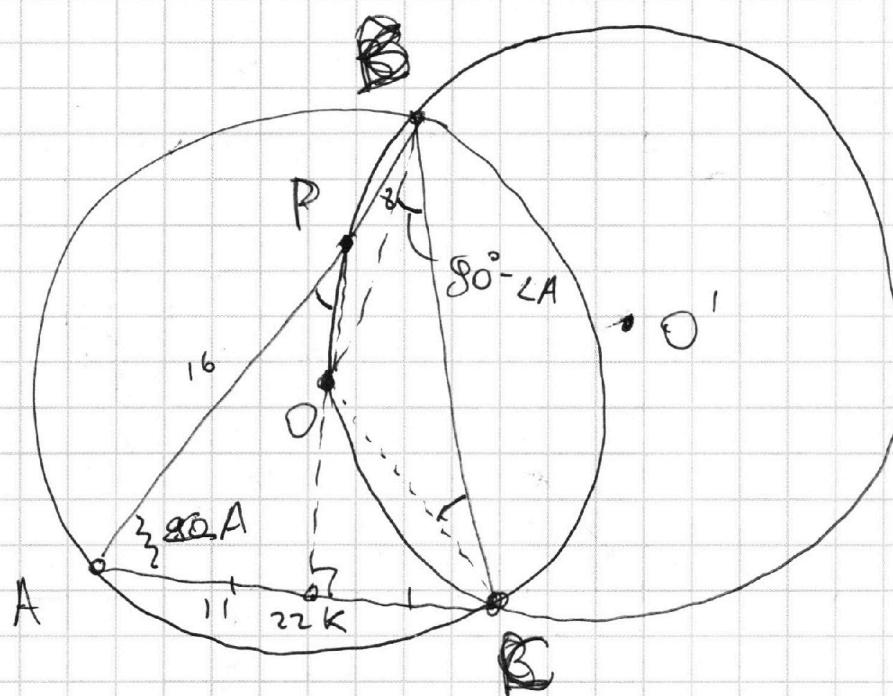


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$\angle BOC = 2\angle BAC \text{ (зенит. и линс зенит.)}$$

$\rightarrow \tan ABOC = \beta/5$ ($BO = OC = R_0$), \rightarrow

$\angle OBC = 90^\circ - \angle BAC = \angle OCB$. ние зову,

T.U POCB - hence, so $\angle OCB = 180^\circ - \angle OPB$

$$\Rightarrow \angle APO = \angle OCB = 90^\circ - \angle BAC, \text{ respectively}$$

even $K = (PO) \cap (AC)$, so $PA \perp AC$ ($\angle BAC = 90^\circ$)

Open from , try OK & AC, OK - серег. испн.

$$\Rightarrow Ak = f(c) = 15 \cdot \tan 2^\circ \cos A = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{3\sqrt{15}}{3\sqrt{15}}. \text{ Toepge } S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} =$$

$$= \frac{24^3 \cdot 22 \cdot 3\sqrt{15}}{8 \cdot 2} = \frac{99\sqrt{15}}{2}, \quad \text{Ober: } \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

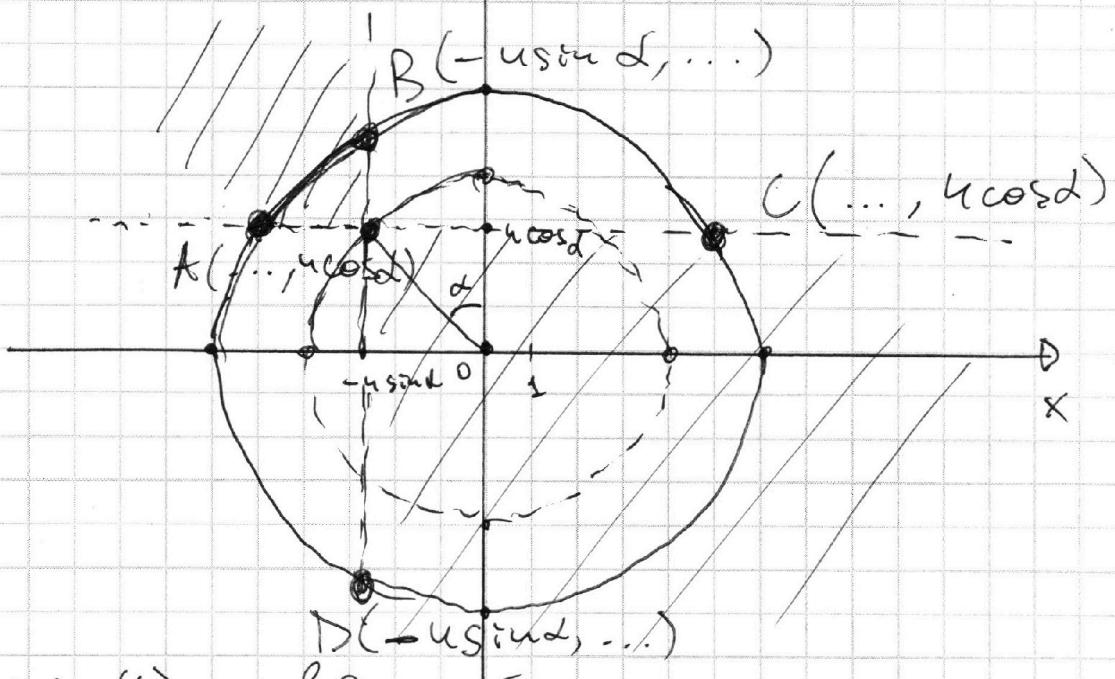
СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~6

$$\left\{ \begin{array}{l} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{array} \right.$$

$x^2 + y^2 \leq 36$ — круг с центром $(0,0)$ и радиусом 6



для (1) и-тое чубозии окр-ти радиуса
и и отложим углы α от ОУ (ан
рис)
таки образуют ~~чубозии~~ токи пересечений
угла с окр-ти имеет коорд $(-4 \sin \alpha; 4 \cos \alpha)$
и обласи углов. и-тое α обозначено стри-
хами. Такие образующие граници $\Phi(\alpha)$ это
углы окр-ти и все отрезки $(AB; AC; CB; BA)$

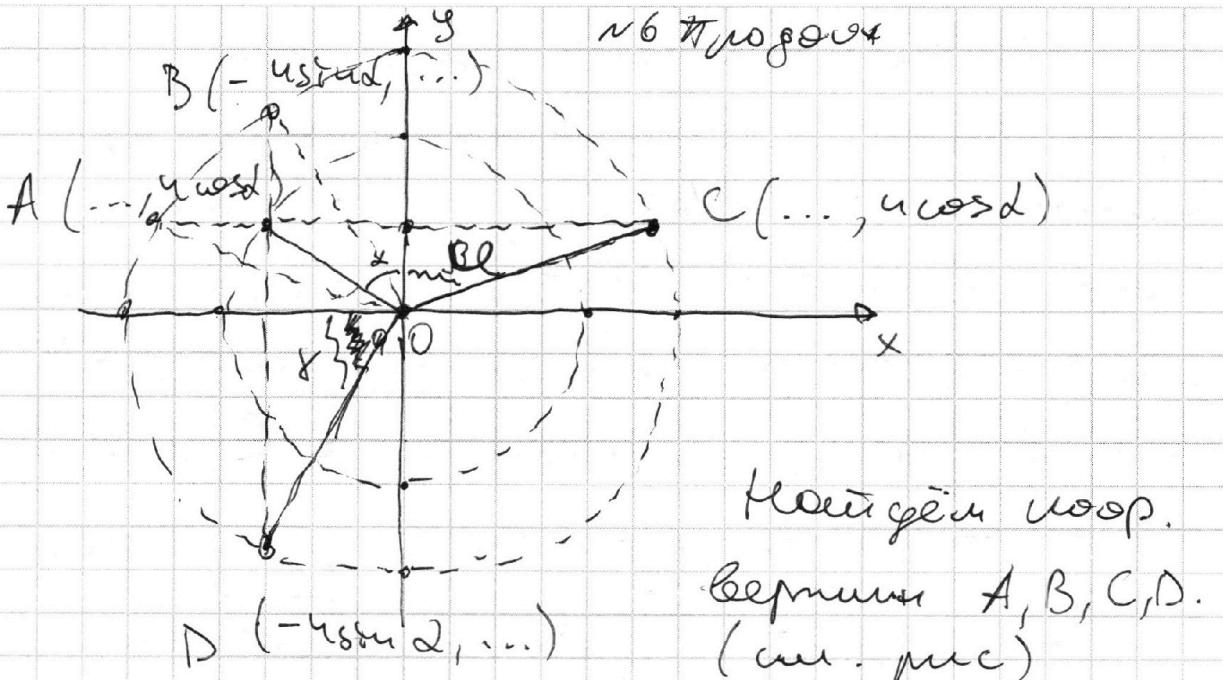
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Обозначим $\angle COB = \gamma$. Тогда: $\cos \gamma = \frac{2}{3} \cos \alpha \cdot \sin \alpha$ т.к. $\angle AOC = 2\alpha$. $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$; $\cos \alpha = \frac{2}{3} \sin \alpha$; $\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Тогда: $\cos \gamma = \frac{2}{3} \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{2}{3} \sin^2 \alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{10}{27}$.

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= 6 \cdot \angle DOC = 6 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \gamma \right) = \\ &= 6 \cdot \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha - \gamma \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 6 \cdot \angle AOB = 6 \cdot \left(\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \right) = \\ &= 6 \cdot (\alpha + \gamma - \pi/2). \text{ Тогда } 3 \text{ величины,} \end{aligned}$$

$$\text{т.к. } \overline{CD} + \overline{AB} = \frac{6 \cdot 3\pi}{2} - \frac{6 \cdot \pi}{2} = 6 \cdot \pi = \text{const}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача $\widehat{AB} + \widehat{CD} = \text{const}$, где $\angle A + \angle C = 180^\circ$.
 Тогда A, D, C, B лежат на одной окружности. Тогда $\max(\widehat{AC} + \widehat{BD}) = \max(12\sin\alpha + 12\sin\beta)$, где $\cos\delta = \frac{3}{5}\cos\alpha$, $\cos\beta = \frac{2}{3}\sin\alpha$. При этом $\cos\alpha \geq 0$, то $\sin\alpha \geq 0$ и $\sin\beta \geq 0$. Но тогда $\sin\alpha \geq \sin\beta \geq 0$.

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \sqrt{1 - \cos^2\delta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}\cos^2\alpha} = \\ &= \sqrt{\frac{16}{25}\sin^2\alpha} ; \quad \sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}\sin^2\alpha} \\ &= \sqrt{\frac{5}{9}\sin^2\alpha}. \quad \Rightarrow \max f(\alpha) = \left(\sqrt{8 - 4\cos^2\alpha} + \sqrt{8 - 4\sin^2\alpha} \right). \end{aligned}$$

Из неравенства среднего арифметического и квадратного неравенства: $\frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{2} \leq \sqrt{\frac{A+B}{2}}$

А задача сводится к тому что $A = 8 - 4\cos^2\alpha$

$$\begin{aligned} B &= 8 - 4\sin^2\alpha. \quad \sqrt{8 - 4\cos^2\alpha} + \sqrt{8 - 4\sin^2\alpha} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{18 - 4}{2}} = \sqrt{7}, \quad \text{причём равенство} \\ &\text{достижается при } 8 - 4\cos^2\alpha = 8 - 4\sin^2\alpha \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

16π градусов.

$$\text{Значит } \pi r^2 \alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi u}{2}, u \in \mathbb{Z}$$

$$\text{и } \max(\widehat{AB} + \widehat{CD} + \widehat{AC} + \widehat{BD}) = 6\pi + 8\sqrt{2}$$

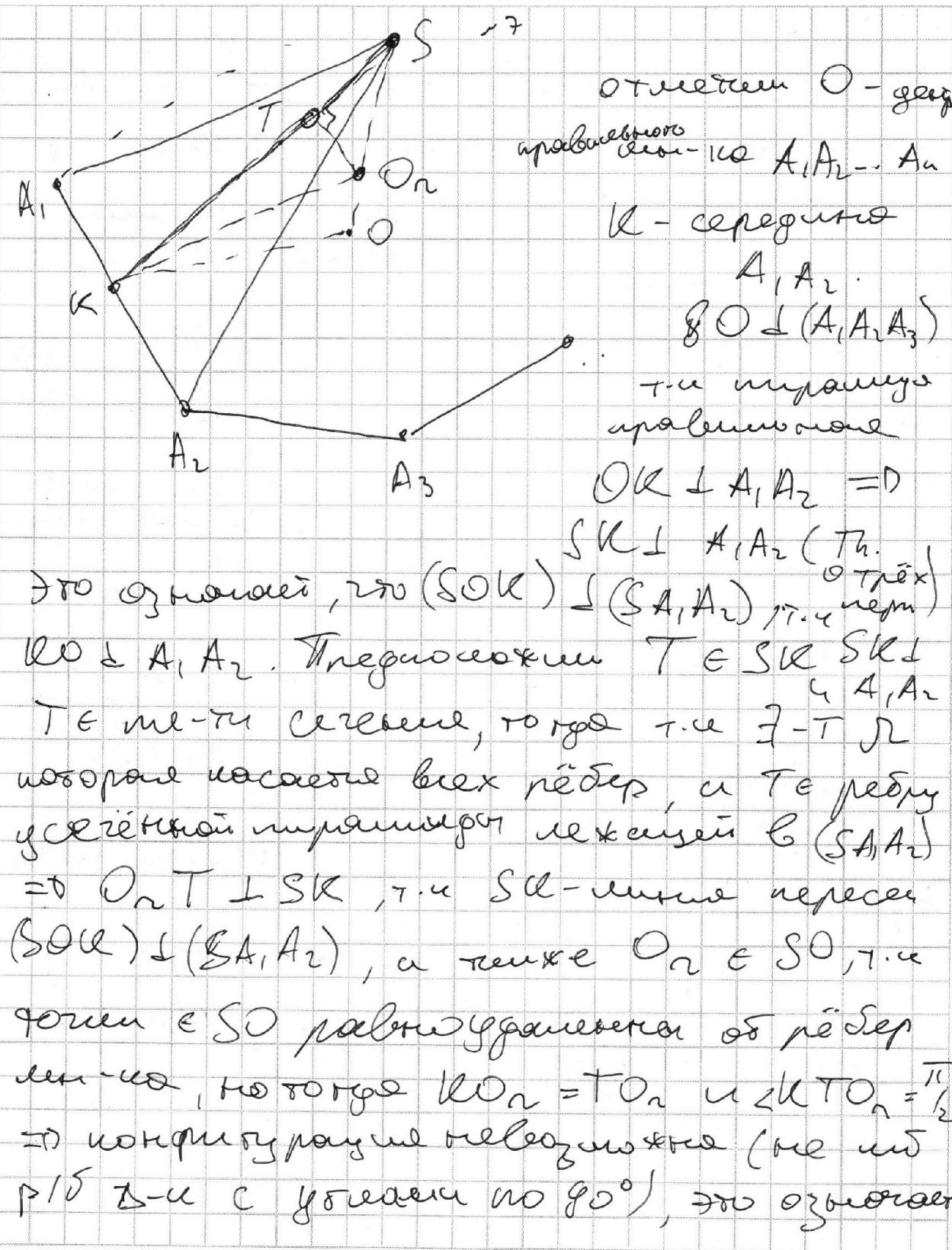
Ответ: $6\pi + 8\sqrt{2}$, при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi u}{2}$
 $u \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



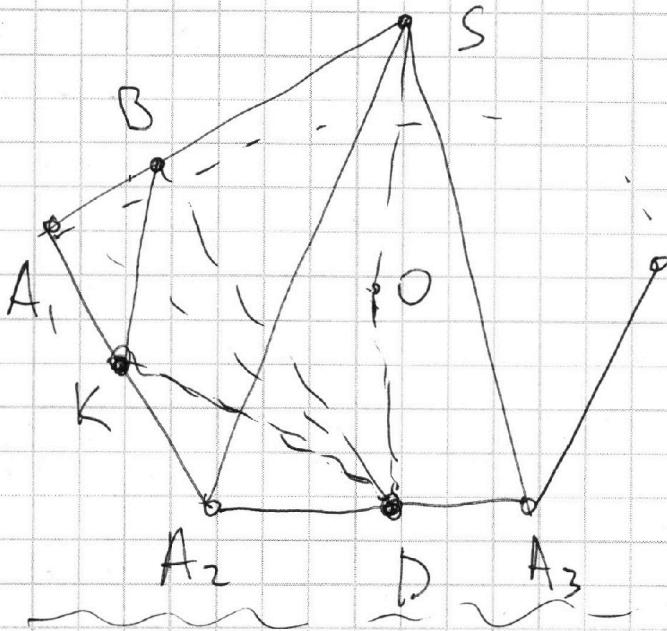
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

200 $K \equiv T$. Ограничение на то что вершина фигуры возле B лежит у серединной перпендикуляра - прямого угла, т.е. иначе ≥ 3 точки скажем $\in (A_1, A_2, A_3) \Rightarrow$ не-точка скажем (A_1, A_2, A_3)

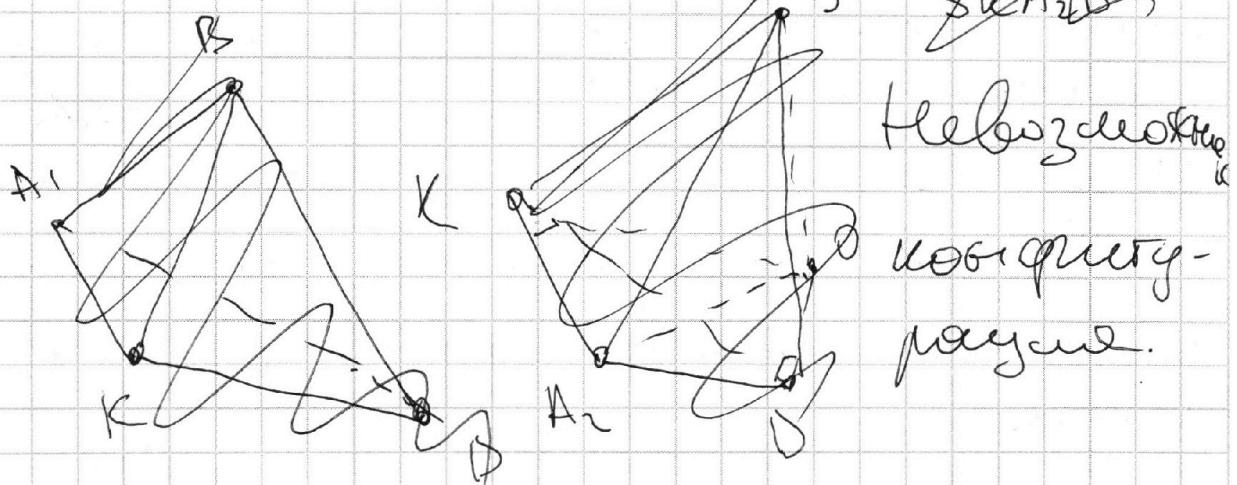


Ограничение на то что вершина фигуры возле $B \equiv BD \perp AC$

Нельзя быть скажем усерединной перпендикуляра

Ограничение на то что $B \in S \Rightarrow$ усерединной перпендикуляра

$S \in KA_2D$





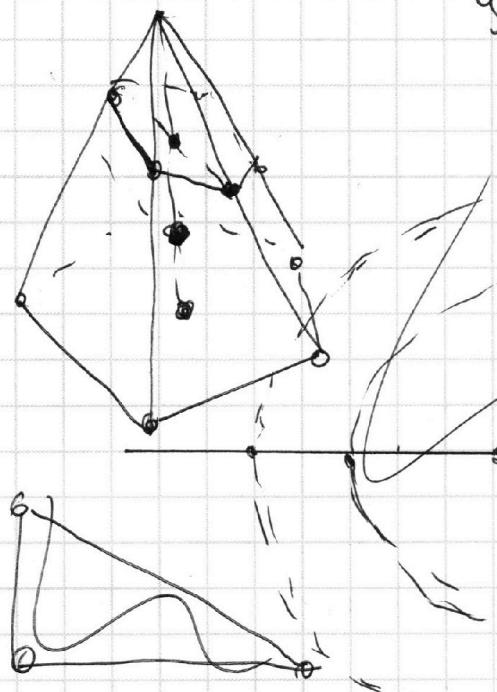
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{array} \right.$$



y

x

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq -4 \sin \alpha \\ y \leq 4 \cos \alpha \end{array} \right.$$

$$A = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$B = \sqrt{a^2 - b^2}$$

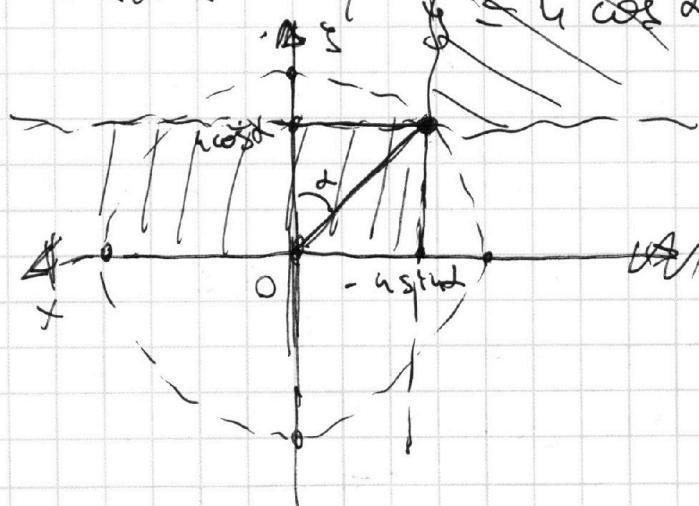
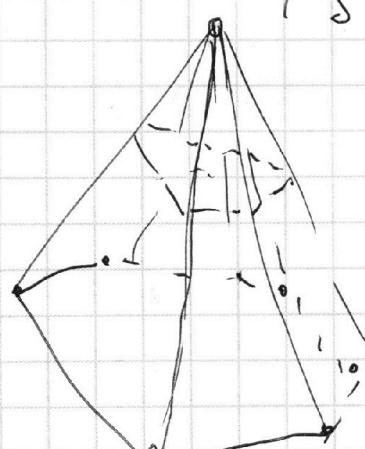
$$D = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$E = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$xy + 4(\sin \alpha - x \cos \alpha) = 16 \sin \alpha \cos \alpha \leq 0$$

$$xy \leq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 4 \sin \alpha \geq 0 \\ y - 4 \cos \alpha \leq 0 \end{array} \right.$$

$$x \geq -4 \sin \alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq -4 \sin \alpha \\ x \leq 4 \cos \alpha \end{array} \right.$$



1

2

3

4

5

6

7

1

2

3

4

5

6

7



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Д). } \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$$

и ограничения $\frac{x}{7} \in [-3, 3]$ и

$\frac{y}{4} \in [-3, 3]$; при этом мы имеем:

$$\arccos \in [0; 2\pi]; \arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$\Rightarrow \arccos - \arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$, а

значит под нами подходят все пары (x, y) подчиняющие ограничения, кроме

пар, имеющие: $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$

$$\arccos \frac{x}{7} = \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2} \quad \text{Л.Д.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in [0, 2\pi] \\ \delta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \alpha = \delta - \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \rightarrow \cos \alpha = \cos(\delta - \frac{\pi}{2})$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{7} \quad \cos(\delta - \frac{\pi}{2}) = \sin \delta$$

$$\sin \delta = \frac{y}{4}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \sin \delta \Leftrightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{4} \Rightarrow 4x = 7y$$

при этом из опр: $x \in [-7, 7]; y \in [-4, 4]$

так как $x, y \in \mathbb{Z}$ (но $y \neq 0$), то $x: 7, y: 4 \Rightarrow$ пары $(-7, -4); (0, 0); (7, 4)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Однажды Калевалы
встретил Бибигу

C_k^4 - всего • D, B и 2 гномика

$$ss \cdot \frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} = \frac{C_{k-2}^2}{C_k^T}$$

~~Бибигу~~

$$\frac{ss}{C_k^4} = \frac{1}{C_k^T} \quad T=2$$

$$ss \cdot \frac{u!}{T!(k-T)!} = \frac{u!}{u!(k-u)!}$$

$$T! (u-T)!$$

$$ss \cdot \frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} = \frac{C_{k-2}^{T-2}}{C_k^T}$$

$$\frac{(k-2)!}{2! (u-2)!} = \frac{(u-2)!}{(T-2)! (k-T)!}$$

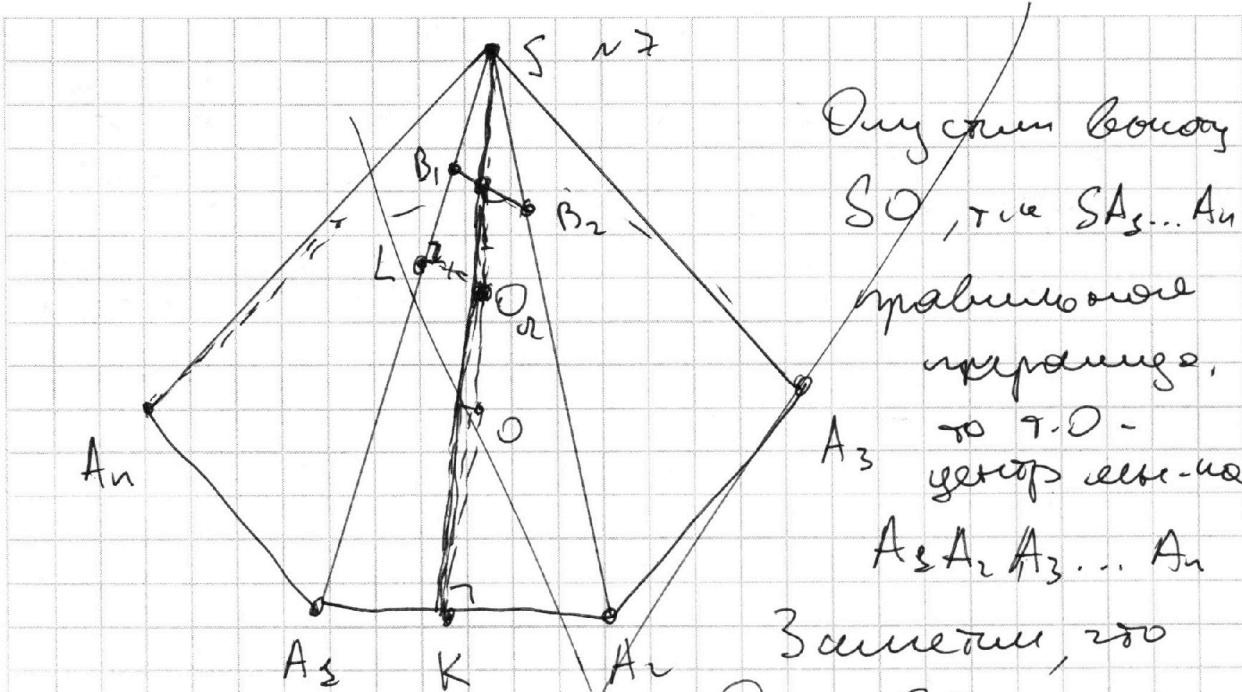
$$\frac{u!}{u! (u-T)!} = \frac{T! (u-T)!}{T(T-1)(T-2)\dots(u+1)u!}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Опустим вниз
 SO , т.к. $SA_1 \dots A_n$

правильное
недавно
предположение.

$\rightarrow QD$ -
доказательство
 $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$

Заметим, что

$OQ \in SO$, т.к.

таким $\in SO$ равноудаленны от ребер

~~плоскости~~ (Th. о трёх перп. \oplus Th. Тицо-

гора). О расстояние от ребер тако-

ко ~~же~~. Д-во \Rightarrow : $SK \perp AA_3$ в м-ни ($SA_1 A_3$)

\Rightarrow т.к. $SA_1 A_3 - p/15 \Rightarrow K$ -сер; т.к. OQ -расст

бина от них (они две грани ребра $A_1 A_3$ тоже и они

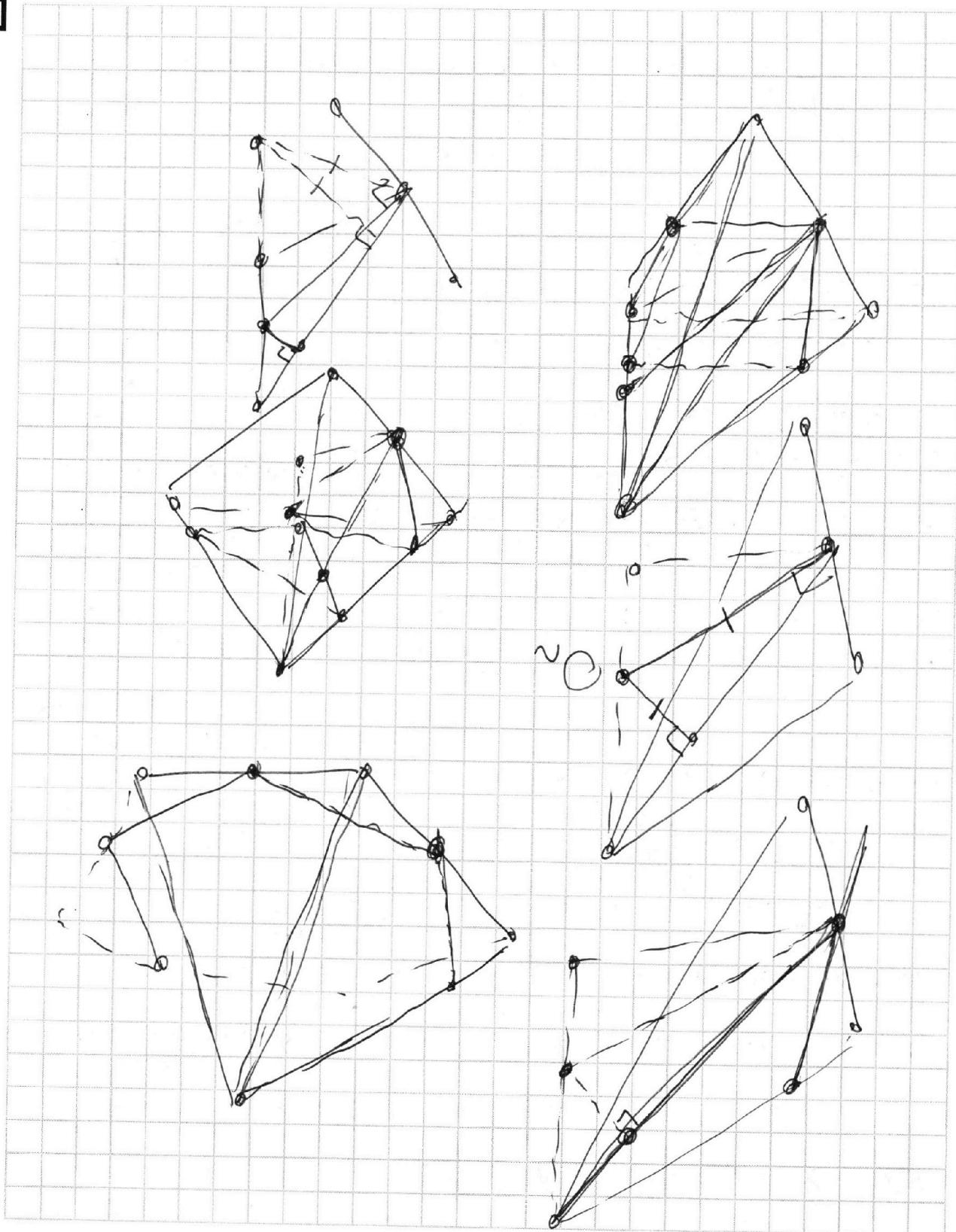
с одинаковыми углами), то же $OQ \perp A_1 A_3$

(Th. о трёх перп.) $\Rightarrow OQ^2 = OO_2^2 + QO^2 =$

не зависит от второго ребра доказ-ие.

при этом $OQ \perp SA_3$: $OQ \perp SK$

Мы сказали $B_1, B_2 \dots B_n$ - середине скрёбков
недавно



He npoeepeptca. Ctpahnuu no rakkjoh n3 jaiau hymeprorce otrephho. Topqa QR-koda hejoucytma!

Ecan otmeheho gojue ojohh jaiau nnn he otmeheho hn ojohh jaiau, ctpahnuu cinterec qphobrno n
N3

— 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7 — N3 —

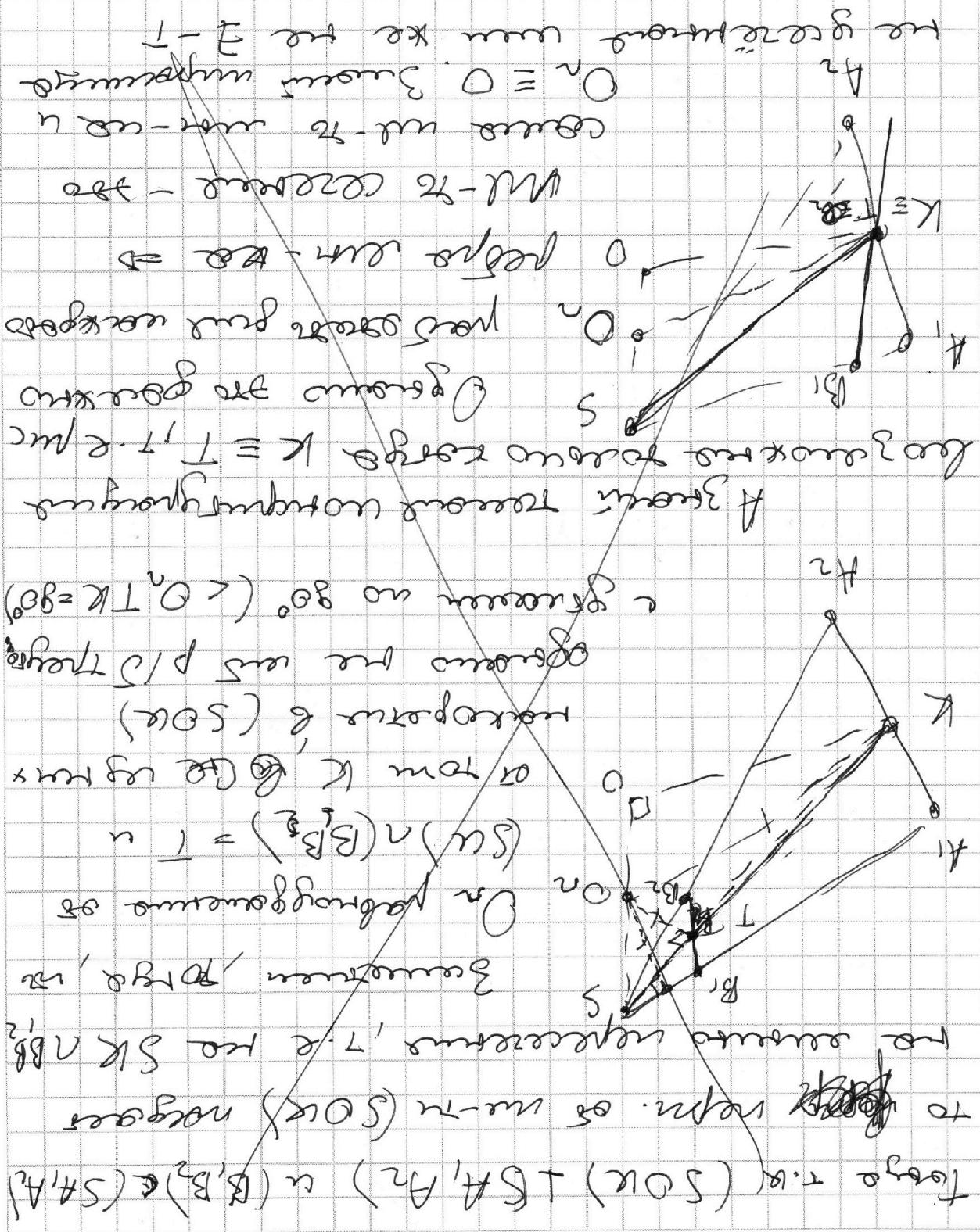
CTPAHNUA

gyimaphoe koinhectbo ctpahnuu b pemehin rakkjoh jaiau otrephho.

jaiau, pemehine kotoqoh mpeacrabneho ha ctpahnuu. Takkje yrekantte homep ctpahnuu n

Ha ojohh ctpahnuu mokho ofopnarts tajkro ojky jaiau. Otmertite kpectrnom homep





Если открытое боковое окошко забытое в ракуну и на него нанесено изображение отверстия, то ракуне получается, что сквозь него не может пройти предмет.

Гипотеза открытого бокового окошка ракуне в ракуне и предмета в ракуне не имеет смысла, потому что предмет не может пройти сквозь ракуну.

На открытой ракуне можно определить только один из двух. Отметить предметом сквозь ракуну можно, потому что предмет не может пройти сквозь ракуну.

Если открытое боковое окошко забытое в ракуну и на него нанесено изображение отверстия, то ракуне получается, что сквозь него не может пройти предмет.

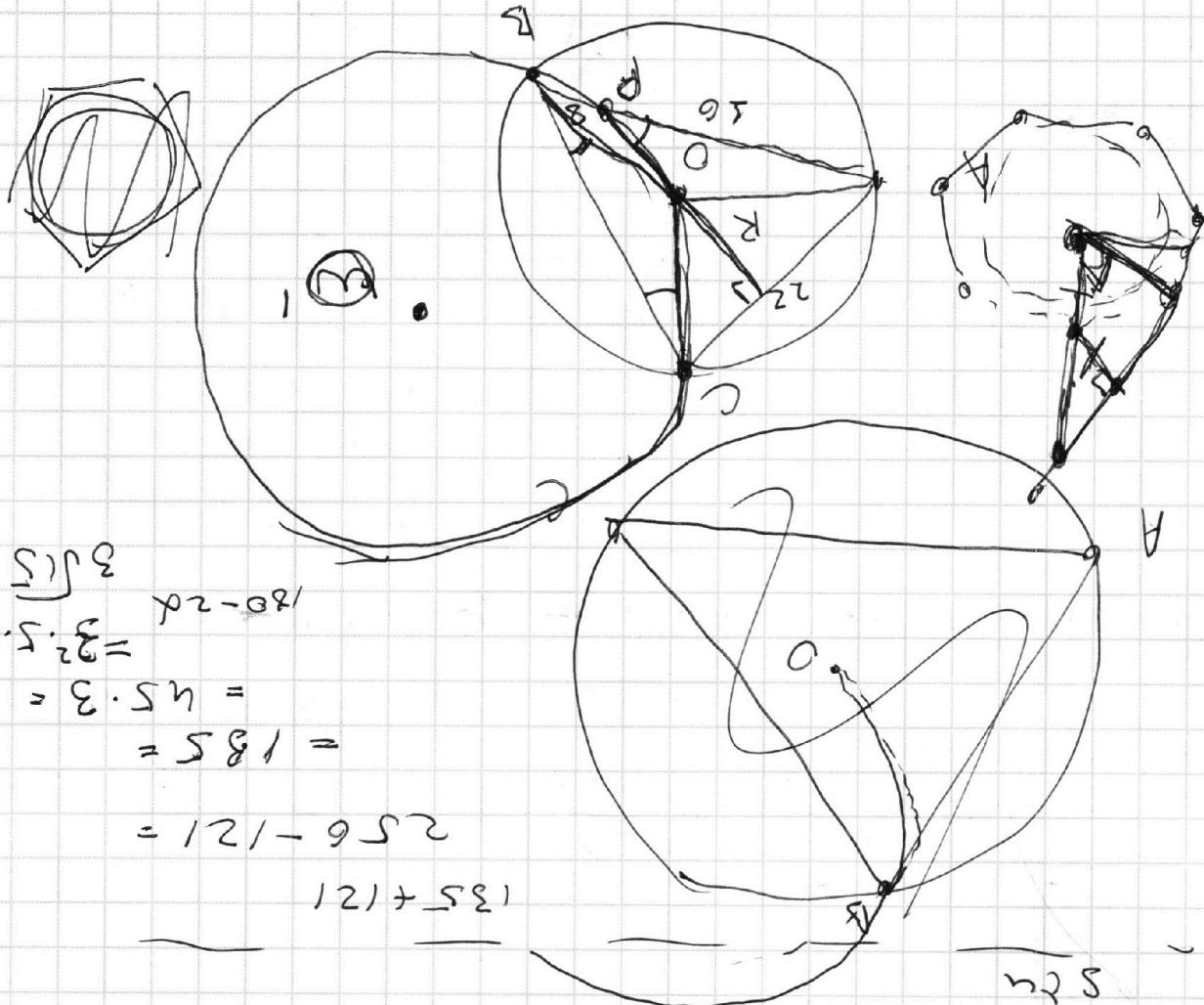
Гипотеза открытого бокового окошка ракуне в ракуне и предмета в ракуне не имеет смысла, потому что предмет не может пройти сквозь ракуну.

На открытой ракуне можно определить только один из двух. Отметить предметом сквозь ракуну можно, потому что предмет не может пройти сквозь ракуну.



Гипотеза открытого бокового окошка ракуне в ракуне и предмета в ракуне не имеет смысла, потому что предмет не может пройти сквозь ракуну.

На открытой ракуне можно определить только один из двух. Отметить предметом сквозь ракуну можно, потому что предмет не может пройти сквозь ракуну.



$$\begin{aligned}
 & \cos^2 \beta + \cos(\alpha - \beta) = 0 \\
 & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0 \\
 & 2 \cos \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta = 0 \\
 & (\sin \beta - \sin \alpha) \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cos \beta \\
 & \Leftrightarrow \beta = \alpha' \quad \alpha = \pi - \alpha' \\
 & \sin(\pi - \alpha') - \sin \alpha' = (\cos \alpha' + \cos \alpha) \cos \alpha'
 \end{aligned}$$

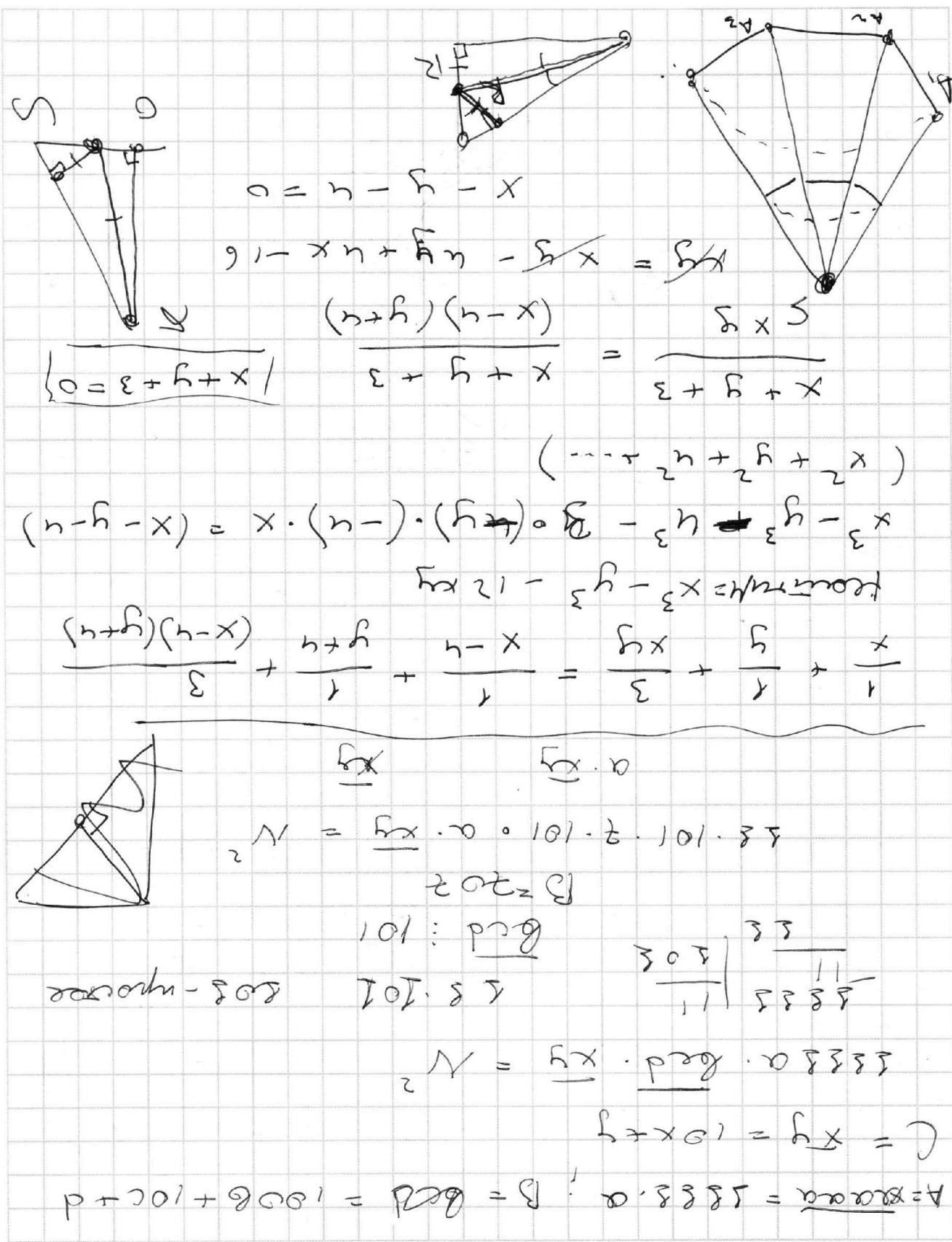
$$(\sin \pi - \sin \alpha) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \alpha) \cos \alpha$$

Если отмечено более одного решения для уравнения $\sin \alpha = \sin \beta$, то оно не является общим для обеих окружностей.

- | | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> NS |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|



На одине из окружностей может быть общим для обеих окружностей. Точки, в которых обе окружности пересекаются, называются точками пересечения окружностей.



Ecam otmecheho sorge oshno 33/21/21 nini he otmecheho hn ojihon 33/21/21, ctpahuna chntacter hephobnrom n he mopepeketar. Ctpahuna no razz/ohm nis 33/21/21 myneppotra orjejhpo. Llopha QR-kora hejnojcytnml

gyamaphe rojnegectib ctpahnu a Peuehnn rekakjou sanjan otuejhbo.
jaahn, peuhene rotopoh mpejeclatrehn a ctpahnu. Taakc yekankte hoesp ctpahnuu n
ha ojahn ctpahnu moehno ofopgnalbs **torjku ohy zaaby**. Ometrib reketinom homcp

