



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

р/

Предположим $A = \overline{aaaa} = a \cdot \overline{1111}$, где a - некоторая ненулевая цифра, тогда $ABC = \overline{1111} \cdot a \cdot BC = \overline{101} \cdot \overline{11} \cdot a \cdot BC$. $\overline{101}$ - простое число, поэтому B должно делиться на $\overline{101}$, чтобы ABC было арифметическим числом (с не может: 101 , т.к. C - цифра) при этом $\overline{101}$ - одна из цифр числа B и 7^4 по трёхзначности: $101 \Rightarrow \overline{101}, \overline{202}, \overline{303}, \overline{404}, \overline{505}, \overline{606}, \overline{707}, \overline{808}, \overline{909} \Rightarrow B = \overline{707}$. Значит $ABC = \overline{11} \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot a \cdot C$. Остается перебрать варианты a и C , где a - ненулевая цифра, C - двузначное с хотя бы одной 1 . При этом $ABC : 7$ и $: 11$, но 7 -и арифметическое должно быть кратно 7^2 и 11^2 . Перебираем: $a=1 \Rightarrow C: 77$ не дел. $a=2 \Rightarrow C: 277$ не дел. $a=3 \Rightarrow C: 377$ не дел. $a=4 \Rightarrow C: 477$ не дел. $a=5 \Rightarrow C: 577$ не дел. $a=6 \Rightarrow C: 677$ не дел. $a=7 \Rightarrow C: 777$ не дел. $a=8 \Rightarrow C: 877$ не дел. $a=9 \Rightarrow C: 977$ не дел. Поочередно, что C не дел: $7 \cdot 11$, т.к. $\Rightarrow C = 77$ не годит; $a \cdot 11$, т.к. $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Значит единств. вариант это $a = 7$. Остается найти $C : 11$ и содерж. цифру 1 - это только $C = \overline{11}$.

Ответ: $(7777, 707, 11)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по условию: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3=0 \\ xy=(x-4)(y+4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3=0 & (1) \\ x-y-4=0 & (2) \end{cases}$$

Решим систему:

(1): не имеем $x > 0$ и $y > 0$ по ум.

Значит рассмотрим только (2); заметим, что:

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = (A+B+C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) \quad \forall A, B, C$$

поэтому подставив вместо $A = x$; $B = -y$

$C = -4$, получим: $x^3 - y^3 - 4^3 - 3 \cdot x \cdot (-y) \cdot (-4)$

$$= (x - y - 4) \cdot (\dots) \quad \text{А, но } x - y - 4 = 0$$

но у нас $M = x^3 - y^3 - 12xy$ можно

$$\text{выразить } y \Rightarrow x^3 - y^3 - 12xy = 0 + 4^3 = 64$$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a). (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y^3 = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\text{Обозначим } \pi x = \alpha; \pi y = \beta \Rightarrow$$

$$(\sin \beta - \sin \alpha) \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cos \beta$$

$$\cos^2 \beta - \sin^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0$$

$$\cos 2\beta + \cos(\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow (\text{по формуле суммы косинусов})$$

$$\cos \frac{\alpha - \beta + 2\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta - 2\beta}{2} = 0$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - 3\beta}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{\alpha - 3\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}. \text{ Обратная замена:}$$

$$\begin{cases} \pi x + \pi y = \pi + 2\pi n \\ \pi x - 3\pi y = \pi + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 + 2n \\ x - 3y = 1 + 2n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + 2n - x \\ y = \frac{x - 1 - 2n}{3} \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Значит } p\text{-я и имеют вид } \begin{cases} (x; 1 + 2n - x) \\ (x; \frac{x - 1 - 2n}{3}) \end{cases}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

б). $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\pi/2$. по свр.
обратных тригоном. ф-ий: $\arccos \in [0, 2\pi]$

$\arcsin \in [-\pi/2; \pi/2] \Rightarrow \arccos - \arcsin \in [-\pi/2, 3\pi/2]$, а значит перейдут все пары (x, y) кроме тех при которых:

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} = 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} = \pi/2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{из условия равенства} \\ -\pi/2 \end{array} \right)$$

$\Downarrow$ т.е. по условию $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{— не подходит}$$

Вероятно ли что $(7, 4)$ — р-е ур-е? (а)
82, ~~один из~~ ~~факт~~ ~~всегда~~ $(x, 1 + 2 \cdot 5 - x)$
 $(7; 1 + 2 \cdot 5 - 7)$. Остальные пары

фактически проверить не свр. $\frac{x}{7} \in [-1; 1]$

и $\frac{y}{4} \in [-1; 1]$, а также убедиться ли
р-ли ур-е? $\Leftrightarrow x \in \{-7; -6; -5; \dots; 7\}$

$y \in \{-4; -3; -2; \dots; 4\}$, кроме $(7, 4)$

р-е ур-е: $\begin{cases} (x, 1 + 2m - x) & (*) \\ (x, \frac{x - 1 - 4m}{3}) & (V) \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☒☐☐☐☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3 Т. Логич.

Заметим, что из $\textcircled{*}$ будут подходить
все (x, y) вида $x \equiv 2$, $y \equiv 2$ и $x \equiv 2, y \equiv 2$
т.е. $2 + 2n - x \equiv x + 2$. Таким образом
остаются рас-ты пары, где $x \equiv 2$ и $y \equiv 2$
либо $x \equiv 2$ и $y \equiv 2$. Они должны подх
под $\textcircled{V}$, т.е. $y = \frac{x - 2 - 2n}{3} \in \mathbb{Z}$ ~~$\frac{x - 2 - 2n}{3} \in \mathbb{Z}$~~
 ~~$y \in \mathbb{Z}$~~ Однако $y = \frac{x - 2 - 2n}{3} \equiv x + 2$
потому что x и y разной четности.

Ответ: все наборы (x, y) вида:

$$x \equiv y \pmod{2} \quad x \in \{-7, -6, \dots, 7\}, \text{ иные} \\ y \in \{-4, -3, \dots, 4\} \quad (7, 4)$$

$$\frac{55.12}{n(n-1)} = \frac{k(n-1)}{n(n-1)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ и т.д. про з.е.х.

$$K(K-1) = 11 \cdot 12 = 70 \text{ ив. и ур.} \Rightarrow$$

не более двух корней, ~~указываем~~ но

$$K = 12 \text{ и } K = -11 \text{ не год.} \Rightarrow \text{наим.}$$

корн. из всех корней по условию

задача только $K = 12$

Ответ: 12 билетов



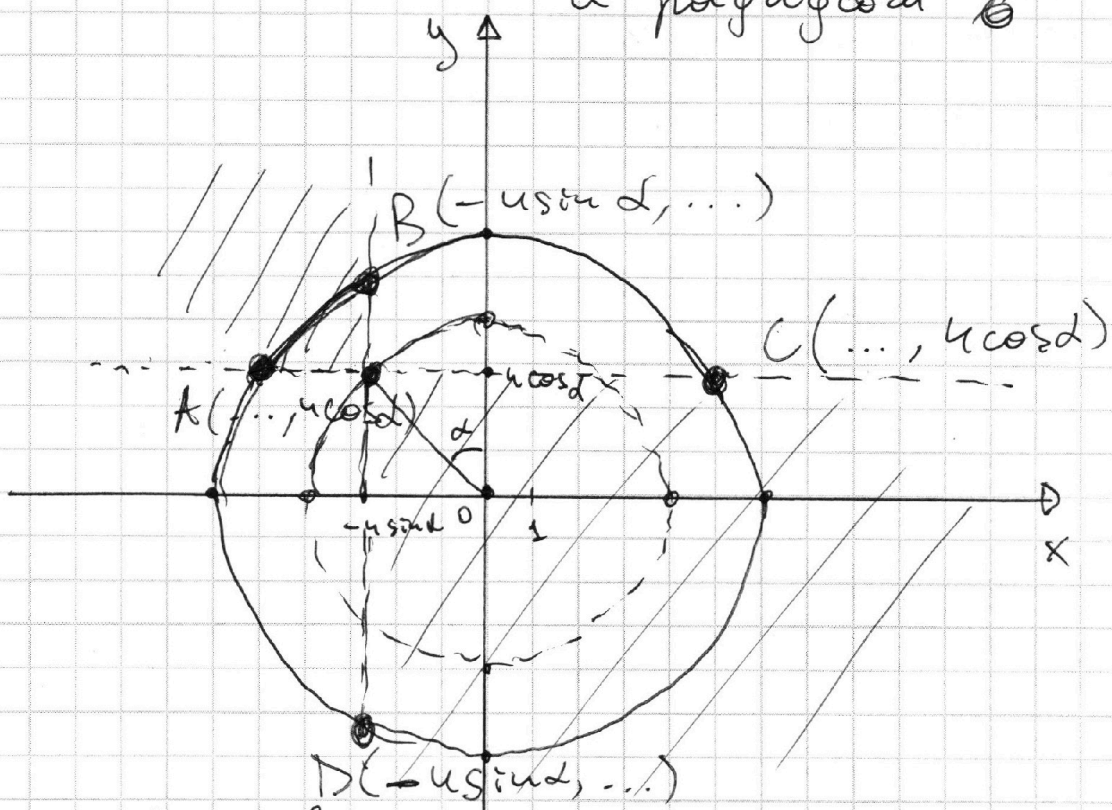
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{круг с центром} \\ \text{и радиусом } 6 \end{array}$$



где (1) n -ва обозначим окружность радиуса 6 и отложим угол α от O по OY (см рис) таким образом пересекаясь с окружностью в точке A с координатами $(-4 \sin \alpha; 4 \cos \alpha)$ и областью, удовлетворяющей (1). n -ва (2) обозначена и т.д. Таким образом граница $P(\alpha)$ это две дуги окружности и два отрезка $(AB; AC; CB)$



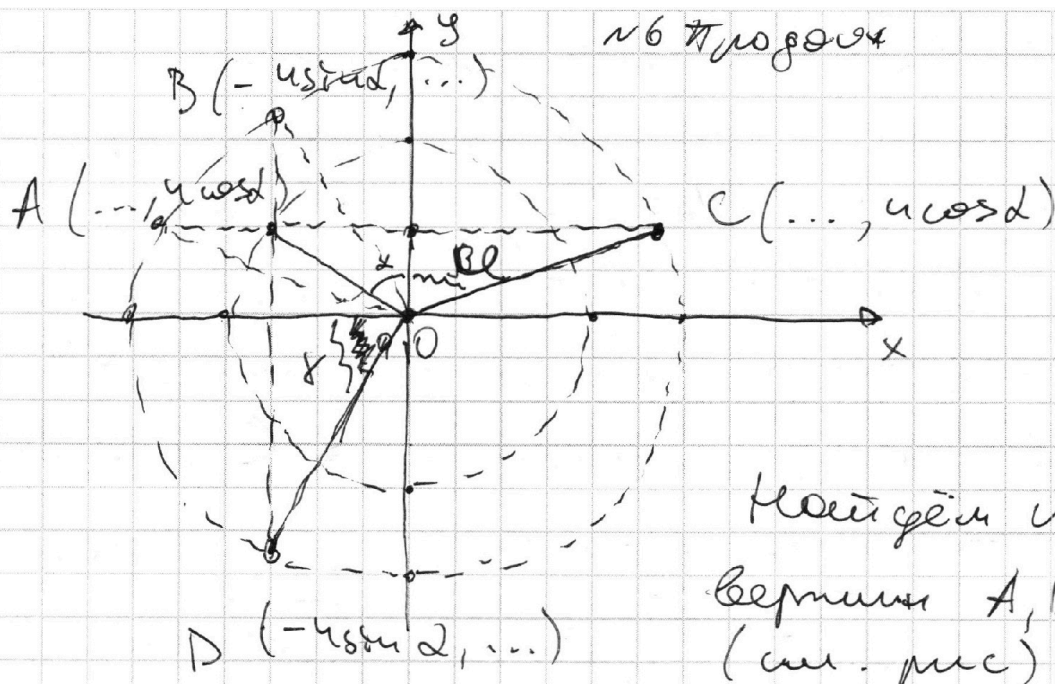
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Обозначим $\angle COY = \varphi$. Тогда: $\cos \varphi = \frac{2}{3} \cos \alpha$. Тем самым $AC = 2 \cdot 6 \cdot \sin \varphi = 12 \sin \varphi$; пусть $\angle DO(-x) = \delta$. Тогда: $\cos \delta = \frac{2}{3} \sin \alpha$, тем самым $BD = 2 \cdot 6 \cdot \sin \delta = 12 \sin \delta$, найдем градусы:

$$\widehat{CD} = 6 \cdot \angle DOC = 6 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \varphi + \frac{\pi}{2} - \delta \right) = 6 \cdot \left(\frac{3\pi}{2} - \varphi - \delta \right).$$

$$\widehat{AB} = 6 \cdot \angle AOB = 6 \cdot \left(\varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \right) = 6 \cdot \left(\varphi + \delta - \frac{\pi}{2} \right). \text{ Тогда заметим,}$$

$$\text{то } \widehat{CD} + \widehat{AB} = \frac{6 \cdot 3\pi}{2} - \frac{6 \cdot \pi}{2} = 6 \cdot \pi = \text{const}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит $\overline{AB} + \overline{CD} = \text{const}$, не зависит от выбора

точек A, B, C, D . Значит нам необходимо найти $\max(\overline{AB} + \overline{CD})$, т.е. ~~найти~~ $\max(12 \sin \alpha + 12 \sin \beta)$, где $\cos \alpha = \frac{2}{3} \cos \delta$

$\cos \delta = \frac{2}{3} \sin \alpha$. При этом ясно, что

т.к. AC и BD — хорды, то $\angle C$ и $\angle D > 0$

а значит $\sin \alpha$ и $\sin \beta > 0$, поэтому:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \delta} =$$

$$= \frac{\sqrt{9 - 4 \cos^2 \delta}}{3}; \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \delta}$$

$$= \frac{\sqrt{9 - 4 \sin^2 \delta}}{3}. \Rightarrow \max \left\{ 4 \cdot \left(\sqrt{9 - 4 \cos^2 \delta} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \delta} \right) \right\}. \text{ У нас в м/у средним}$$

арифм и кв. кор. имеем: $\frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{2} \leq \sqrt{\frac{A+B}{2}}$

А значит получив вместо $A = 9 - 4 \cos^2 \delta$

$$B = 9 - 4 \sin^2 \delta: \quad \frac{\sqrt{9 - 4 \cos^2 \delta} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \delta}}{2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{18 - 4}{2}} = \sqrt{7}, \text{ применим равенство}$$

достигаемое при $9 - 4 \cos^2 \delta = 9 - 4 \sin^2 \delta$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 6 баллов.

$$\text{Значит } \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{и } \max(\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{AC} + \overline{BD}) = 6\pi + 8\sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: } 6\pi + 8\sqrt{2}, \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \Bigg|_{k \in \mathbb{Z}}$$

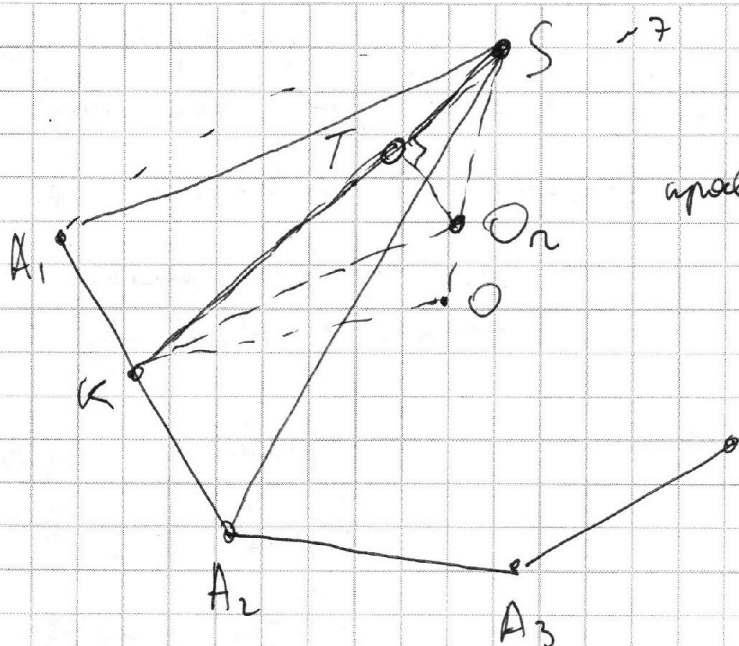


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



отметим O - центр
правильного Δ со сторонами $A_1A_2 \dots A_n$

K - середина
 A_1A_2

$SO \perp (A_1A_2A_3)$

т.е. пирамида
правильная

$OK \perp A_1A_2 \Rightarrow$

$SK \perp A_1A_2$ (т.е.

это означает, что $(SO) \perp (SA_1A_2)$ (т.е. перпендикулярно трём сторонам)

$SO \perp A_1A_2$. Предположим $T \in SK$ $SK \perp$
 A_1A_2

$T \in$ м-ти сечения, тогда т.е. $\exists$ - T в
которой касаются всех рёбер, и $T \in$ ребру
усеженной пирамиды лежащий в (SA_1A_2)

$\Rightarrow ONT \perp SK$, т.е. SO - линия пересечения
 $(SO) \perp (SA_1A_2)$, а также $On \in SO$, т.е.

$On \in SO$ равноудалена от рёбер
м-ти, тогда $KO_n = TO_n$ и $\angle KTO_n = \frac{\pi}{2}$
 $\Rightarrow$ конфигурация невозможна (не им
р/б Δ -и с углами по 90°), это означает



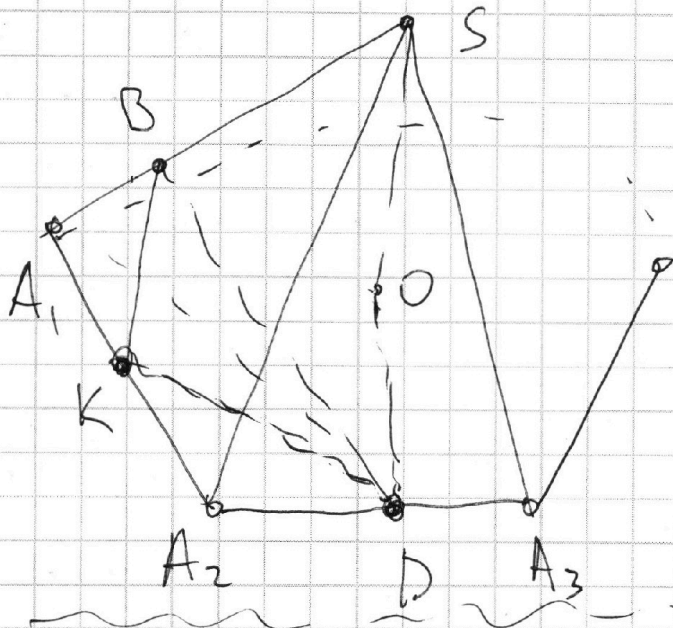
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

это $K \equiv T$. Однако такая конфигурация возможна когда усеченная пирамида — тетраэдр, т.е. когда ≥ 3 точки сечения $\in (A_1 A_2 A_3) \Rightarrow$ м-то сечение сечения $(A_1 A_2 A_3)$



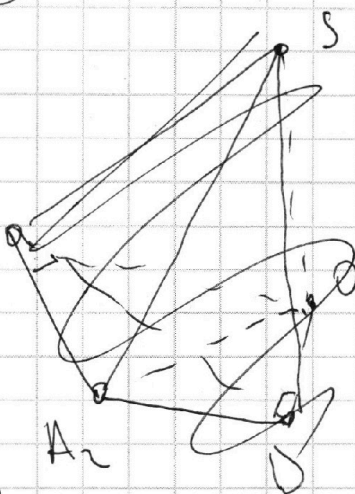
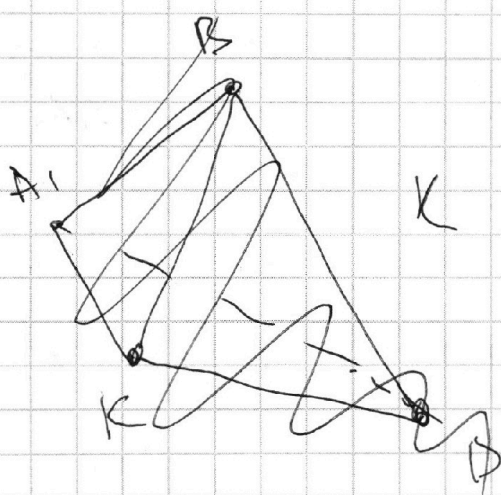
Однако в каждой сечении $B \in S$

т.е. м-то сечение усеченной пирамиды

Однако тогда $B \in S \Rightarrow$ усеченная пирамида

$S \in A_1 A_2$

Невозможна конфигурация.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

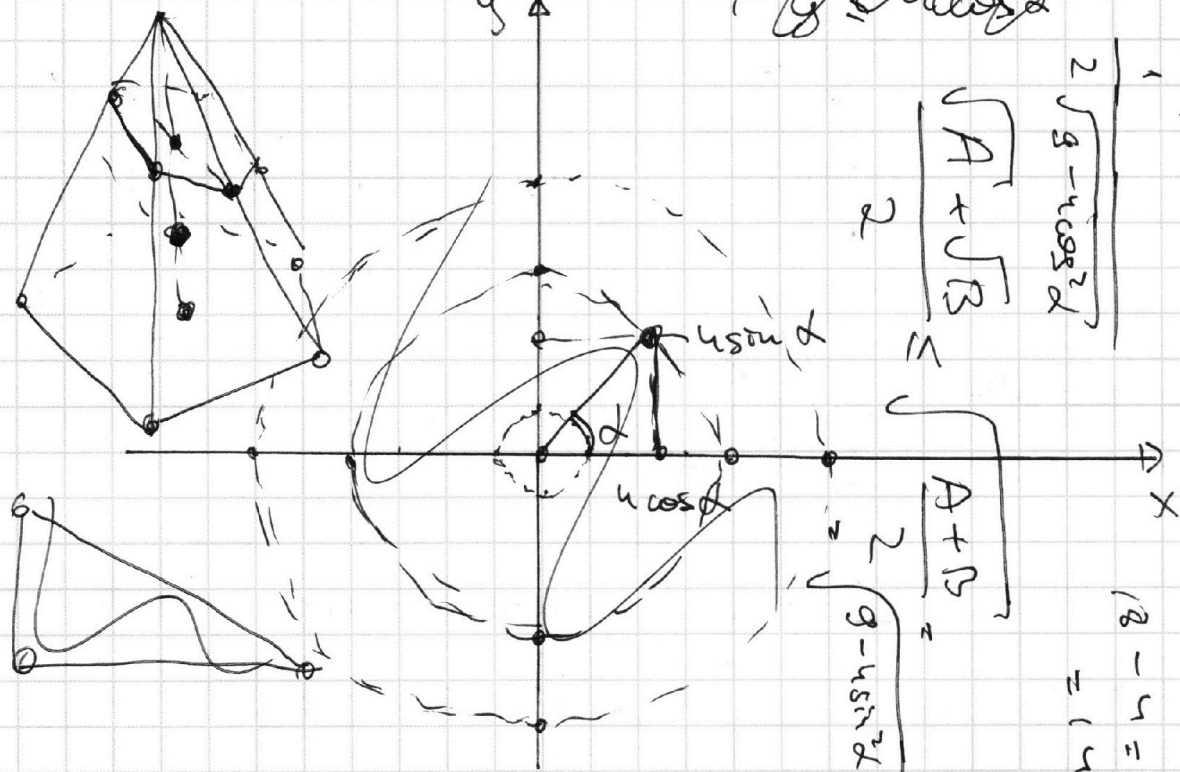
1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

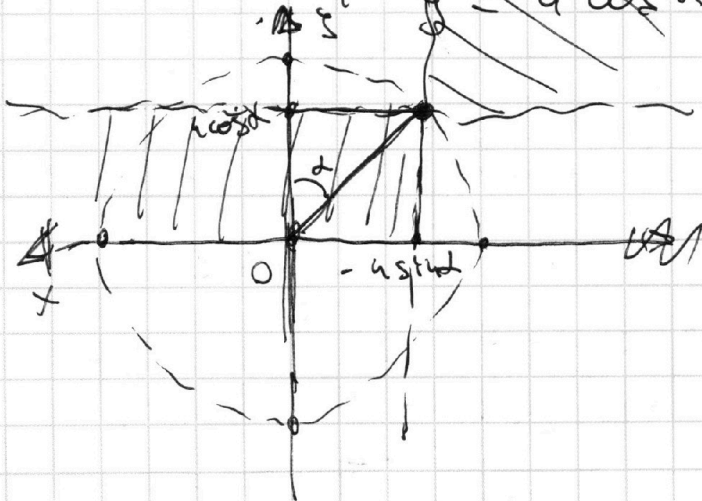
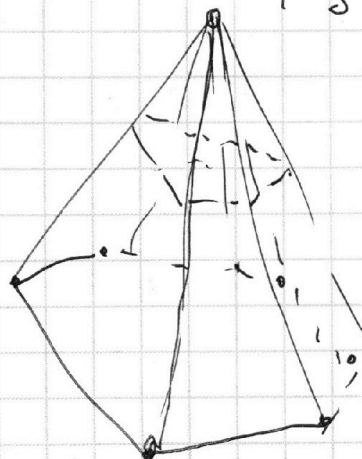
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4\sin\alpha \\ y \leq 4\cos\alpha \end{cases}$$



$$xy + 4(\sin\alpha \cos\alpha - x \cos\alpha) - 16 \sin\alpha \cos\alpha \leq 0$$
$$\begin{cases} x + 4\sin\alpha \geq 0 \\ y - 4\cos\alpha \leq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq -4\sin\alpha \\ y \leq 4\cos\alpha \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b). \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$$

из ограничений $\frac{x}{7} \in [-1, 1]$ и

$\frac{y}{4} \in [-1, 1]$; при этом по определению:

$$\arccos \in [0; 2\pi]; \arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}], \text{ а}$$

значит под н-во подойдут все пары (x, y) удовлетворяющие под ограничениям, а также

$$\text{пар, которые: } \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{7} = \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \varphi \in [0, 2\pi] \\ \delta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \varphi = \delta - \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \cos(\delta - \frac{\pi}{2}) \\ \cos(\delta - \frac{\pi}{2}) = \sin \delta \\ \cos \varphi = \frac{x}{7} \\ \sin \delta = \frac{y}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \sin \delta \Leftrightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{4} \Rightarrow 4x = 7y$$

при этом из опр: $x \in [-7, 7]; y \in [-4, 4]$

т.е. $x, y \in \mathbb{Z}$ (по условию), то $x:7, y:4 \Rightarrow$ пары $(-7; -4); (0; 0); (7; 4)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Определяется количество K . P и B из K
из K и B и B
 C_K^4 - всего P, B и 2 человека

$$\text{13. } \frac{C_{K-2}^2}{C_K^4} = \frac{C_{K-2}^2}{C_K^T} \quad \text{Т. человек}$$

$$\text{13. } \frac{C_{K-2}^2}{C_K^4} = \frac{1}{C_K^T} \quad T-2$$
$$\text{13. } \frac{K!}{T! (K-T)!} = \frac{K!}{K! (K-K)!}$$
$$\frac{T! (K-T)!}{C_{K-2}^2} = \frac{C_{K-2}^{T-2}}{C_K^T}$$

$$\text{13. } \frac{(K-2)!}{2! (K-4)!} = \frac{(K-2)!}{(T-2)! (K-T)!}$$
$$\frac{K!}{K! (K-K)!} = \frac{T! (K-T)!}{T(T-1) \dots 1}$$

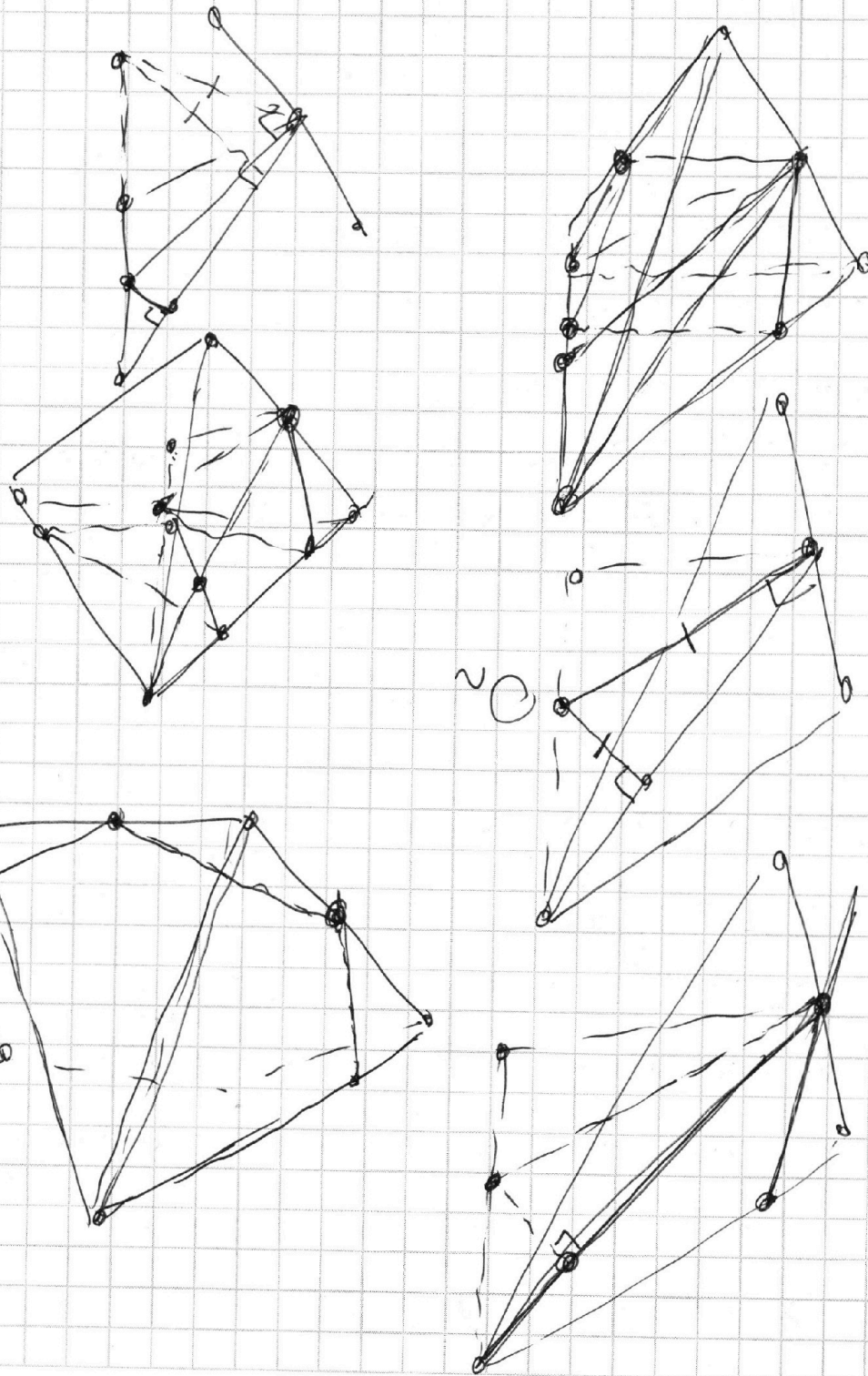
Тогда $\in SO$ равноудалены от ребер
 $A_1 A_n$ -ия (Th. о трёх перп. + Th. Пифаг.
 гора). О равноудаленности от ребер см-
 ия $\Rightarrow D$ -м это: $SA \perp AA_1$ в м-н (SA, A_1)
 $\Rightarrow T. ч SA, A_1 - p/d \Rightarrow K$ -ср; т.о. OK -раск-
 ление от центра на все ребра $A_i A_j$ равны и φ из
 @тальных у см-ий тогда $O_n K \perp A_i A_j$
 (Th. о трёх перп.) $\Rightarrow O_n K^2 = OO_n^2 + OA^2 =$
 не зависит от выбора ребра см-ия.
 При этом $O_n L \perp SA_1 : O_n L = O_n K$
 Пусть см-ия $B_1 B_2 \dots B_n$ - сечение усечённого
 ме-тоно



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порядк QR-кода недоступен!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

☒	☒	☒	☒	☒	☐	☐
1	2	3	4	5	6	7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Поряд. QR-кода недопустим!



$$A = \overline{aa\alpha a} = 5555 \cdot a; B = \overline{bcd} = 100b + 10c + d$$

$$C = xy = 10x + y$$

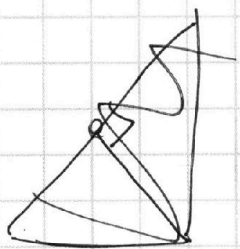
$$\overline{5555a \cdot bcd} \cdot \overline{xy} = N^2$$

$$\begin{array}{r} 5555 \\ 11 \overline{) 5555} \\ \underline{11} \\ 4444 \\ \underline{44} \\ 4044 \\ \underline{40} \\ 44 \end{array}$$

$$\overline{bcd} : 101$$

$$B = 707$$

$$55 \cdot 101 \cdot 7 \cdot 101 \cdot a \cdot \overline{xy} = N^2$$



$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{xy}{3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{y+4}{3} + \frac{(x-4)(y+4)}{3}$$

$$\overline{5555a} = x^3 - y^3 - 12xy$$

$$x^3 - y^3 - 12xy = (x-y) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot x = (x-y-4) \cdot (x^2 + y^2 + 4x + 4y + 16)$$

$$\frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{5 \times 5}{x+y+3}$$

$$xy = x^2 - 4x - 4y + 16$$

$$x - y - 4 = 0$$

