



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1

число A представляется как $A = x \cdot 1111 = x \cdot 11 \cdot 101$ x - цифра от 1 до 9.

101 - простое число, при этом $A \cdot B \cdot C$ квадрат,

значит оно делится на ~~11~~ 101^2 .

C - двузначное, оно взаимнопросто с 101, то оно простое.

и все варианты B , делящиеся на 101.

это 101 202 ... но всего цифр 9 - 101.

имеет цифру 1. поэтому $B = 101$.

тогда и $11x \cdot C$ тоже квадрат.

x не делится на 11, значит C делится на 11.

но единственное C , которое делится на 11 и имеет 5 это 55.

тогда $x \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 5$ квадрат $\Rightarrow x = 5$.

тогда $A = 5555$ $B = 101$ $C = 55$

Ответ $\begin{matrix} A & B & C \\ 5555 & 101 & 55 \end{matrix}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

Ток x, y ~~и~~ $x-3, y+3 \neq 0$;

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

1) $x+y+1=0$
невозм ток
они > 0

2) $xy = (x-3)(y+3)$
 $xy = xy - 3y + 3x - 9$

$$y = x - 3$$

$$x = y + 3$$

подстав.

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y = (y+3)(y^2 + 9 + 6y - 9y) - y^3$$
$$= (y+3)(y^2 - 3y + 9) - y^3 = y^3 - 3y^2 + 9y + 3y^2 - 9y + 27 - y^3 = 27$$

Ответ 27

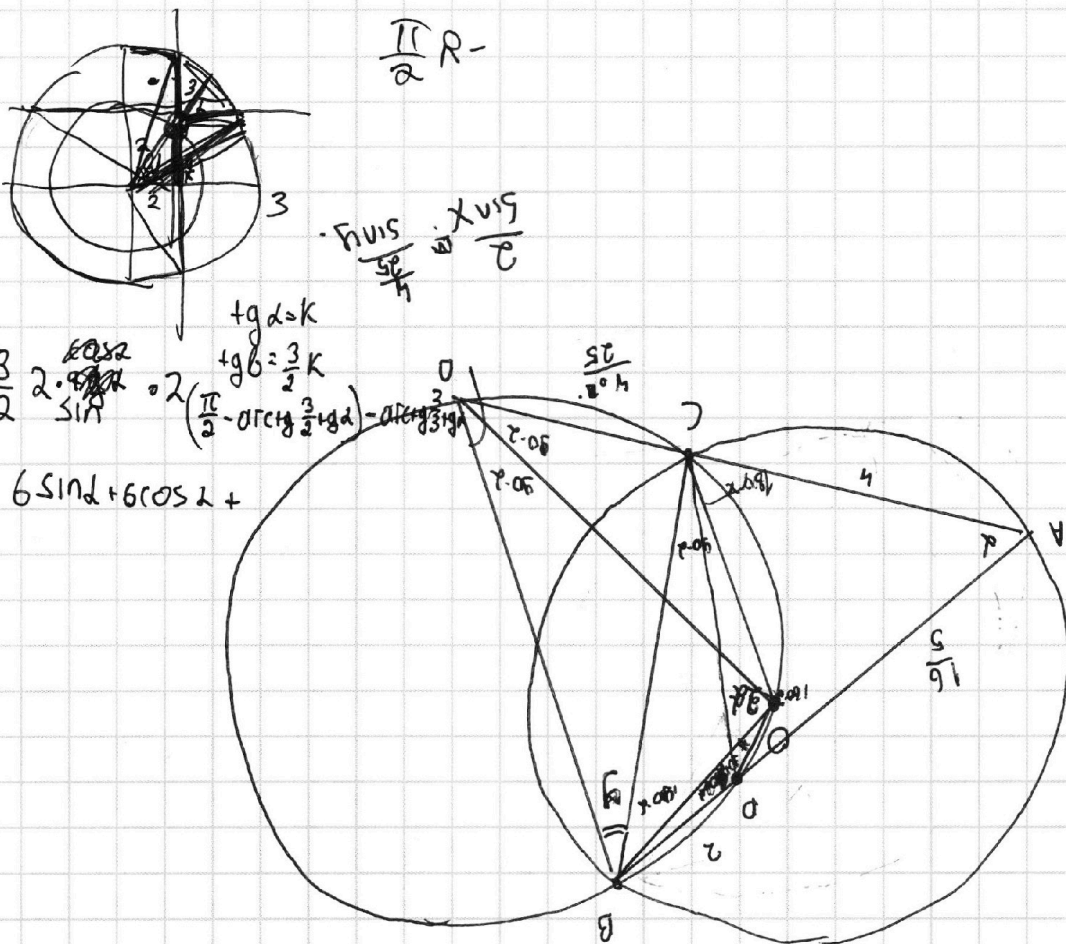


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
из

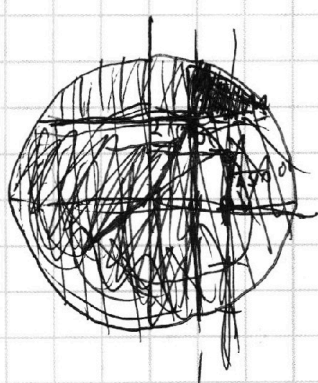
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
1	2	3	4	5	6	7	

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Поряд. QR-кода неопустима!



$$(x-2\cos\theta)(y-2\sin\theta) \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$-\cos \pi(x+y) = \cos 2\pi x$$

$$\cos 2\pi x + \cos \pi(x+y) = 0$$

$$\cos \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{x-y}{2} \right) + \cos \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{3x-y}{2} \right) = 0$$

$$\cos \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{x-y}{2} \right) \cdot \cos \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{3x-y}{2} \right) = 0$$

$$1) \frac{1}{4} + \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \quad 2) \frac{1}{4} - \frac{3x-y}{2} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x-y + \frac{1}{2} = 1 + 2k$$

$$\frac{1}{2} - 3x - y = 1 + 2k$$

$$\cos \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2} \right) \cos \pi \left(\frac{3}{2} + \frac{xy}{2} \right) = 0$$

$$1) \pi \left(\frac{x+y}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad 2) \pi \left(\frac{3x-y}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x+y = 1 + 2k$$

$$2) 3x-y = 1 + 2k$$

или

$$\begin{cases} x+y = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \\ 3x-y = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

все верно, для которых
это верно.

$$8) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

равенство возможно только когда оба аркосинуса равны 1.

$$\Rightarrow \begin{cases} \arccos \frac{x}{4} = \pi \\ \arccos \frac{y}{9} = \pi \end{cases} \text{ не подходит}$$

$$\frac{x}{4} \neq -1 \quad \frac{y}{9} \neq -1$$

$$x \neq -4 \quad y \neq -9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. x от -1 до 1 , то x от -4 до 4 .

или y от -3 до 3 .

~~Внимательно~~ ~~в~~ ~~вариантах~~.

попытки исключили $x = -4$ и $y = -3$

попытки исключить.

x y
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 -3 ... 3

для любого четного x подходит только четный y и наоборот

для любого нечетного x подходит только нечетный y и наоборот

попытки всего. $4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 24$

Ответ а) $\begin{cases} y = -x + 1 + 2k \\ y = 3x - 1 - 2k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$ б) 2 пары

$$\begin{cases} y = -x + 1 + 2k \\ y = 3x - 1 - 2k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4

пусть сначала было x одноклассников, а билетов в конце b .

тогда начальная вероятность.
 $\frac{4}{x} = \frac{3}{x-1}$

а конечная
 $\frac{6}{x} = \frac{b-1}{x-1}$

тогда $\frac{4 \cdot 3 \cdot \frac{x}{x-1}}{2} = \frac{b(b-1)}{x(x-1)}$.

т.к. $x \geq 2$, то сокращаем

$$4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{x}{x-1} = b(b-1).$$

т.к. $b \geq 4$, и целое, то функция при $b \geq 4$ возрастает.

значит не более 1 решения при $b \geq 4$

$b = 7$ подходит.

Ответ 7.



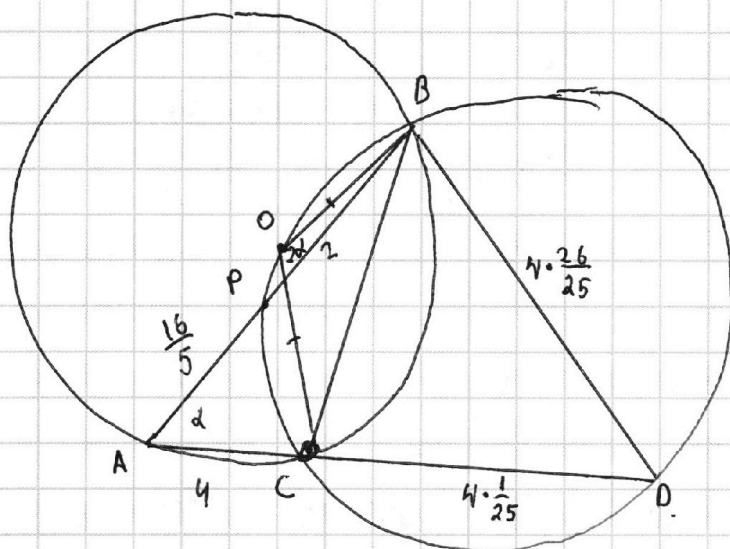
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5



пусть AC пересекает окружность 2 раз в точке D.
тогда $AP \cdot AB = AC \cdot AD$ степеней точки

$$AP = \frac{AP \cdot AB}{AB} = \frac{16/5 \cdot 26/5}{4} = 4 \cdot \frac{26}{25} = AC.$$

значит 2 точки пересечения дуги AC. (нарисуем окружк.)

пусть $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle COB = 2\alpha$ т.к O - центр окр. ABC.

тогда $\angle CDB = 180 - 2\alpha$ т.к они с разных сторон опираются на 1 дугу.

тогда $\angle ABD = \alpha \Rightarrow ABD \text{ р/д. } AD = BD = 4 \cdot \frac{26}{25}$

тогда $\cos \alpha$ находим по т.н. cos.

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2ADAB \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{AB}{2AD} = \frac{26/5}{2 \cdot 4 \cdot \frac{26}{25}} = \frac{5}{8}$$

$$\sin \alpha > 0$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$S = AB \cdot AC \cdot \frac{\sin \alpha}{2} = \frac{26/5 \cdot 4 \cdot \sqrt{39}}{2 \cdot 8} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

Ответ $\frac{13\sqrt{39}}{10}$.

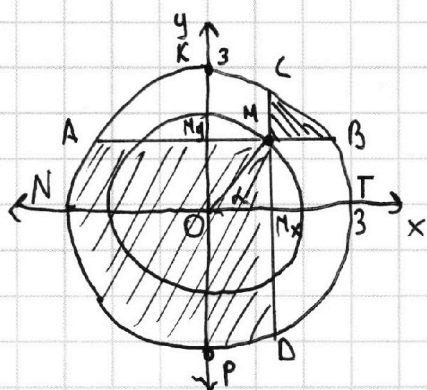


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



6
 $x^2 + y^2 \leq 9$ это все внутри круга радиуса 3.
 теперь посмотрим на верхнее неравенство.
 если нарисовать круг радиуса 2, и выбрать на нем точку для которой угол будет α , то абсцисса будет $2 \cos \alpha$, а ордината $2 \sin \alpha$.

тогда общее решение 2 уравнений будет заштрихованная область на рисунке.

заметьте, что длина дуги, которая включается.

в уравнение не входит, т.к. длина $\overline{PD} = \overline{KC}$ $\overline{AN} = \overline{BT}$ дополняют до половины дуги окружности.

т.е. получается длина дуги будет $3 \cdot \pi$

$$OM_x = 2 \sin \alpha, OM_y = 2 \cos \alpha.$$

$$\frac{M_x C}{M_x M_y} = \frac{R \sin \alpha}{R \cos \alpha} = \frac{3}{2} \Rightarrow M_x C = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \sin \alpha = 3 \sin \alpha.$$

$$CM_x^2 = OC^2 - OM_y^2 = 3^2 - 4 \cos^2 \alpha$$

$$BM_y^2 = 9 - 4 \sin^2 \alpha.$$

длина $CD = 2CM_x$ тогда, сумма дуг
 $AB = 2BM_y$

$$P = 3\pi + 2 \left(\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} \right)$$

найдем мин. знач. $\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$ при каком α .

$$\frac{9 + 9 - 4(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{2} + 2\sqrt{(9 - 4 \cos^2 \alpha)(9 - 4 \sin^2 \alpha)} =$$

$$= 14 + 2\sqrt{81 - 36 + 16 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тое нужно найти значение $16 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 4 \sin^2 2\alpha$.

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \sin^2 2\alpha = 1 \Rightarrow \sin 2\alpha = \pm 1$$

$$\sin 2\alpha = -1$$

$$2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 1$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

тогда получим: $P = 3\pi + 2(\sqrt{9-2} + \sqrt{9-2}) = 3\pi + 4\sqrt{7}$

Ответ $3\pi + 4\sqrt{7}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

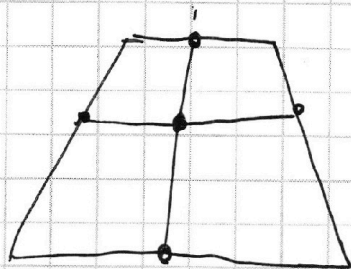
7
☒

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7

пусть высота пирамиды 2Γ - где Γ радиус вписанной окружности сфера.



отметили.
точки касания Ω с
одним из ребер

тогда ~~эта~~ на пересечение
даст точку касания ω

Все сферы - вписанные непогруженные.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

черновик



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

черновик

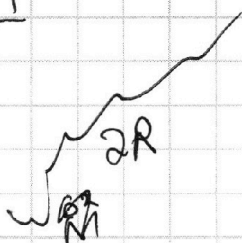
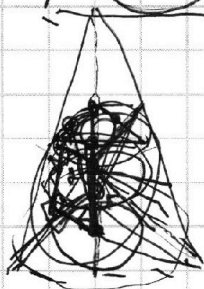
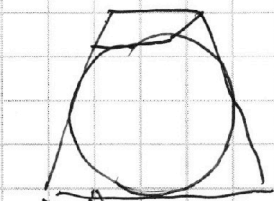


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

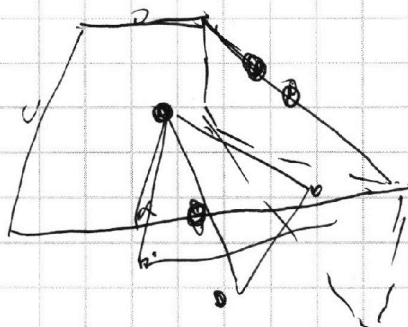
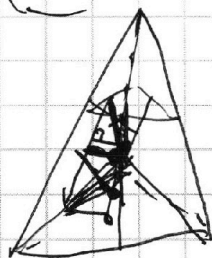
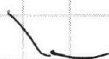
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



RIX



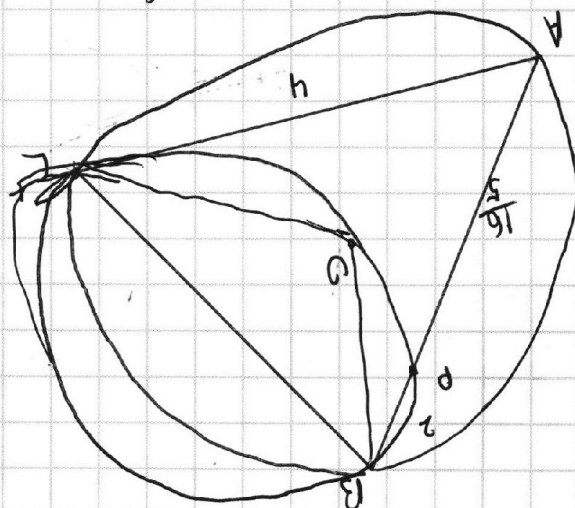


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

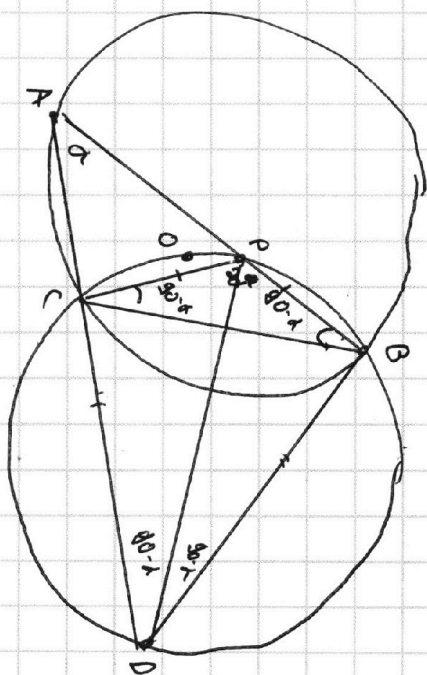
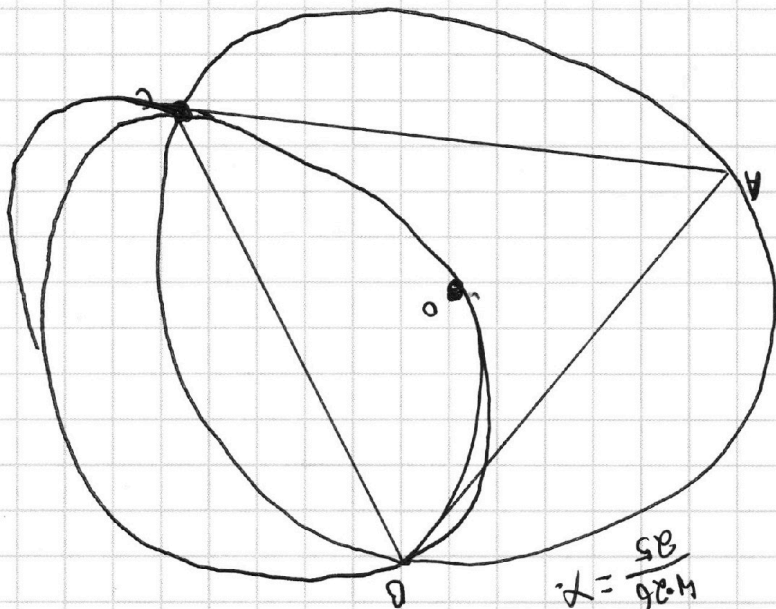
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
1	2	3	4	5	6	7	

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порядк QR-кода недопустим!



$$16 \cdot \frac{26}{5} = 14 \cdot X$$

$$14 \cdot \frac{26}{5} = X$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Ответьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Поша QR-кода неопытна!



$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \pi x = \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$$x^3 = 3^3 + y^3 + 3y^2 + 3$$

$$x - y = 3$$

$$3x - 3y = 9$$

$$(x-3)(y+3) = xy$$

$$\frac{xy}{1+x+y} = \frac{(x-3)(y+3)}{1+x+y+1}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)}$$

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{1}{1} = \frac{x-3}{1} + \frac{y+3}{1} + \frac{1}{1}$$

$$x^3 - y^3 - yxy$$

$$K = \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{1}{1} = \frac{x-3}{1} + \frac{y+3}{1} + \frac{1}{1}$$

5 5 5
101
5

$$\frac{x}{(x-3)(y+3)}$$

$$\sin \pi x \sin \pi y \sin \pi x$$

$$\sin \pi x \sin \pi y \sin \pi x \cos \pi x \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \pi x = \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$x^2 \cos^2 \pi x - x^2 \sin^2 \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

5.5

101

101

1111

A.B.C

$2 \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \pi x$
 $2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x$
 $\frac{16 \cdot 25}{25} = 40^2$
 $\therefore W = 20$
 $\therefore \frac{1}{2} C = LC + \frac{1}{2} R$