МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} \left(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha\right)\left(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha\right) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть $A = \overline{aaaa}$, ~~B~~ где a - некоторая цифра.

$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101.$ $(1 \le a \le 9)$

(т.к C - двузначное)

Заметим, что $C < 100$, а также 101 - простое.

Т.к ABC - квадрат, то простое число 101 должно входить в чётной степени, а значит если его степень вхождения в A равна 1, то B или C делится на 101.

Т.к $C < 100$, то $C \not\vdots\, 101$, значит $B \,\vdots\, 101$.

Все трёхзначные, делящиеся на 101: 101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909. ~~7079~~ Только 202 имеет цифру 2, т.е $B = 202$. ~~AB~~ Также A имеет степень вхождения простого 11, равную единице. Значит B или C делится на 11. Но $202 \not\vdots\, 11$, т.е $C \,\vdots\, 11$. Все двузначные, делящиеся на 11: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Только 33 имеет цифру 3, т.е $C = 33$.

$ABC = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 202 \cdot 33 = a \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 6 = q^2$ $(q \in \mathbb{N})$. $6a = \left(\frac{q}{11 \cdot 101}\right)^2$ $\left(\frac{q}{11 \cdot 101} \in \mathbb{Z}\right)$ (понятно, что $q \,\vdots\, 11 \cdot 101$).

Т.е $6a$ - квадрат, ~~значит~~ учитывая, что $1 \le a \le 9$, $a = 6$.

$A = 6666$, $B = 202$, $C = 33$. Ответ: $(6666; 202; 33)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Условие задачи нам говорит, что:

$(x \neq 1)$, чтобы выражение имело смысл)

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{xy}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy}=\frac{x+y+2}{\cancel{xy}\,(x-1)(y+1)} \quad (x+y+2>0)$$

$$\frac{1}{xy}=\frac{1}{(x-1)(y+1)}$$

$$xy=(x-1)(y+1)$$

$$xy=xy+x-y-1$$

$$x-y=1$$

Заметим, что $x^3-y^3-3xy=(x-y)(x^2+xy+y^2)-3xy=$

$=x^2+xy+y^2-3xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2=1.$

Значение выражения достигается, например $x=3, y=2.$

~~$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{6}=$~~ Действительно: $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{6}$,

а также $x^3-y^3-3xy=$ ~~8 9-4~~ $=27-8-18=1.$

Ответ: 1.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $x-y$ и $3x+y$ — одной чётности, т.к их разность $(x-y)-(3x+y)=\cancel{4y}\;-2x-2y=-2(x+y)$ — чётная. Значит мы можем проверять на нечётность одно из этих выражений, например $x-y$. Если $x-y$ — нечетное, то x, y — разной чётности.

Целые числа с интервала для x:

$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cancel{5}$ — 5 нечёт., 5 чёт.

Целые числа с интервала для y:

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ — 4 нечёт, 4 чёт.

Для нечёт. x берем чёт. y — вариантов выбрать $5\cdot4=20$. Для чёт. x берем нечёт y — вариантов выбрать $5\cdot4=20$. Значит всего $20+20=40$.

Ответ: 40.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~$\sin\left(\pi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \cdot \sin \pi x = \cos\left(\pi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \cdot \cos \pi x$~~

~~$tg\left(\pi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) = ctg\, \pi x$~~

Получаются пары $\left(x, \frac{-y+1+2n}{3}\right)$; $(x, y+1+2n)$, где $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) (A) $\arcsin \frac{x}{5} \le \frac{\pi}{2}$; $\left(\arcsin \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], -1 \le \alpha \le 1\right)$

(B) $\arccos \frac{y}{4} \le \pi$ $\left(\arccos \alpha \in [0; \pi], -1 \le \alpha \le 1\right)$

(C) $\arcsin \frac{x}{5} + \frac{y}{4} \le \frac{3\pi}{2}$.

$\Rightarrow$ Равенство достигается в (C), когда оно достигается в (A) и (B). Также выражения имеют смысл при $-1 \le \frac{x}{5} \le 1$; $-1 \le \frac{y}{4} \le 1$.

$x \in [-5; 5]$, $y \in [-4; 4]$.

~~arcsin~~ Исключим пары (x, y), при которых достигаются равенства. $\arcsin \frac{x}{5} \ne \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{5} \ne 1$; $x \ne 5$;

$\arccos \frac{y}{4} \ne \pi \Rightarrow \frac{y}{4} \ne -1$; $y \ne -4$. Т.е. $x \in [-5; 4]$, $y \in [-3; 4]$, а условия из уравнения таковы:

$\left[\begin{array}{l} x-y = 1+2n, n \in Z \\ 3x+y = 1+2n, n \in Z. \end{array}\right.$, это значит, что $x-y$ - нечётное, или $3x+y$ - нечётное

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

а) $(\sin\pi x+\sin\pi y)\cdot\sin\pi x=(\cos\pi x+\cos\pi y)\cos\pi x$

(1) $2\sin\left(\frac{\pi x+\pi y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi x-\pi y}{2}\right)\sin\pi x=2\cos\left(\frac{\pi x+\pi y}{2}\right)\cdot$

$\cdot\cos\left(\frac{\pi x-\pi y}{2}\right)\cdot\cos\pi x$

1) $\cos\left(\frac{\pi x-\pi y}{2}\right)=0$

$\frac{\pi(x-y)}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n;\ n\in \mathbb{Z}$

$\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}+n,\ n\in \mathbb{Z}$

$x-y=1+2n,\ n\in \mathbb{Z}$. ~~то x, y — разной четности~~.

$x=y+\cancel{2n+1}\ 1+2n,\ n\in \mathbb{Z}$

2) $\cos\left(\frac{\pi x-\pi y}{2}\right)\neq 0$

Поделим (1) на $2\cos\left(\frac{\pi x-\pi y}{2}\right)\neq 0$.

$\sin\left(\frac{\pi x+\pi y}{2}\right)\cdot\sin\pi x=\cos\left(\frac{\pi x+\pi y}{2}\right)\cdot\cos\pi x$

$\cos\left(\frac{\pi x+\pi y}{2}\right)\cdot\cos\pi x-\sin\left(\frac{\pi x+\pi y}{2}\right)\sin\pi x=0$

$\cos\left(\frac{\pi x+\pi y}{2}+\pi x\right)=0$

$\frac{\pi x+\pi y}{2}+\pi x=\frac{\pi}{2}+\pi n;\ n\in \mathbb{Z}$

$\frac{x+y}{2}+x=\frac{1}{2}+n;\ n\in \mathbb{Z}$.

$3x+y=1+2n;\ n\in \mathbb{Z}$.

$x=\frac{-y+1+2n}{3},\ n\in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}} = \frac{C_{n-2}^{2}}{C_{n}^{4}}$$

$$\frac{C_{n-2}^{2}}{C_{n}^{4}} = \frac{12}{n(n-1)}$$

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_{n}^{k}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$\frac{12}{n(n-1)} \cdot 2{,}5 = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \qquad (n>1)$$

$$30 = k(k-1)$$

$$k^2 - k - 30 = 0$$

По т. Виета $k = 6; -5$; подх. $k = 6$. Ответ: 6.

~~Случай 2, $k > n$). Тогда вероятность в конце месяца равна 1. Тогда вероятность в начале месяца была $\frac{1}{2,5} = \frac{2}{5}$.~~

$\cancel{\frac{12}{n(n-1)} = \frac{2}{5};\ 60 = 2n(n-1)\ 2n^2-2n};$

Пусть всего было n одиннадцатиклассников. Кол-во способов выбрать из них четверых равна C_n^4. А кол-во способов выбрать четверых, включая Петю и Васю равна кол-ву способов выбрать 2 человека из оставшихся $n-2$, то есть C_{n-2}^2. Значит в начале месяца вероятность была $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$.

Пусть в конце месяца было выделено k билетов. Кол-во способов распределить их между n человек равно C_n^k. ~~а если в~~ Кол-во способов выбрать k человек, включая Петю и Васю равно кол-ву способов выбрать $k-2$ из оставшихся $n-2$, т.е C_{n-2}^{k-2}. Т.е вероятность в конце месяца была $\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$. Из соотношения вероятностей в начале и в конце месяца выходит:

$$\frac{2{,}5\, C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\angle CPB = \angle CAP + \angle ACP$ (свойство внешнего угла тр-ка ACP)

$2\alpha = \angle ACP + \alpha$

$\angle ACP = \alpha$, $\angle ACP = \angle CAP \Rightarrow \Delta APC$ – равнобедренный. $AP = PC = 7{,}5$.

По т. косинусов в ΔAPC:

$AC^2 + AP^2 - 2AC \cdot AP \cdot \cos\angle CAP = CP^2$

$81 + 56{,}25 - 2 \cdot \frac{135}{2} \cdot \cos\angle CAP = 56{,}25$

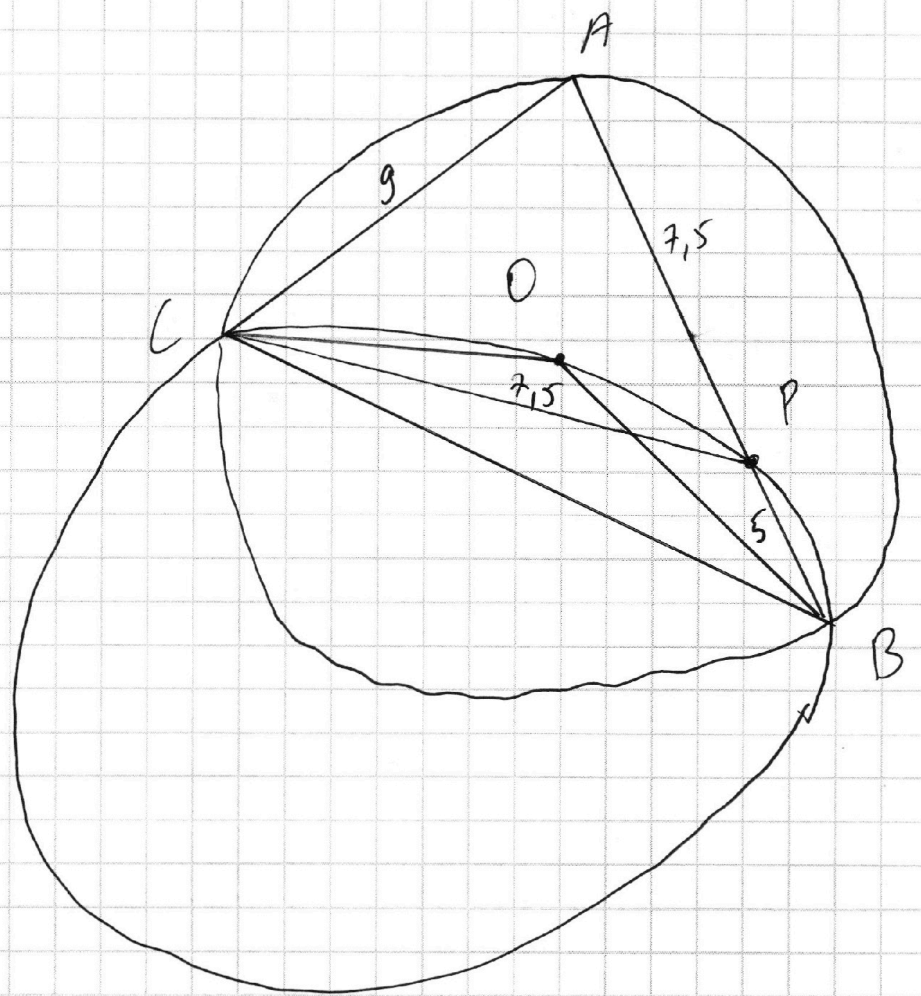
$81 - 135\cos\angle CAP = 0$

$\cos\angle CAP = \frac{81}{135} = \frac{3}{5}$

$\sin\angle CAP = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$, $\sin\angle CAB = \frac{4}{5}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin\angle CAB = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot (AP+PB) \cdot \sin\angle CAP = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12{,}5 \cdot \frac{4}{5} = 45.$

Ответ: 45.



Пусть $\angle CAB = \alpha$, тогда $\angle COB = 2\alpha$ (как центральный, опирающийся на дугу BC в ω_1)

~~ΔCOB $CO = OB$ (как радиусы ω_1). ΔCOB - равнобедренный.~~

а $\angle COB = \angle CPB$ (как вписанные углы, опирающиеся на дугу CB в ω_2).

$\angle CPB = 2\alpha$.

Пусть $AC \cap BD = O$. Пусть $O(a, b)$. Тогда A и C имеют ординату b, а B и D абсциссу a.

~~Тогда абсциссы~~ Если $x^2 + b^2 = 25$, то $x = \pm\sqrt{25-b^2}$.

Т.е точки A и C имеют координаты $(-\sqrt{25-b^2}, b)$ и $(\sqrt{25-b^2}, b)$. ~~(Точки A и C находятся по разны~~

Если $a^2 + y^2 = 25$, то $y = \pm\sqrt{25-a^2}$, т.е B и D имеют абсциссу a: $(\sqrt{25-a^2}, a)$ и $(-\sqrt{25-a^2}, a)$.

Тогда $BD = 2\sqrt{25-a^2}$, $AC = 2\sqrt{25-b^2}$.

$AC + BD = 2\sqrt{25-a^2} + 2\sqrt{25-b^2} = 2(\sqrt{25-a^2} + \sqrt{25-b^2}) \overset{(X)}{\leq} 2\sqrt{2(\sqrt{25-a^2}^2 + \sqrt{25-b^2}^2)} = 2\sqrt{2(50-a^2-b^2)} = 2\sqrt{2 \cdot 32} = 16$.

Докажем (X): $\forall m, n > 0$: ~~a+b~~

$m + n \leq \sqrt{2(m^2+n^2)}$

$m^2 + n^2 + 2mn \leq 2m^2 + 2n^2$

$(m-n)^2 \geq 0$. ЧТД.

Равенство при $m = n$.

Данное значение достигается при $\sqrt{25-a^2} = \sqrt{25-b^2}$; $a^2 = b^2$, но $a^2 + b^2 = 18$, т.е $a^2 = 9$; $a = \pm 3$; $b = \pm 3$. Т.е $3\sqrt{2}\sin\alpha = \pm 3$ и $3\sqrt{2}\cos\alpha = \pm 3$;

$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$.

Общий периметр будет $16 + 5\pi$.

Ответ: $16 + 5\pi$ при ~~$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$~~ $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-3\sqrt{2}\sin\alpha)(y-3\sqrt{2}\cos\alpha)\le 0 & (1)\\ x^2+y^2\le 25 & (2)\end{cases}$$

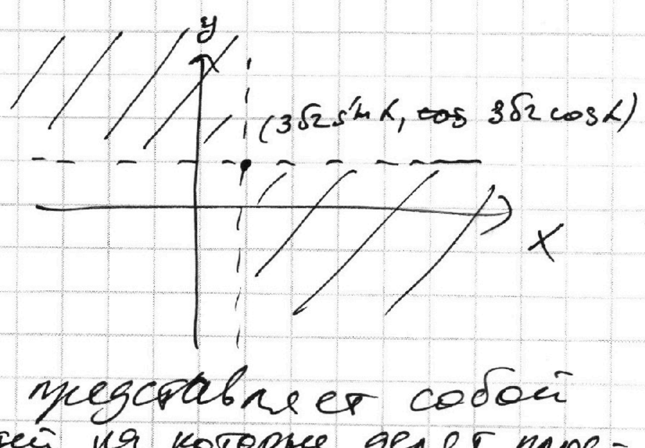
Уравнение (2) представляет собой множество точек, лежащих на круге радиуса 5 с центром в точке начала координат, т.к для любого $0\le r\le 5$ множество решений уравнения $x^2+y^2=r^2\le 25$ входят в это множество, а для $r>5$ уравнение $x^2+y^2=r^2>25$, не входит.

Рассмотрим (1):

$(x-3\sqrt{2}\sin\alpha)(y-3\sqrt{2}\cos\alpha)\le 0$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3\sqrt{2}\sin\alpha<0\\ y-3\sqrt{2}\cos\alpha>0\end{cases}\\ \begin{cases} x-3\sqrt{2}\sin\alpha>0\\ y-3\sqrt{2}\cos\alpha<0\end{cases}\\ x=3\sqrt{2}\sin\alpha\\ y=3\sqrt{2}\cos\alpha\end{array}\right.$$



На графике это представляет собой множество двух областей, на которые делят плоскость прямые $y=3\sqrt{2}\cos\alpha$ и $x=3\sqrt{2}\sin\alpha$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что точка пересечения данных прямых имеет координаты $(3\sqrt{2}\sin\alpha, 3\sqrt{2}\cos\alpha)$, т.е данная точка лежит на окружности, имеющей уравнение $x^2+y^2 = (3\sqrt{2})^2$, т.к

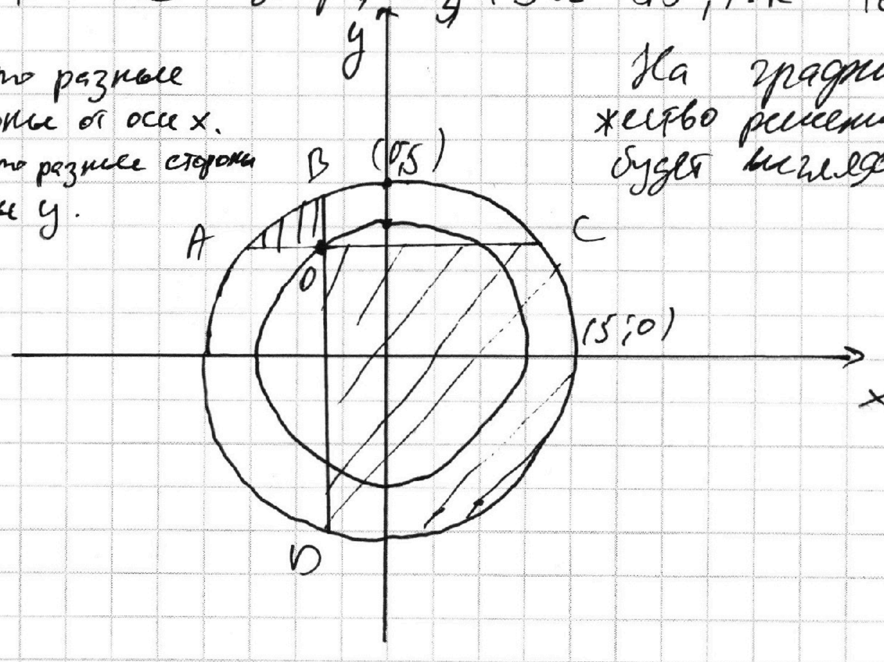
$$(3\sqrt{2}\sin\alpha)^2 + (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2 = (3\sqrt{2})^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = (3\sqrt{2})^2.$$

(т.е ~~радиус~~ это окружность радиуса $3\sqrt{2}$ и с центром в начале координат.)

Заметим, что данная окружность лежит в круге радиуса 5 и того же центра, ~~так~~ и $3\sqrt{2} < 5$, т.к $18 < 25$.

B, D по разные стороны от оси x.
A, C по разные стороны от оси y.

На графике множество решений системы будет выглядеть так:



Отметим точки пересечения прямых ~~АД~~ с окружностью ~~R~~ радиусом 5, как на графике, назовём их A, B, C, D.

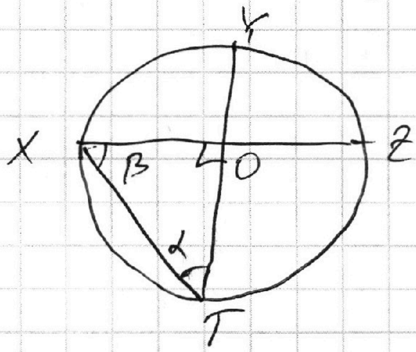
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Докажем, что сумма длин дуг AB и CD равна половине длины окружности радиуса 5.



Когда имеем две перпендик. хорды ~~то ∪XY~~ (пусть это YT и XZ), то $\cup XY = 2\angle X\cancel{TB}^{TY}$, $\cup ZT = 2\angle ZXT$,

$\cup XY + \cup ZT = 2(\angle X\cancel{YZ}^{TY} + \angle ZXT)$

~~Из △~~ Пусть $YT \cap XZ = O$. $\triangle XOT$ - прямоугольный, т.е $\angle XTY + \angle ZXT = 90°$.

Т.е $\cup XY + \cup ZT = 2 \cdot 90° = 180° = \frac{360°}{2}$,

то есть их сумма длин действительно равна половине общей длины окружности.

В нашем ~~x~~ случае их сумма равна

$\frac{2\pi \cdot 5}{2} = 5\pi$

Общий периметр равен $5\pi + AB + \cancel{B}^{C}D$.

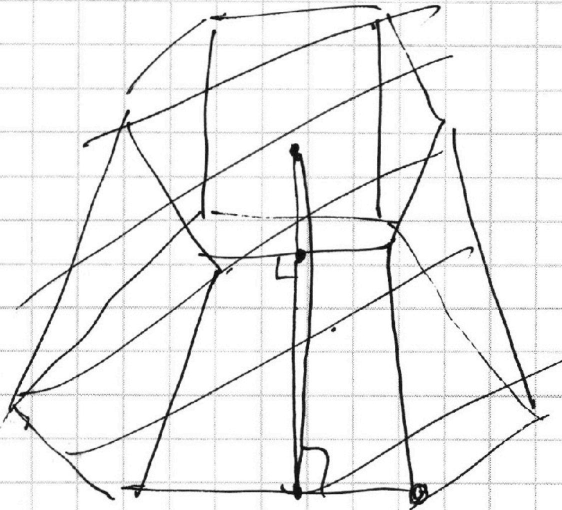
Наша цель - максимизировать $AB + \cancel{B}^{C}D$

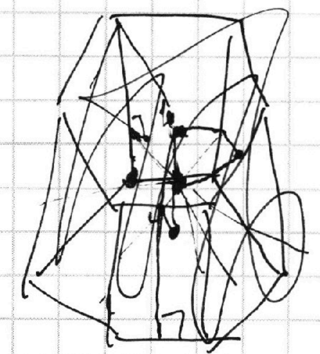
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





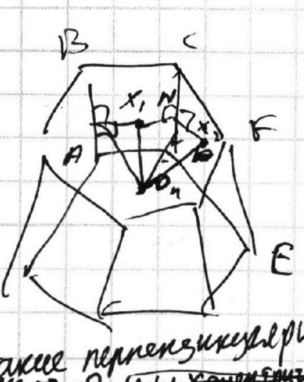
Заметим, что если O_n – центр шара, то ~~я~~ он ~~в~~ является центром сечения срединной плоскостью ~~усеч~~ усеченной ~~пир~~ пирамиды, т.к расстояние до верхнего и нижн. основания равны (перпендикуляры до плоскостей – радиусы).

Значит, если опустить перпендикуляры на две соседние грани, они будут равны.

~~Пусть~~ грани $ABCD$ и $CDEF$.

Перпендикуляры ~~В~~ O_nX_1 и O_nX_2.

Опустим перпендикуляры ~~а~~ X_1N и X_2N на CD. Они в попадут в одну



точку из за симметрии, ~~АТ~~ по Т. о трёх перпендикулярах ~~вс~~ ~~O_nX~~ $O_nN \perp CD$. Все такие перпендикуляры равны ~~→ Ω и ω концентричны~~.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

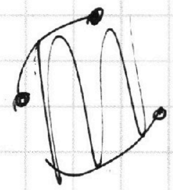
$\frac{C_{k-2}^{2}}{C_k^4} = 2{,}5$ $\frac{C_{k-2}^{n-2}}{C_k^{n}}$

$\sqrt{25-a} + \sqrt{25-b}$

$\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}$

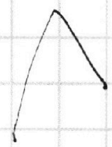
$4! = 24$

$\frac{(k-2)(k-3)}{2}$

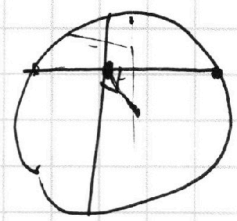


$\frac{\frac{(k-2)(k-3)}{2}}{\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}} = \frac{12}{k(k-1)}$

(a, b)



$\frac{k!}{(k-n)!\,n!}$ $\frac{(k-2)!}{(k-n)!\,(n-2)!}$

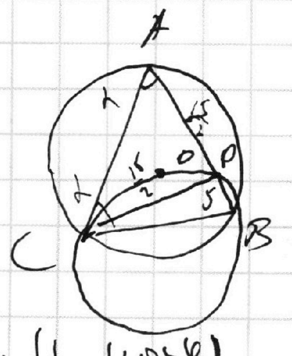


$\frac{C_{n-2}^{2}}{C_n^4} = \frac{2}{5}$ $\frac{2}{5}$

$n < k$ (x, y)

1 $\pm\sqrt{25-x^2}$

n $2\sqrt{25-x^2}$



$7{,}5$

$81 =$

$= \left(\frac{15}{2}\right)^2 (2 - 2\cos\varphi)$

$9 \cdot 8 + x^2$ $\frac{15}{2} + \frac{2{,}5}{2}$

$2\sqrt{25-x^2} + 2\sqrt{25-y^2}$

$81 = \frac{225}{2} \cdot (1 - \cos\varphi)$

$x^2 + y^2 = 18$

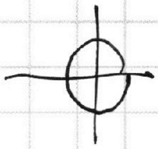
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

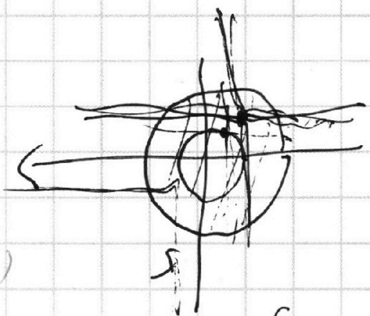
1 2 3 4 5 6 7

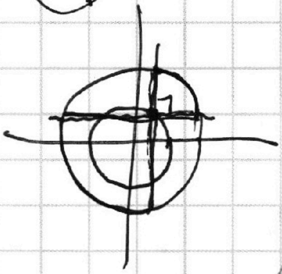
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\cancel{A = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}}$







$A = \overline{aaaa}$

$B = \overline{a_1 a_2 a_3}$ $(a_1 = 2)$

$C = \overline{b_1 b_2}$ $(b_1 = 3)$

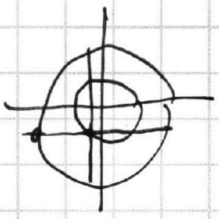
$ABC = q^2$

$a \cdot (1111)$

$1111 = 11 \cdot 101$

$B \vdots 101$

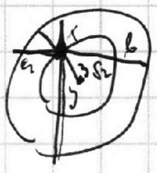
202



$q^2 = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 202 \cdot \overline{b_1 b_2}$

$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 202 \cdot 33$

$A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$



$x+y+a+b$

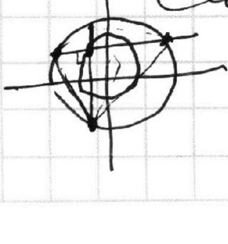
$n > 4$

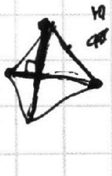
$25-18=7$ $xy=ab=7$

$\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k-2}+\frac{1}{k-3}$

$\frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} \cdot 2{,}5 = \frac{C_{k-2}^{4-2}}{C_k^4}$

$\frac{C_{k-2}^2}{C_k^4}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 [x] 2 [x] 3 [x] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~sin(πx +~~

$$(\sin\pi x+\sin\pi y)\sin\pi x=(\cos\pi x+\cos\pi y)\cos\pi x$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$\sin\alpha\sin\beta=$
$=\cos\alpha\cos\beta$

$\sin\alpha\sin\beta=\cancel{\sin(\alpha+\beta)+}\cos$

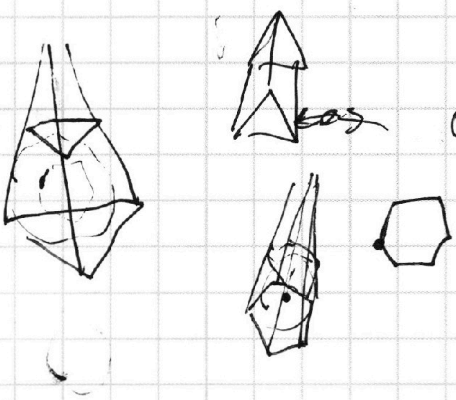
~~cos α s~~ $\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

$h\cdot\frac{a+b}{2}\cdot n$

$2\sin\alpha\cos\beta=\sin\left(\frac{x+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-\beta}{2}\right)$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\alpha=\frac{a+b}{2}$



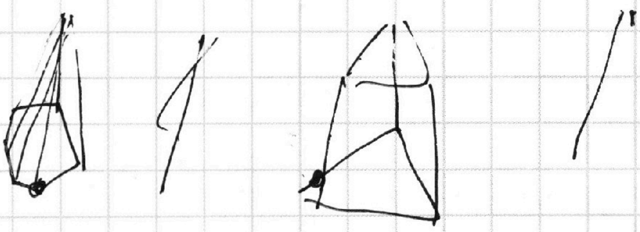
$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=$
$=2\cos\alpha\cos\beta$

$\frac{a-b}{2}$

$\cos a+\cos\beta=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$$\sin\pi x+\sin\pi y=2\sin\left(\pi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\cdot\cos\left(\pi\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)$$

$$\cos\pi x+\cos\pi y=2\cos\left(\pi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\cdot\cos\left(\pi\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)$$



$\cos\left(\pi\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)=0$

$\pi\left(\frac{x-y}{2}\right)=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n$

$\frac{x-y}{2}=\pm\frac{1}{2}+2\pi n$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 [x] 2 [x] 3 [x] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x, y > 0$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$x^3 - y^3 - 3xy - ?$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$\boxed{(x \neq 1)}$

$a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$

$xy = (x-1)(y+1)$

$xy = xy + x - y - 1$

$x - y = 1$

$(x-y)(x^2+xy+y^2) - 3xy = x^2 - 2xy + y^2 =$

$= (x-y)^2 = \boxed{1}$

$\arcsin\frac{x}{5} + \arccos\frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$ $\quad -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$

$\frac{y}{4} \leq 1$

$\arcsin\frac{x}{5} + \cancel{\text{arc}}\ \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$

$\arcsin\frac{x}{5} - \arcsin\frac{y}{4} < \pi$