



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $A = \overline{aaaa}$, B где a - некоторая цифра.

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101. \quad (1 \leq a \leq 9)$$

(т.к. C - ~~трехзначное~~ C - ~~трехзначное~~)

Заметим, что $C < 100$, а также 101 - простое.

Т.к. ABC - квадрат, то простое число 101 должно входить в четной степени, а значит если его степень входит в A равна 1 , то B или C делится на 101 .

С т.к. $C < 100$, то $C \nmid 101$, значит $B \div 101$.

Все трехзначные, делящиеся на 101 : $101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909$. Только 202 имеет цифру 2 ,

т.е. $B = 202$. Также A имеет степень входящее простого 11 , равную четную.

Значит B или C делится на 11 . Но

$202 \nmid 11$, т.е. $C \div 11$. Все двузначные, делящиеся

на 11 : $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$. Только 33 имеет цифру

$$3, \text{ т.е. } C = 33. \quad \sqrt{ABC} = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 202 \cdot 33 = a \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 6 = q^2$$

$$(q \in \mathbb{N}). \quad 6a = \left(\frac{q}{11 \cdot 101} \right)^2 \quad \left(\frac{q}{11 \cdot 101} \in \mathbb{Z} \right) \text{ (покажем, что } q \div 11 \cdot 101 \text{)}.$$

Т.е. $6a$ - квадрат, значит учитывая, что $1 \leq a \leq 9$, $a = 6$.

$A = 6666, B = 202, C = 33$. Ответ: $(6666; 202; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Условие задачи нам говорит, что:

($x \neq 1$, $y \neq -1$, тогда выражение имеет смысл)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{\cancel{x-1}(y+1)} \quad (x+y+2 > 0)$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-1)(y+1)}$$

$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy + x - y - 1$$

$$x - y = 1$$

$$\text{Заметим, что } x^3 - y^3 - 3xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy = \\ = x^2 + xy + y^2 - 3xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = 1.$$

Значение выражения получается, например $x=3, y=2$.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \text{действительно: } \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{6},$$

$$\text{а также } x^3 - y^3 - 3xy = 27 - 8 - 18 = 1.$$

Ответ: 1.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $x-y$ и $3x+y$ - одной четности,
т.к. их разность $(x-y) - (3x+y) = -2x - 2y = -2(x+y)$
- четная. Значит мы можем проверять на
четность одно из этих выражений, например
 $x-y$. Если $x-y$ - нечетное, то x, y - разной чет-
ности.

Целые числа с интервала для x :

$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ - 5 нечет, 5 чет.

Целые числа с интервала для y :

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ - 4 нечет, 4 чет.

Для нечет. x берём чет. y - вариантов выбрать
 $5 \cdot 4 = 20$. Для чет. x берём нечет y - вариантов выб.
равн $5 \cdot 4 = 20$. Значит всего $20 + 20 = 40$.

Ответ: 40.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin\left(\pi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) - \sin \pi x = \cos\left(\pi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \cdot \cos \pi x$$

$$\cos\left(\pi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) = \cos \pi x$$

Получаются пары $(x, \frac{-y+1+2n}{2})$; $(x, y+1+2n)$,
где $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.

5) (A) $\arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}$; $(\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], -1 \leq x \leq 1)$

(B) $\arccos \frac{y}{4} \leq \pi$ $(\arccos x \in [0; \pi], -1 \leq x \leq 1)$

(C) $\arcsin \frac{x}{5} + \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$.

$\Rightarrow$ Равенство достигается в (C), ~~то~~ когда оно достигается в (A) и (B). Также выражения имеют смысл при $-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$; $-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1$.

$x \in [-5; 5]$, $y \in [-4; 4]$.

$\arcsin$ исключили пары (x, y) , при которых достигается равенство. $\arcsin \frac{x}{5} \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{5} \neq 1$; $x \neq 5$;
 $\arccos \frac{y}{4} \neq \pi \Rightarrow \frac{y}{4} \neq -1$; $y \neq -4$. Т.е. $x \in [-5; 4]$,

$y \in [-3; 4]$, а условие из уравнения таково:

$$\begin{cases} x-y = 1+2n, n \in \mathbb{Z} \\ 3xy = 1+2n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$
 это значит, что $x-y$ - нечётное, или $3xy$ - нечётное



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

4.

$$(1) 2 \sin\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \sin \pi x = 2 \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos \pi x$$

$$1) \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\pi(x-y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} + n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x-y = 1+2n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \text{т.к. } x, y - \text{разные значения}$$

$$x = y + 1 + 2n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \neq 0$$

$$\text{Решим (1) на } 2 \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \neq 0.$$

$$\sin\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \sin \pi x = \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \cos \pi x$$

$$\cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \cos \pi x - \sin\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \sin \pi x = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2} + \pi x\right) = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} + \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x+y}{2} + x = \frac{1}{2} + n; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$3x+y = 1+2n; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{-y+1+2n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)4!}{4!}$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{12}{n(n-1)}$$

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$\frac{12}{n(n-1)} \cdot 2,5 = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \quad (n > 1)$$

$$30 = k(k-1)$$

$$k^2 - k - 30 = 0$$

По т. Виета $k = 6; -5$; пошх. $k = 6$. Ответ: 6.

~~Случай 2, $k > n$. Тогда вероятность в конце месяца равна 1. Тогда вероятность в начале месяца была $\frac{1}{2,5} = \frac{2}{5}$.~~

$$\frac{12}{n(n-1)} = \frac{2}{5}; \quad 60 = 2n(n-1) \rightarrow n^2 - 2n - 30 = 0;$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего было n означая классиков.
Кол-во способов выбрать из них четверых
равна C_n^4 . А кол-во способов выбрать
четверых, включая Петю и Васю равна
кол-ву способов выбрать 2 человека из остав-
шихся $n-2$, то есть C_{n-2}^2 . Значит в
начале месяца вероятность была $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$.

Пусть в конце месяца было выдано
 k билетов. Кол-во способов распределить их
между n человек равно C_n^k . А если в кол-во
способов выбрать k человек, включая Петю
и Васю равно кол-ву способов выбрать
 $k-2$ из оставшихся $n-2$, т.е. C_{n-2}^{k-2} . Т.е.
вероятность в конце месяца была $\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$. Из
соотношения вероятностей в начале и в конце
месяца выходит:

$$\frac{2,5 C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\angle CPB = \angle CAP + \angle ACP$ (свойство внешней угла тр-ка ACP)

$$2\alpha = \angle ACP + \alpha$$

$\angle ACP = \alpha$, $\angle ACP = \angle CAP \Rightarrow \triangle APC$ - равнобедренный. $AP = PC = 7,5$.

По т. косинусов в $\triangle APC$:

$$AC^2 + AP^2 - 2AC \cdot AP \cdot \cos \angle CAP = CP^2$$

$$81 + 56,25 - 2 \cdot \frac{135}{2} \cdot \cos \angle CAP = 56,25$$

$$81 - 135 \cos \angle CAP = 0$$

$$\cos \angle CAP = \frac{81}{135} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \angle CAP = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}, \quad \sin \angle CAB = \frac{4}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \angle CAB = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot (AP + PB)$$

$$\sin \angle CAP = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12,5 \cdot \frac{4}{5} = 45.$$

Ответ: 45.

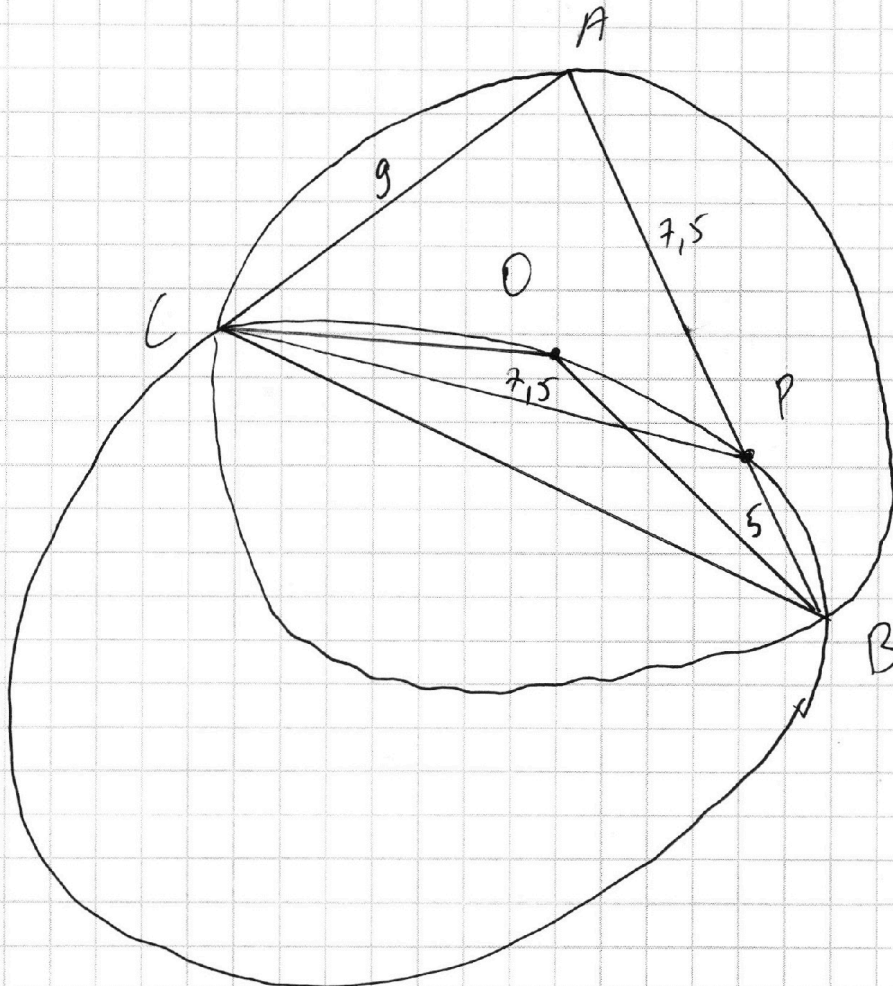


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle CAB = \alpha$, тогда $\angle COB = 2\alpha$ как
центральный, опирающийся на дугу BC в ω_1
 ~~$\triangle COB$ $CO = OB$ (как радиусы ω_1). $\triangle COB$ равно-~~
~~бедренный.~~

и $\angle COB = \angle CPB$ (как вписанные углы,
опирающиеся на дугу CB в ω_2).
 $\angle CPB = 2\alpha$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $AC \cap BD = O$. Пусть $O(a, b)$. Тогда A и C имеют ординату b , а B и D абсциссу a .

Тогда абсциссы $x^2 + b^2 = 25$; $x = \pm \sqrt{25 - b^2}$.
Т.е. точки A и C имеют координаты $(-\sqrt{25 - b^2}, b)$ и $(\sqrt{25 - b^2}, b)$. (Точки A и C кажутся по разному)

Если $a^2 + y^2 = 25$; то $y = \pm \sqrt{25 - a^2}$, т.е. B и D имеют абсциссу $x = (\sqrt{25 - a^2}, a)$ и $(-\sqrt{25 - a^2}, a)$.

Тогда $BD = 2\sqrt{25 - a^2}$, $AC = 2\sqrt{25 - b^2}$.

$$AC + BD = 2\sqrt{25 - a^2} + 2\sqrt{25 - b^2} = 2(\sqrt{25 - a^2} + \sqrt{25 - b^2}) \stackrel{(X)}{\leq} 2\sqrt{2(\sqrt{25 - a^2}^2 + \sqrt{25 - b^2}^2)} = 2\sqrt{2(50 - a^2 - b^2)} = 2\sqrt{2 \cdot 32} = 16.$$

Данное значение достигается при $\sqrt{25 - a^2} = \sqrt{25 - b^2}$; $a^2 = b^2$,
но $a^2 + b^2 = 18$, т.е. $a^2 = 9$; $a = \pm 3$,
 $b = \pm 3$. Т.е. $3\sqrt{2} \sin \alpha = \pm 3$ и $3\sqrt{2} \cos \alpha = \pm 3$,
 $\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

Общий пример будет $16 + 5\pi$.

ответ: $16 + 5\pi$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n$ и $\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

Докажем (X):

$\forall m, n > 0$:

$$m + n \leq \sqrt{2(m^2 + n^2)}$$

$$m^2 + n^2 + 2mn \leq 2m^2 + 2n^2$$

$$(m - n)^2 \geq 0. \text{ ЧТД.}$$

Равенство при $m = n$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \quad (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$$

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

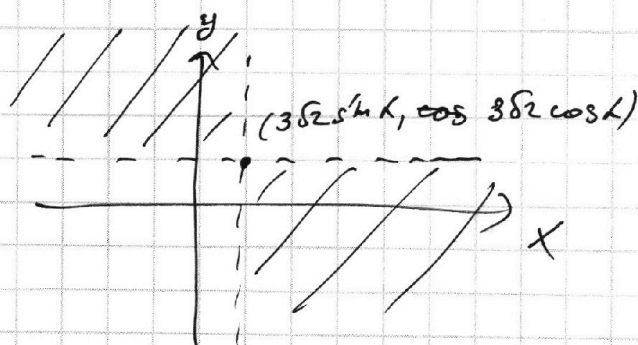
Уравнение (2) представляет собой множество точек, лежащих на круге радиуса 5 с центром в точке начала координат, т.к. для любого $0 \leq r \leq 5$ уравнение $x^2 + y^2 = r^2 \leq 25$ входит в это множество, а для $r > 5$ уравнение $x^2 + y^2 = r^2 > 25$, не входит.

Рассмотрим (1):

$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$$

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha \geq 0 \\ x - 3\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y = 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$$



На графике это представляет собой множество двух областей, на которые делит плоскость прямые $y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$ и $x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что точка пересечения данных прямых имеет координаты $(3\sqrt{2}\sin\alpha, 3\sqrt{2}\cos\alpha)$, т.е. данная точка лежит на окружности, имеющей уравнение $x^2 + y^2 = (3\sqrt{2})^2$, т.к.
 $(3\sqrt{2}\sin\alpha)^2 + (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2 = (3\sqrt{2})^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = (3\sqrt{2})^2$.

(т.е. радиус этой окружности радиуса $3\sqrt{2}$

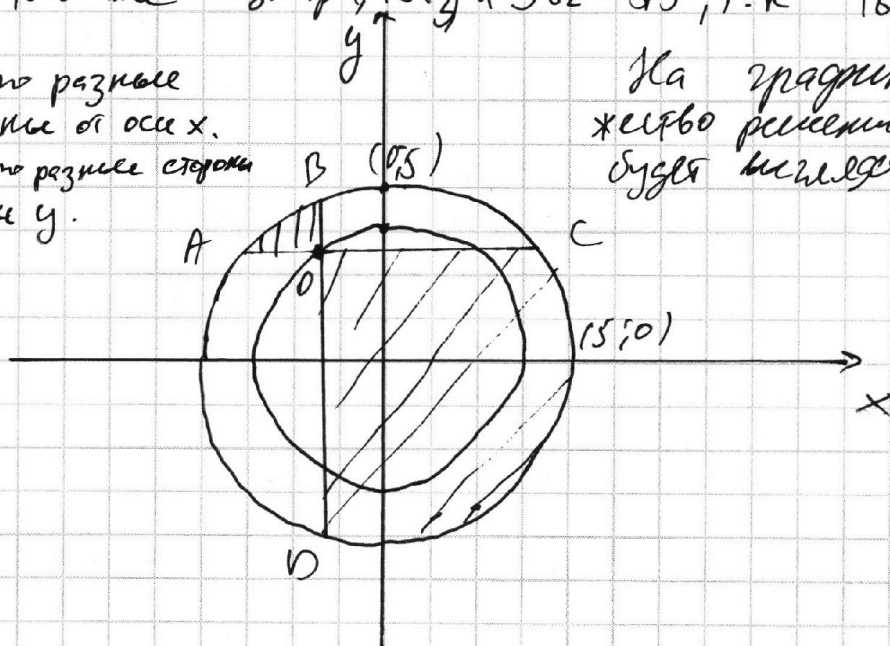
и с центром в начале координат.)

Заметим, что данная окружность лежит в круге радиуса 5 и того же центра, т.к. $3\sqrt{2} < 5$, т.к. $18 < 25$.

В, D по разные стороны от оси x.

A, C по разные стороны от оси y.

На графике можно решить следующим образом:



Отметим точки пересечения прямых l_1 с окружностью радиуса 5, как на графике, назовем их A, B, C, D.



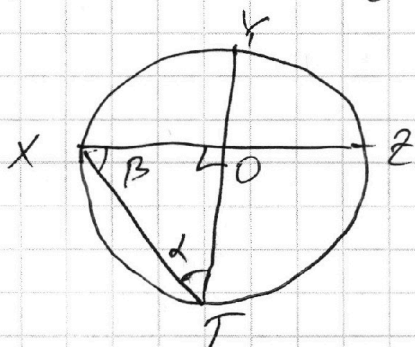
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Докажем, что сумма дуг g_{YZ}
 AB и CD равна половине длины
окружности радиуса 5 .



Когда имеем
две перпендику-
лярные хорды XY и YZ
(пусть это YT и XZ),
то $\angle XTY = 2\angle XTY$,
 $\angle ZYT = 2\angle ZYT$,

$\angle XTY + \angle ZYT = 2(\angle XTY + \angle ZYT)$
Из $\triangle XOY$ пусть $YT \perp XZ = O$. $\triangle XOY$ - прямо-
угольный, т.е. $\angle XTY + \angle ZYT = 90^\circ$.

$$\text{Т.е. } \angle XTY + \angle ZYT = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ = \frac{360^\circ}{2},$$

то есть их сумма ^{дуг} действительно равна половине
общей длины окружности.

В нашем случае их сумма равна

$$\frac{2\pi \cdot 5}{2} = 5\pi$$

Общий периметр равен $5\pi + AB + CD$.
Наша цель - максимизировать $AB + CD$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

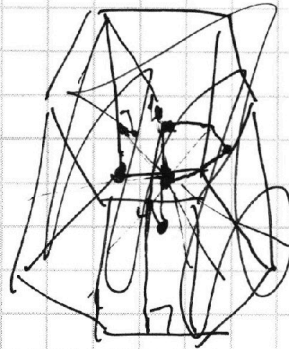
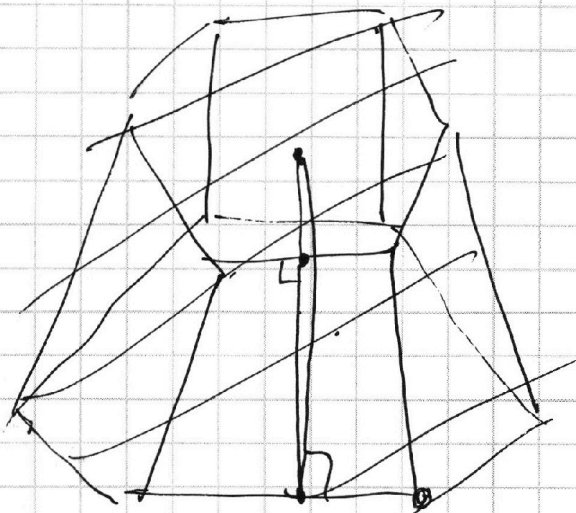
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что O_n — центр шара,
 является центром сечения сферической
 плоскостью α усеченной пирамиды, т.к.
 расстояния до верхнего и ниж. оснований
 равны (перпендикуляры до плоскостей — радиусы).

Значит, если опустить перпендикуляры из O_n
 на соседние грани, они будут равны.

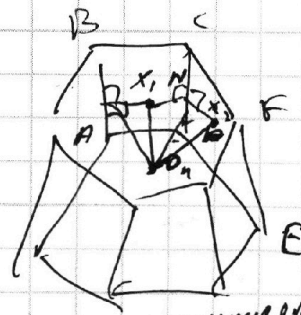
Пусть грани $ABCD$ и $CBFE$.

Перпендикуляры BO_nX_1 и CO_nX_2 .

Опустим перпендикуляры OX_1N и OX_2N

на CD . Они в сумме дадут длину

точки N из-за симметрии, а т.к. $BO_n \perp CD$, все такие перпендикуляры
 равны $\rightarrow$ $BO_n \perp CD$.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{C_{k-2}^2}{C_k^5} = 2,5$$

$$\frac{C_{k-2}^{n-2}}{C_k^n}$$

$$\sqrt{25-x^2} + \sqrt{25-y^2}$$

$$\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}$$

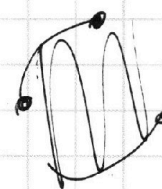
2

$$4! = 24$$

$$\frac{(k-2)(k-3)}{2}$$

$$\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}$$

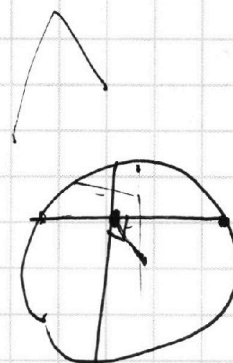
$$\frac{12}{n(k-1)}$$



C_4^1, k

$$\frac{k!}{(k-4)!n!}$$

$$\frac{(k-2)!}{(k-4)!(k-2)!}$$



$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5}$$

$$n \leq k \quad (x, y)$$

1

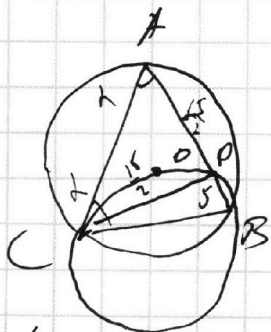
$$\frac{\pm \sqrt{25-x^2}}{2\sqrt{25-x^2}}$$

$$21 =$$

$$= \left(\frac{15}{2}\right)^2 (1 - 2\cos\varphi)$$

$$\frac{15^2}{2}$$

$$41 = \frac{225}{2} \cdot (1 - \cos\varphi)$$



$$\frac{7}{5}$$

$$9 \cdot 8 + x^2$$

$$\frac{15}{2} \cdot \frac{2}{5}$$

$$2\sqrt{25-x^2} + 2\sqrt{25-y^2}$$

$$x^2 + y^2 = 18$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

B =

$$A = \overline{a a a a}$$

$$B = a_1 a_2 a_3 \quad (a_1 = 2)$$

$$C = b_1 b_2 \quad (b_1 = 9)$$

$$ABC = a^2$$

$$81 = 11765 \quad 9 > 6$$
$$52 \rightarrow 292X$$

$$0 \rightarrow (150295 - 11)(175295 - X)$$

$$1111 = 11 \cdot 101 = 11 \cdot 101$$

$$B: 101$$

$$a^2 = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 202 \cdot (b_1 b_2)$$

$$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 202 \cdot 33$$

$$A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$$

4

$$x + y + a + b \neq x^2$$

$$h > 4$$

$$25 - 16 = 9 \quad 15 - ab = 7$$
$$h, 12 \cdot x + y + ab$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \frac{1}{k-3}$$

$$\frac{C_{k-2}^2}{C_k^4}$$

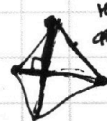
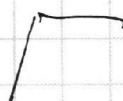
$$2,5 =$$

$$\frac{C_{k-2}^{4-2}}{C_k^h}$$

00

$$\frac{C_{k-2}^2}{C_k^4}$$

$$2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin(\pi x)$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \cos \alpha \cos \beta$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) + \cos$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$h \cdot \frac{a+b}{2} \cdot n$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$=$$

$$\alpha = \frac{a+b}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\frac{a-b}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \pi x + \sin \pi y = 2 \sin \left(\pi \left(\frac{x+y}{2} \right) \right) \cos \left(\pi \left(\frac{x-y}{2} \right) \right)$$

$$\cos \pi x + \cos \pi y = 2 \cos \left(\pi \left(\frac{x+y}{2} \right) \right) \cos \left(\pi \left(\frac{x-y}{2} \right) \right)$$

$$\cos \left(\pi \left(\frac{x-y}{2} \right) \right) = 0$$

$$\pi \left(\frac{x-y}{2} \right) = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\frac{x-y}{2} = \pm \frac{1}{2} + 2k$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☒2
☒3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y > 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$x^3 - y^3 - 3xy = ?$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$(x \neq 1)$$

$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy + x - y - 1$$

$$x - y = 1$$

$$x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = 1$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2} \quad -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \quad \frac{y}{4} \leq 1$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \arcsin \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arcsin \frac{y}{4} < \pi$$