



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
  - $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
  - $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 3, а  $y$  — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 9xy$ .
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .  
б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{16}{5}$ ,  $BP = 2$ ,  $AC = 4$ .
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$1) A = 1111a \quad 11 \cdot 101 \vdash \quad 101 - \text{простое} \\ B \alpha; C \Rightarrow B = 101 \quad A \cdot B \cdot C \leftarrow 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C \cdot a; C < 101$$

$$\text{1} \not\vdash B \Rightarrow B = 101 \quad C : 11 \rightarrow 5B C \Rightarrow$$

$C = 55$ ,  $A \cdot B \cdot C - \text{квадрат} \rightarrow \text{число}$

$(5555; 101; 55)$  - **единственный** **случай**.

Ответ:  $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} - \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{xy}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{xy} + \cancel{3y+3x-9}$$

$$-3y-3x=9$$

$$\cancel{x-y=3} \quad \cancel{x+y+1}$$

$$\cancel{(y+3)^3} - (y^3 - \cancel{9(y+3)^2}) =$$

$$y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^5 - 9(y^2 + 6y + 9) =$$

$$y^5 - 9y^2 - 54y - 81 =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy} ; \quad \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy + y - 3y + 3x - 9$$

$$3x - 3y = 9$$

$$x - y = 3 \quad x+y+3$$

$$(y+3)^3 - y^3 - 9(y^2 + 3y) = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^5 - 9y^2 - 54y - 81 =$$

$$-27.$$

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

u)  $y = -g$

$x \in \{-2; 0; 2; 4\}$  т.к.  $(-u; -g)$  — ~~не лежат~~  
~~не лежат один~~  
на прямой

тогда:  $y = -g$   $x \in \{-2; 0; 2; 4\}$

$3 < y \leq 9$   $y = \text{неч. } x \in \{-3; -1; 1; 3\}$

~~$-3 < y \leq 9$~~   $y = \text{неч. } x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$

→ как-то непр.

$4 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 9 = 40 + 45 = 85$

Ответ: 85 неп.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(2\pi p) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} + \pi p)\right), \cos^2 \cos^2 p = \sin^2 \sin^2 p$$

$$1) \quad \cancel{3\pi x + \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} + \pi y} \\ 3\pi x = 5\pi y \quad \cancel{3\pi x + \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} + \pi y} \\ 3x + 2k\pi = \pi y$$

$$\cos(2\pi p) = \cos^2 \cos^2 p = \sin^2 \sin^2 p \\ \cos(3x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}y) = 0 \\ \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{2}y = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$3\pi x - \pi y = \pi + 2k\pi$$

$$3x - y = 1 + 2k \quad y = 3x - 1 - 2k$$

a) Ответ: точные пары, чётн.

$$\begin{cases} \cancel{3x - y} = y = 3x - 1 + 2k \quad k \in \mathbb{Z} \\ y = 1 - x + 2k \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

b)

$$\underbrace{\arccos\left(\frac{x}{4}\right)}_{< 2\pi} + \underbrace{\arccos\frac{y}{9}}_{< 2\pi} < 2\pi \Rightarrow x; y \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{4} \neq -1 \quad \frac{y}{9} \neq 1 \text{ оговариваются} \\ -4 \leq x \leq 4 \quad -9 \leq y \leq 9 \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} -9 \leq y \leq 9 \\ -4 \leq x \leq 4 \end{array}$$

c)  ~~$\tan\left(\frac{8}{3}, -9\right)$~~   ~~$(-\frac{8}{3}, -9)$~~ ,  ~~$(-\frac{8}{3}, 1)$~~ ,  ~~$(-\frac{8}{3}, 5)$~~ ,  ~~$(-\frac{8}{3}, -5)$~~

1)  ~~$y = 9$~~   $x \in \emptyset$

2)  ~~$y = -8$~~   $x \in \emptyset$   $\emptyset$

3)  ~~$y = -1$~~   $x \in \{-2\}$

4)  ~~$y = -5$~~

$$-8 = 3x - 1 + 2k$$

$$-8 = 3x + 2k \\ x \in \emptyset$$

$$-8 = 1 - x + 2k$$

$$4x = x + 2k$$

$$x \in \{-8, 3, 1, -1, -3\}$$

3)  $y = -6$

$$-6 = 1 - x + 2k$$

$$-7 = -x + 2k$$

$$x \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$x + y =$

~~Ответ:  $y \in [-8, 9]$  пары  $x \in \{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$~~

~~пары  $y \in [2, 9]$  пары  $x \in \{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$~~

2)  $y = -7$

$$-7 = 3x - 1 + 2k$$

$$-6 = 3x + 2k$$

$$x = -2 + 2k$$

$$x \in \{-2, 0, 2, 4\}$$

$$-7 = 1 - x + 2k$$

$$-8 = -x + 2k$$

$$x = 8 + 2k$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

нч.  $p_1$  - вероятность выиграть  $p_2$  - вероятность проиграть  
 $p_1 = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$   $p_2 = \frac{12}{x(x-1)}$

$$p_1 = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{12}{x(x-1)}$$

$$3,5 p_1 = p_2$$

$$3,5 \cdot 12 = (4+a)(3+a)$$

$$42 = a^2 + 7a + 12$$

$$a^2 + 7a - 30 = 0$$

$$(a-3)(a+10) = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow \text{Отвт. 7 билетов}$$

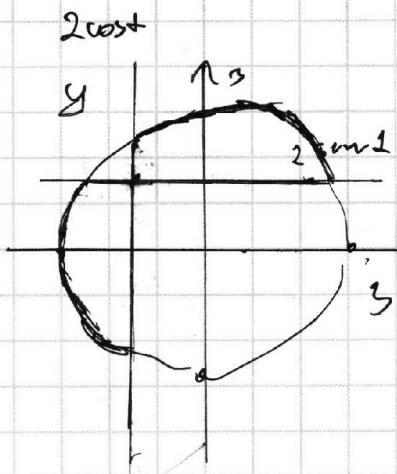


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



длина отрезков тоже же

длина дуг равна

$$\cancel{2\pi} - 2\pi - 3 = 3\pi.$$

- тоже же.

аналогично в оставших  
четвертих

то есть максимальный  
периметр, равный  $4\sqrt{7} + 3\pi$   
достигается при  $2e^{\frac{\pi i}{4}} + \frac{\pi h}{2}$  коз

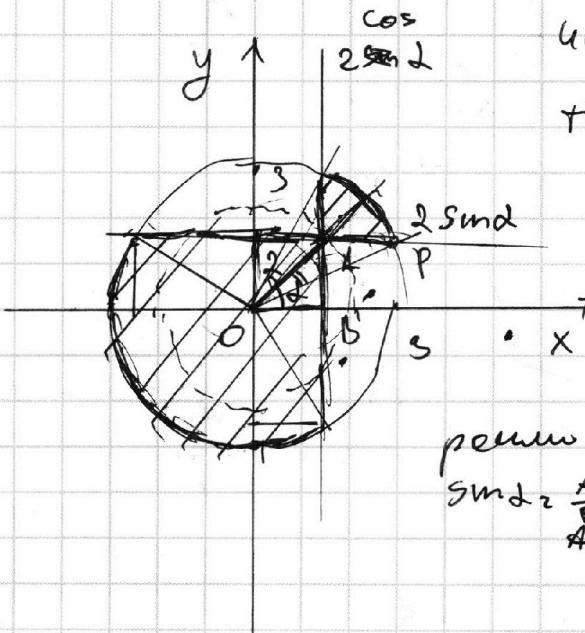
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$n6. \begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$



$$4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha = 4 \Rightarrow$$

точка пересечения

этих прямых

делит ее пополам

с учетом в начале координат и радиусом 1/2

решим греч  $\triangle AOB$ :

$$\sin\alpha = \frac{AB}{AO} = \frac{2\sin\alpha}{3} \Rightarrow \angle AOB = \alpha$$

$M(2) = 2 \cdot \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$ . Рассмотрим, когда  $\alpha$  в первой четверти.

$$M(2) = 2 \cdot \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + 2 \cdot \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + 2\pi \cdot 3.$$

$$\frac{\arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\alpha\right)}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot 3}{4} + \frac{\arccos\left(\frac{2}{3}\cos\alpha\right)}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot 3 +$$

$\alpha = \arcsin(\beta)$

$\Rightarrow$   $S_1 = 2\pi \cdot 3 - 2\sin\alpha \cdot 2\cos\alpha$  — верхний участок.  $S_1$  — первая часть верхней части фигуры.  $S_1 = 2\pi \cdot 3 - 2\sin\alpha \cdot 2\cos\alpha$  — верхний участок.

$$P_1 = \frac{2\pi \cdot 3}{4} - \frac{2\pi \cdot 3 \cdot \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\alpha\right)}{2\pi} - 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{\arccos\left(\frac{2}{3}\cos\alpha\right)}{2\pi}$$

$$\Rightarrow M(2) = 2 \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + 2 \cdot \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + 3\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

найдем производную.

$$M_1(L) = \frac{1}{\sqrt{9 - 4 \sin^2 L}} \cdot ((8 \sin L \cdot \cos L) + \frac{1}{\sqrt{9 - 4 \cos^2 L}}) \cdot (-8 \cos L \cdot -\sin L),$$

$$2 \frac{\frac{8 \cos L \sin L}{\cos}}{\sqrt{9 - 4 \sin^2 L}} + \frac{8 \sin L \cos L}{\sqrt{9 - 4 \cos^2 L} \sin}$$

$$\sin L = 0$$

$$\sin L = \cos L$$

$$\cos L = 0$$

~~но это невозможно~~

~~нашлись~~

~~здесь~~

~~существует~~

~~единственное~~

~~решение~~

~~единственное~~

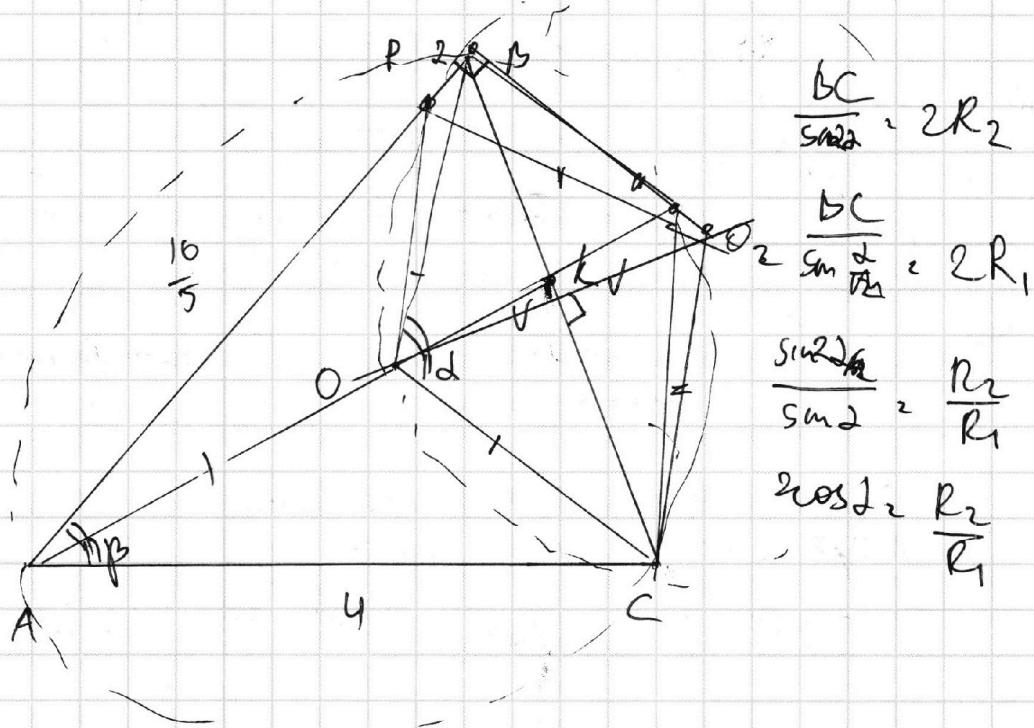


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и **суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \sin(90^\circ - \alpha + (-\beta)) = \sin(90^\circ - \alpha) \cos(-\beta) +$$

$$\sin(-\beta) \cos(s_0 - d) = \cos 2 \cos \beta - \sin \beta \cancel{\cos} s_0 d$$

ye-5

$$-5 = 1 - x + 2h$$

$$x = 6 + 2h$$

$$y = -4$$

$$-4 = 3x - 1 + 2h$$

$$-3 = 3x + 2h$$

$$-1 = x + \frac{2}{3}h$$

	1	2	2	3	3	4	4	5
S	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
1 2 3 4 5 6 7 8 9	5	6	7	8	9	8	9	0