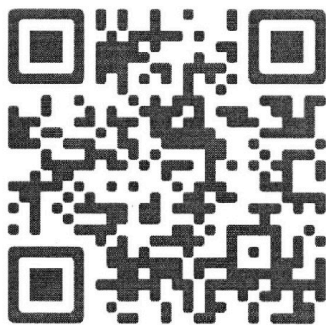




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$A = \overline{aaaa}, \text{ где } a \in \{1; 2; 3; \dots; 9\}$$

$$\Rightarrow A = a \cdot 1111 = a \cdot 101 \cdot 11$$

101 и 11 - простые числа и $a \nmid 101; 11$

$\Rightarrow$ Если ABC - квадрат целого числа

$$\Rightarrow BC : 101 \cdot 11$$

$$C - \text{двузначное} \Rightarrow B : 101$$

у B есть цифра ноль,

а единственное число которое делится

на 101, имеет цифру 6 и является трехзначным то 606 $\Rightarrow B = 606$

($B = b \cdot 101$, $b \in \{1; \dots; 9\}$, так как иначе $B > 1000$ что неверно)

$$\Rightarrow C : 11 \Rightarrow C = C \cdot 11 \text{ (} C \in \{1; \dots; 9\}, \text{ иначе } C > 100)$$

$$\text{и C имеет 3} \Rightarrow C = 33$$

$$\Rightarrow ABC = a \cdot 101 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = k^2 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow a = 2e^2 \quad (e \in \mathbb{N})$$

$$\text{так как } a < 10 \Rightarrow e < 3 \Rightarrow e = 1, 2$$

$$\Rightarrow A = \begin{matrix} 2222 \\ 8888 \end{matrix}$$

Ответ: (2222, 606, 33); (8888, 606, 33)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$x, y > 0$

$$k = \frac{x}{x} + \frac{x}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{x}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)}$$

1) $y+x+5=0$ ← к-то - то либо x , либо $y < 0$ - противоречие

2) $xy = (x-2)(y+2)$

2) $xy = xy + 2x - 2y - 4$

$$y = x - 2$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - (x-2)^3 - 6(x-2)x = \\ &= \underline{x^3} - \underline{x^3} + \underline{6x^2} - \underline{12x + 8} - \underline{6x^2} + \underline{12x} = \\ &= 8 \end{aligned}$$

Ответ: 8.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} + 3y \sqrt{1 - \left(\frac{x}{6}\right)^2} < 0$$

$$x \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} < -3y \sqrt{1 - \left(\frac{x}{6}\right)^2} \leftarrow x \text{ и } y$$

$$x \geq 0 \Rightarrow y \leq 0$$

$$x^2 \left(1 - \frac{y^2}{4}\right) < 9y^2 \left(1 - \left(\frac{x}{6}\right)^2\right)$$

$$x^2 - \frac{x^2 y^2}{4} < 9y^2 - \frac{y^2 x^2}{4}$$

$$x^2 < 9y^2$$

$$(3y - x)(3y + x) > 0$$

$$3y < 0$$

$$3x > 0$$

$$\Rightarrow 3y - x < 0 \Rightarrow 3y + x > 0$$

Должно

$$3y > -x$$

$$\text{но а) подходит } (5; -1) \rightarrow x+y = 4$$

$$\begin{pmatrix} -6 > -x \\ -3 > -x \end{pmatrix}$$

$$(4; -2)$$

$$(3x - y = 4)$$

те же самые

групи x, щоб
групи y, щоб
будуть більше 3y

$$y \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \quad 1) y \geq 0$$

$$x \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} < -3y \sqrt{1 - \left(\frac{x}{6}\right)^2} < 0$$

$$-x \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} > 3y \sqrt{1 - \left(\frac{x}{6}\right)^2} > 0$$

$$x^2 > 9y^2$$

$$(3y - x)(3y + x) < 0$$

$$3y - x > 0 \Rightarrow 3y < -x$$

$$\begin{cases} 3y < -x \\ -6 \leq x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 < -x, y \\ 3 < -x, y \\ 0 < -x \end{cases}$$

$$2 \geq y \geq 0 \quad 2) -6 \leq x < 0$$

$$3x - y = 4 \text{ или } x+y = 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда $(-4; 2); (-2; 2)$

~~$(-4; 1)$~~ ; $(-5; 1)$

(x, y - одной четности)

$$2) \quad x \leq 0 \quad y < 0$$

$$x \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} < -3y \sqrt{1 + \left(\frac{x}{6}\right)^2}$$

$$x^2 > 9y^2$$

$$(3y - x)(3y + x) < 0$$

$$3y + x < 0 \Leftrightarrow 3y - x > 0$$

$$\begin{cases} 3y > x \\ -2 \leq y < 0 \\ -6 \leq x \leq 0 \\ 3y - y \text{ или } x + y - \text{четно} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y > x \\ -6 > x \\ -3 > 0 \\ -6 \leq x \leq 0 \\ x, y - \text{одной четности} \end{cases}$$

подходят $(-4; -2); (-2; -2);$

$(0; -2); (-1; -1)$

ответ: $(-4; -2); (-2; -2); (0; -2);$

$(-4; -1); (-5; 1); (5; -1); (4; -2)$

$$a) \quad (k-a; k+a) \quad k \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Q}$$

$$\left(\frac{h-b}{3}; -h-b\right) \quad h \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Q}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

в) 3 ($\mathbb{Z}$ - целые, $\mathbb{Q}$ - действительные)

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = -2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \pi x$$

$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \pi x = 0$$

$$1) \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x + \pi y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{пары } (2k - a, 2k + a), \text{ где } k \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Q} \text{ (действительные)}$$

$$2) \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = -\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \pi x$$

$$\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x + \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \pi x = 0$$

$$\sin \left(\pi x + \frac{\pi x - \pi y}{2} \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{3\pi x - \pi y}{2} \right) = 0$$

$$3\pi x - \pi y = 2\pi h, h \in \mathbb{Z}$$

$$3x - y = 2h, h \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{пары}$$

$$\left(\frac{2h - b}{3}, -h - b \right), \text{ где}$$

$$h \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Q}$$

$$5) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$\sin \left(\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \right) < 0$$

$$\frac{x}{6} \cos \arcsin \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \cos \arcsin \frac{x}{6} < 0$$

$$\frac{x}{6} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{2} \right)^2} + \frac{y}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{6} \right)^2} < 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 6 \quad \frac{C_{n-2}^2}{C_n^k} &= \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} \\ 6 \quad \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} &= \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \\ \frac{n!}{4!(n-k)!} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ \frac{4!(n-k)}{6 \cdot 2!} &= \frac{k!}{(k-2)!} \\ 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 &= (k-1)(k) \\ 72 &= (k-1)k \\ \underline{k} &= 9 \end{aligned}$$

Ответ: 9



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$72 = 6 \cdot 3 \cdot 4 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$1) k(k-1) = 72 \Rightarrow k = 9$$

$$k(k-1) \rightarrow 5 \cdot 4 = 4 \cdot 3$$

$$\text{т.к. } k \geq 5 \Rightarrow k(k-1) \geq 20$$

тогда переберем все варианты

$$2^\alpha \cdot 3^\beta = k(k-1), \quad \alpha, \beta \geq 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}$$

их всего $3 \cdot 2 = 6$ вариантов

$$\alpha = 3, \quad \beta = 2$$

$$k(k-1) = 72 \Rightarrow k = 9$$

$$\alpha = 3, \quad \beta = 1$$

$$k(k-1) = 24$$

$$k^2 - k - 24 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 24 = 1 + 96 = 97 \Rightarrow \sqrt{D} \notin \mathbb{Z}$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = 2$$

$$k(k-1) = 4 \cdot 9 = 36$$

$$k^2 - k - 36 = 0$$

$$D = 1 + 36 \cdot 4 = 1 + 144 = 145 \Rightarrow \sqrt{D} \notin \mathbb{Z}$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1$$

$$k(k-1) = 4 \cdot 3 < 20$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2$$

$$k(k-1) = 2 \cdot 9 < 20$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1$$

$$k(k-1) = 2 \cdot 3 < 20$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего учеников n , а в конце месяца
было дано k билетов $n \geq k \geq 4, n, k \in \mathbb{N}$

Вероятность в начале

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$$

В конце

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-2}^k}$$

$$\frac{C_k^k}{C_n^k}$$

$$\frac{C_{k-2}^{k-2}}{C_n^{k-2}}$$

$$\frac{C_k^k}{C_n^k}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 4}{(n-2)(n-3)}$$

$$\frac{n!}{(k-2)!(n-k+2)!} = \frac{k!(n-k)!}{(k-2)!(n-k+2)!} = \frac{(k-1)(k-2)}{(n-k+1)(n-k+2)}$$

$$\frac{72}{(n-2)(n-3)} = \frac{(k-1)(k-2)}{(n-k+1)(n-k+2)}$$

$\Rightarrow k(k-1) \leq 72$ и состоит только из нечетных



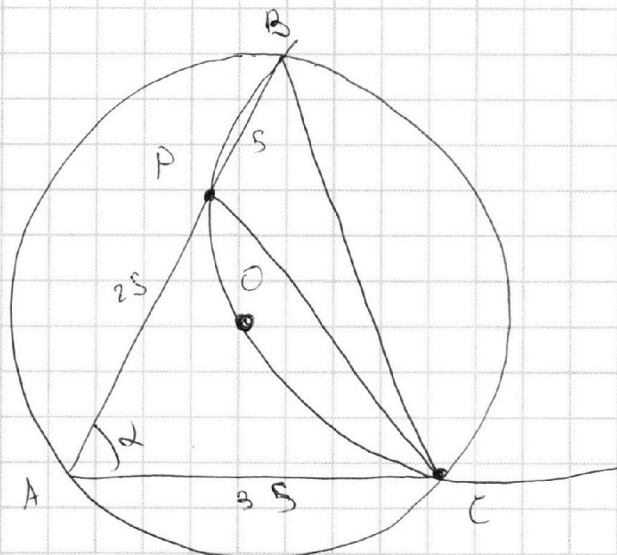
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

УВ



Решение:

1) $\angle BAC = \alpha$

2) $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha$ (вписанный и центральный окр. $\triangle ABC$)

$\Rightarrow \angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$ (вписанные окр. $\triangle BOC$)

$\Rightarrow$ т.к. $\angle BPC$ - внешний для $\triangle APC \Rightarrow \angle PCA = \angle BPC - \angle PAC = \alpha$
 $\Rightarrow \triangle APC$ - равнобедр. $\Rightarrow AP = PC = 25$

3) $\triangle APC$: по т. косинусов

$$\cos \angle PAC = \cos \alpha = \frac{AP^2 + AC^2 - PC^2}{2 \cdot AP \cdot AC} = \frac{25^2 + 35^2 - 25^2}{2 \cdot 25 \cdot 35} = \frac{35^2}{2 \cdot 25 \cdot 35} = \frac{35}{2 \cdot 25} = \frac{7}{10}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$\begin{aligned} 4) S_{ABC} &= S_{APC} + S_{BPC} = \frac{AP \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{BP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha}{2} = \\ &= \frac{25 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10}}{2} + \frac{5 \cdot 25 \cdot \frac{7 \cdot \sqrt{51}}{10} \cdot \frac{7}{10}}{2} = \\ &= \frac{25 \cdot 5 \sqrt{51}}{20} \left(7 + \frac{7}{5} \right) = \frac{25 \cdot 5 \sqrt{51} \cdot 7}{20 \cdot 4} \left(1 + \frac{1}{5} \right) = \frac{25 \cdot 7 \sqrt{51} \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$= \frac{5 \cdot 7 \cdot 3 \sqrt{59}}{2} = 52,5 \sqrt{59}$$

$$\begin{array}{r} \times 28 \\ 5 \\ \hline 105 \end{array} \quad 52,5$$

Ответ: $52,5 \sqrt{59}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

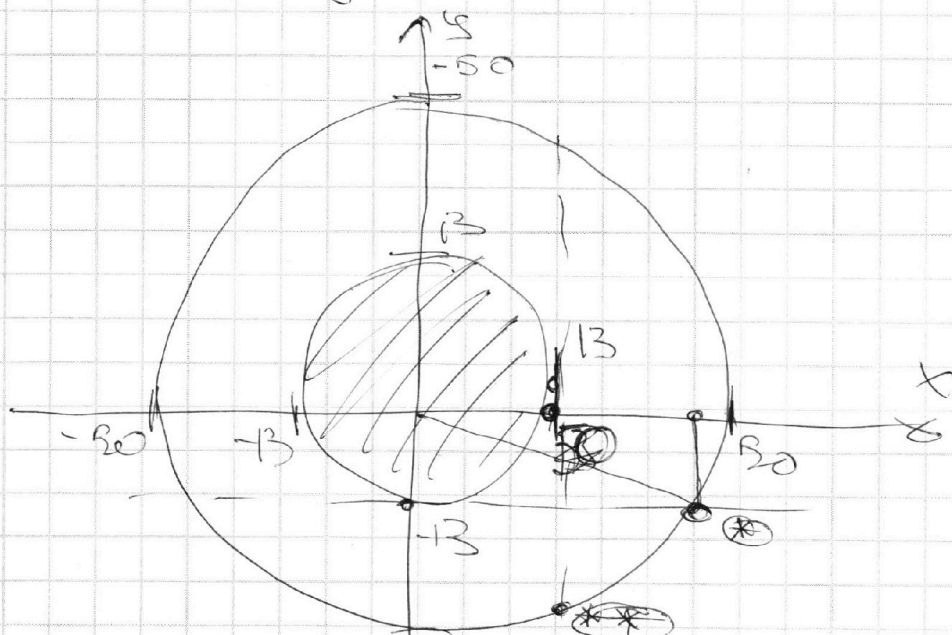
7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Построим две эти окружности

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$



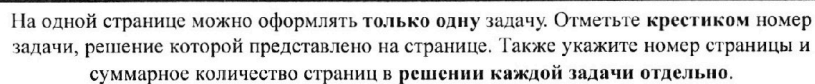
$S_0 \Rightarrow \text{MAX } P \text{ существует (} P=260 \text{)}$

когда круг $r=13$ находится
внутри области это гарантиро
когда мы возьмем точки S_0
на окр. $R=50$ от (*) S_0 (*)

$$\begin{aligned} (*) & \Rightarrow 13^2 + 25 \cos^2 \alpha = 50^2 \\ 25 \cos^2 \alpha &= \frac{50^2 - 13^2}{25} = \frac{2500 - 169}{25} = 121 - \frac{169}{25} \end{aligned}$$

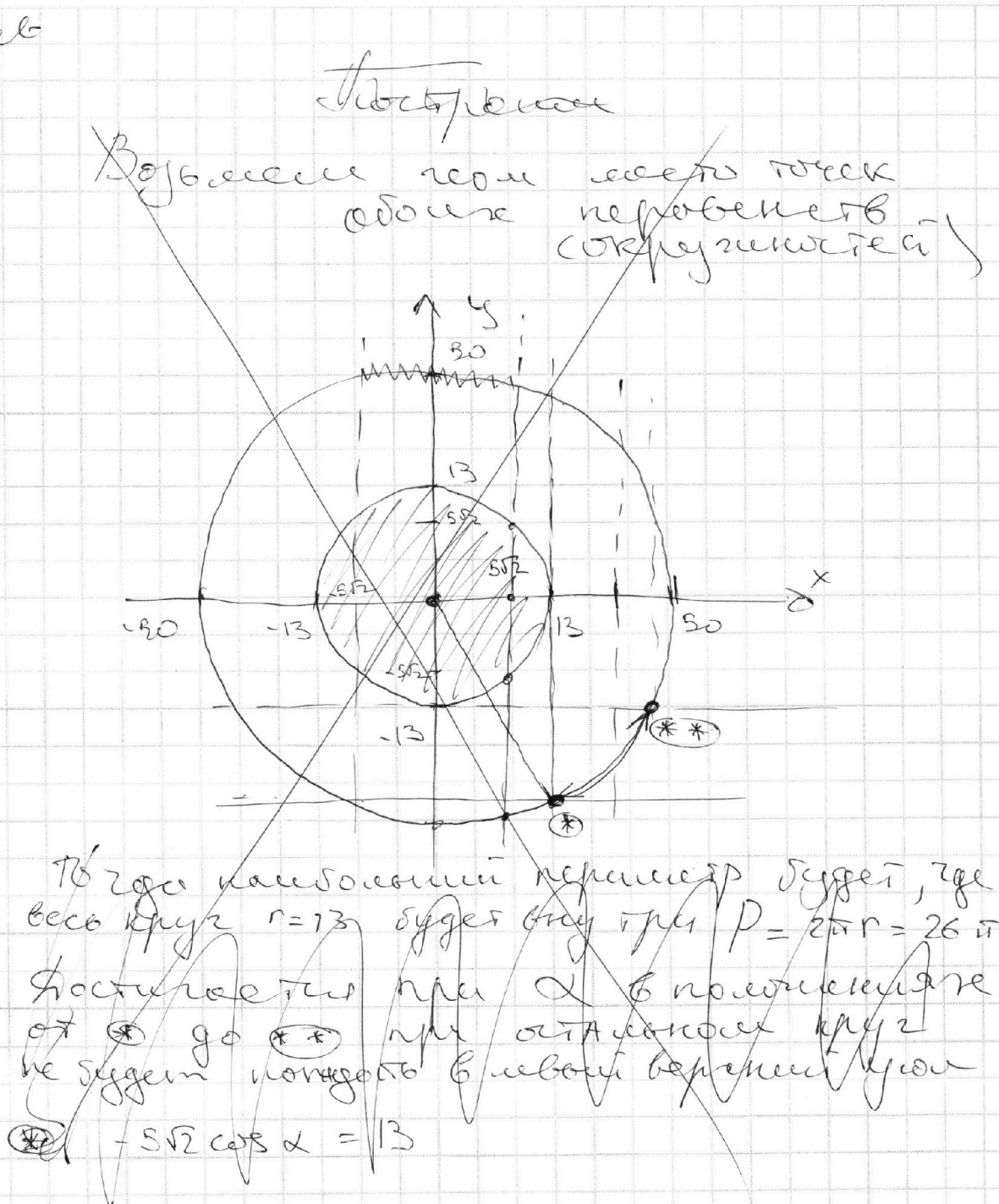
$$\cos \alpha = \pm \arccos \sqrt{\frac{2331}{25}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} (**) & 13^2 + 25 \sin^2 \alpha = 50^2 \\ \sin \alpha &= \arcsin \sqrt{\frac{2331}{25}} \end{aligned}$$



СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



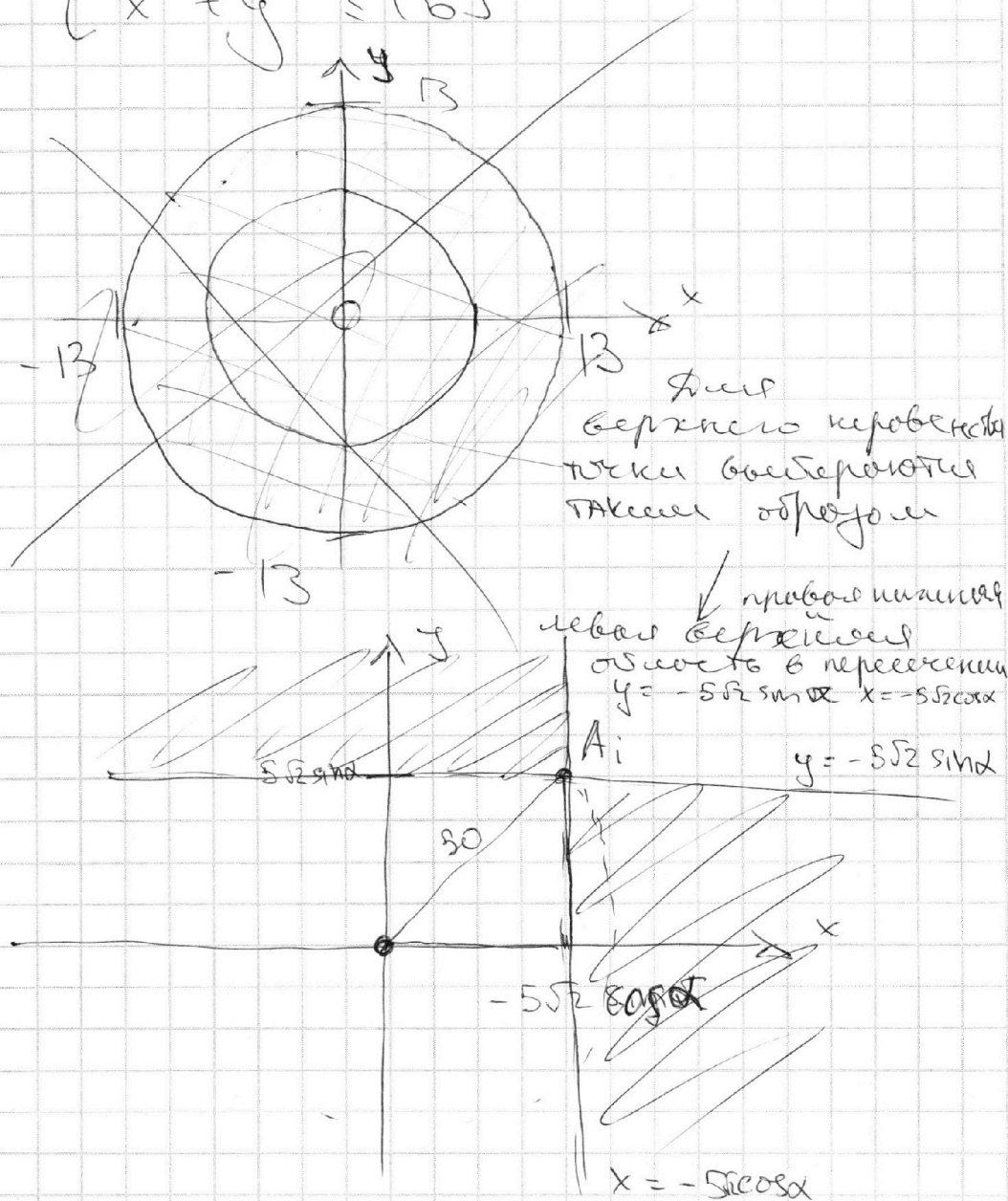
СТРАНИЦА

4 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

56

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 189 \end{cases}$$



$\Rightarrow$ все точки A_i лежат на окружности
и $R = (-5\sqrt{2} \sin \alpha)^2 + (-5\sqrt{2} \cos \alpha)^2 = 50$, т.е.
 $x \in [-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}]$ $y \in [-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}]$

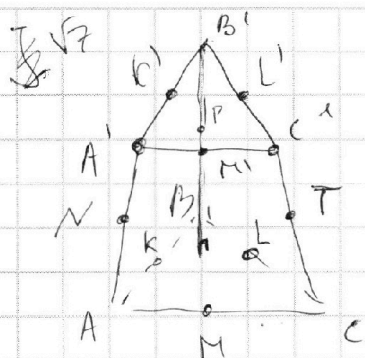


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Особое внимание
вершинам как на
сегменте
($S_{A'B'C'} \subset S_{ABC}$)

и точки касания окружности
буквами как на
сегменте

Тогда

$$KB = BL = BP$$

$$MC = LC = TC$$

$$AN = AM = AK$$

$$AM + MC = AC$$

$$\Rightarrow BL = AC - LC = AM$$

$$BK = AC - AM = MC$$

$$\Rightarrow AM = MC$$

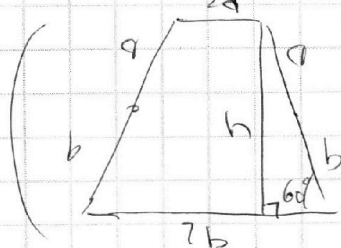
$$\Rightarrow NA = AK = AM = CM = CL = CT = BK = BL = BP = b$$

и аналогичное рассуждение можно
применить с вершинами
приращенных и получить

$$A'N = A'M' = A'K' = C'T = C'M' = C'L' = B'L' = B'K' = BP = a$$

$$\Rightarrow S_1 = S_{A'B'C'} + S_{ABC} = a^2\sqrt{3} + b^2\sqrt{3} = \sqrt{3}(a^2 + b^2)$$

$$S_2 = S_{AA'C'C} + S_{AA'B'B} + S_{CC'B'B} = 3\sqrt{3}(a+b)^2$$



трапеция с основаниями
 a и b и сторонами
высота — $h = \left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{3}$

$$S = \left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{3} \cdot \frac{a+b}{2} = \frac{(a+b)^2\sqrt{3}}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \angle SDO_2 = \frac{SO_2}{SD} = \frac{\sqrt{3b^2 - \frac{b^2}{3}}}{b\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\frac{8}{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} \sin \angle SBO_2 &= \frac{SO_2}{BO_2 SB} = \frac{\sqrt{3b^2 - \frac{b^2}{3}}}{\frac{2b\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{\frac{8}{3}}}{2\sqrt{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{3b^2 - \frac{b^2}{3}}}{2b} = \frac{\sqrt{\frac{8}{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$\angle BH$ - высота в треугольнике $DD'B'B$
 $D'L \perp BB' \Rightarrow D'L = BH$

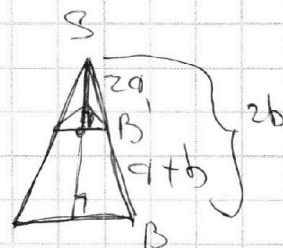
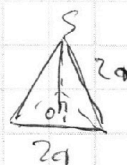
$$BH = \sin \angle B'BD \cdot B'B = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (a+b) = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ марау}$$

~~$$BH = \sin \angle B'BD \cdot DD' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (a+b) \sqrt{3} = 2\sqrt{2} (a+b)$$~~

(т.к. $BH \parallel O_1O_2$)

$$SO_2 = \frac{\sqrt{8}}{3} b$$

$$SO_1 =$$



$$SB = 2b$$

$$B'B = a+b$$

$$\Rightarrow SB_1 = 2b - a - b = b - a = 2a$$

(т.к. $A'B'C'S$ - тоже правильная пирамида)

$$\Rightarrow b = 3a$$

$$\Rightarrow S_2 = 3\sqrt{3} (a+3a)^2 = 12\sqrt{3} a^2$$

$$S_{A'B'C'} = a^2 \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12\sqrt{3} a^2} = \frac{1}{12}$$

Ответ: $\frac{1}{12}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

☐☐☐☒☐☒☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Решение на k=9~~

~~$$\frac{1}{(n-2)(n-3)} = \frac{1}{(n-8)(n-7)}$$~~

~~$$n^2 - 5n + 6 = n^2 - 15n + 56$$~~

~~$$10n = 50$$~~

~~$$n = 5$$~~

3 2

(-3, 2)

~~$$\frac{C_5^2}{C_5^4} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{2}}{5} = 2$$~~

$$\frac{7}{5}$$

~~$$k^2 = \frac{1}{5}$$~~

~~$$\frac{725}{(n-2)(n-3)}$$
$$72 \cdot 6 = (n-2)(n-3)$$
$$2^4 \cdot 3^3 = (n-2)(n-3)$$~~



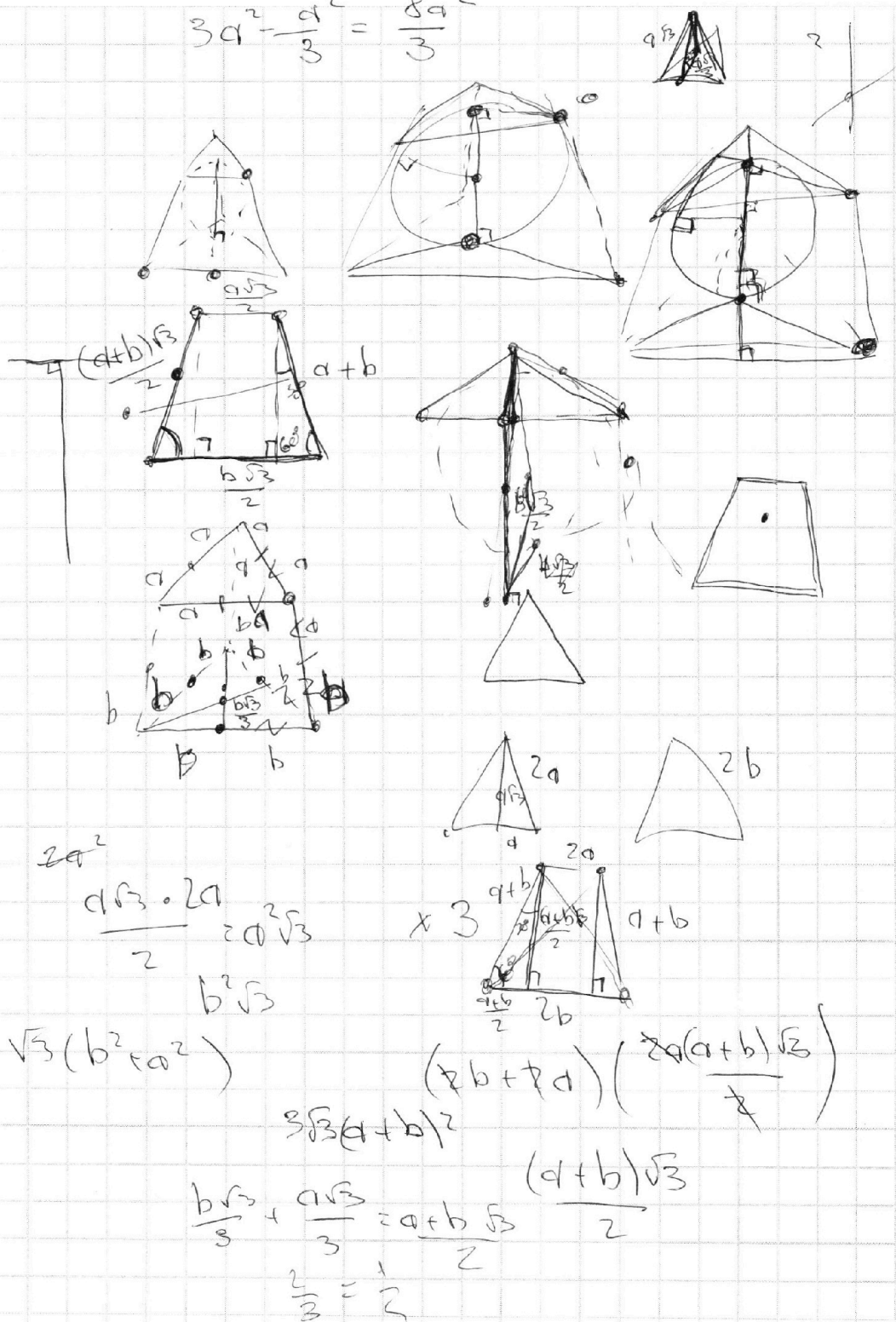
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{8a^2}{3}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \leq \pi$$

$$-6 \leq x \leq 6$$

$$-2 \leq y \leq 2$$

$$\sin(\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2}) < 0$$

$$\frac{x}{6} \cos \arcsin \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \cos \arcsin \frac{x}{6} < 0$$

$$\frac{x}{6} \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{36}} < 0$$

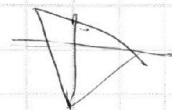
$$\cos(\arcsin x) = \cos(\arccos(\sqrt{1 - \cos^2 x}))$$

$$\cos(\arcsin x) = t$$

$$|\arcsin x = \arccos t|$$

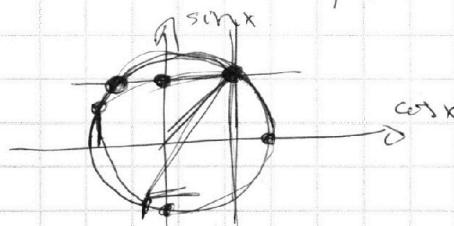
~~$$\arcsin x = \arccos t$$~~

$$t = \pi - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x = \cos t$$

$$\sin(\cdot) = t$$



~~$$\sin x = \cos t$$~~

~~$$\sin x = \cos t$$~~

$$x = \sin \alpha$$

$$\alpha = \arcsin x$$

$$t = \cos \beta$$

$$\beta = \arccos t$$

$$x = \frac{\alpha}{t} = \beta$$

$$x^2 + t^2 = 1$$

$$x^2 + t = 1 -$$

$$x \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} + 3y \sqrt{1 - \frac{x^2}{36}} < 0$$

$$x \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} < -3y \sqrt{1 - \frac{x^2}{36}}$$

$$x^2 (1 - \frac{y^2}{4}) < 9y^2 (1 - \frac{x^2}{36})$$

$$x^2 - \frac{x^2 y^2}{4} < 9y^2 - \frac{9y^2 x^2}{36}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

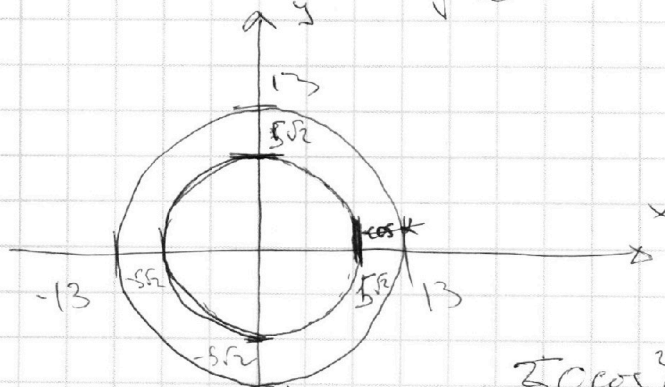
$$* \quad y(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) + 5\sqrt{2} \sin \alpha (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 50$$
$$y(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha > 0 \\ y \leq -\frac{5\sqrt{2} \sin \alpha (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)}{x + 5\sqrt{2} \cos \alpha} = -5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x + 5\sqrt{2} \cos \alpha < 0 \\ y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{array} \right.$$

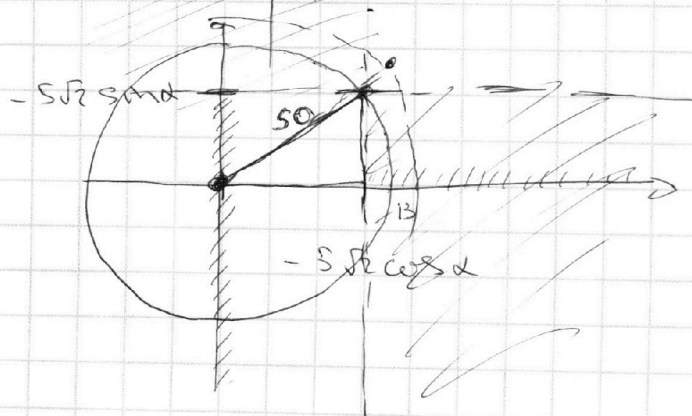
$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x < -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y > -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{array} \right.$$

$$\cos \alpha = 2$$
$$\sin \alpha = 1$$
$$2^2 + 1^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 \leq 169 \quad \sqrt{50} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 50$$



$$50 \cos^2 \alpha + 50 \sin^2 \alpha = 50$$



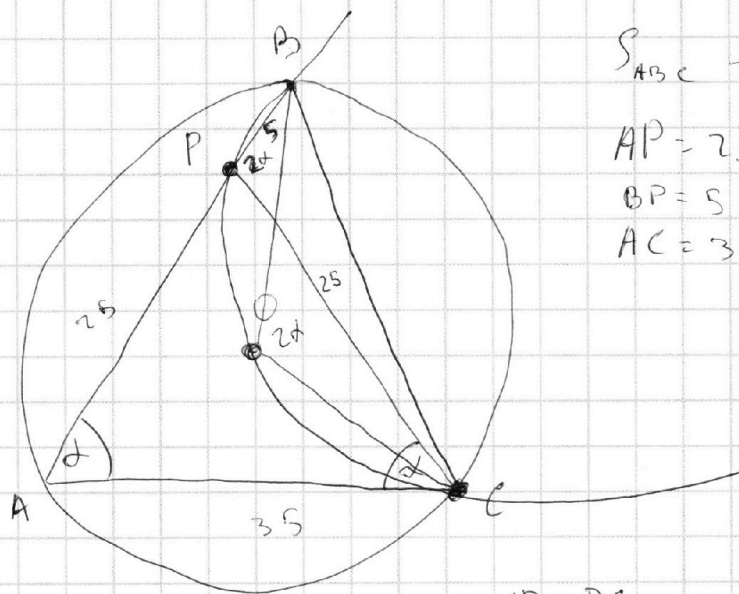


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = ?$$

$$AP = 2s$$

$$BP = s$$

$$AC = 3s$$

$$AP = PC$$

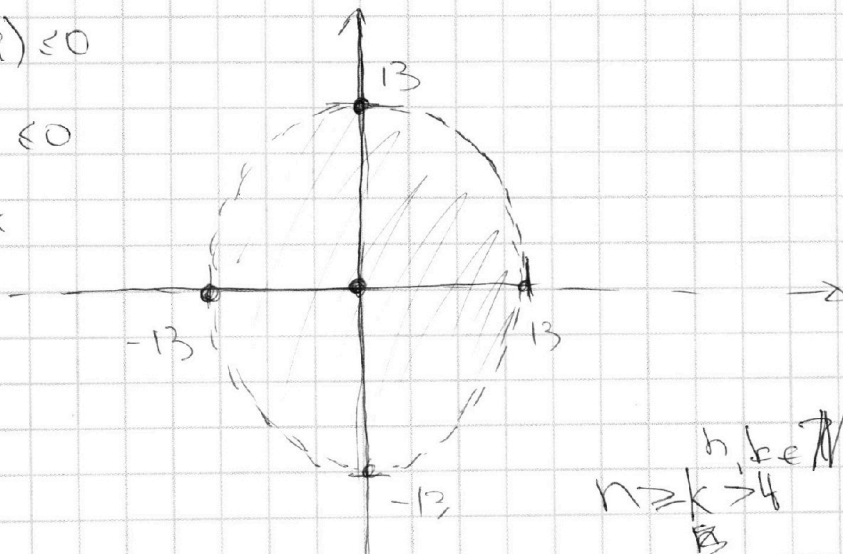
$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

$$(x-1)(y+1) \leq 0$$

$$xy - 1 - y + x \leq 0$$

$$y(x-1) \leq -x$$

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ y \leq \frac{-x}{x-1} \end{cases}$$



$$y + 5\sqrt{2}\sin\alpha$$

$$\frac{2^4 \cdot 3^2}{16 \cdot 9}$$

$$k(k-1)(k-2)(k-3) = 144(k-k+1)(k-k+2)$$

$k-k+1 = 1$
 $k-k+2 = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k(k-1)$$

$$n-2 = t + k - 2$$

$$n-k = t$$

$$k = n$$

$$k-1 = n-t-1$$

$$k = n-t$$

$$\begin{aligned} (k^2-k)(n-2)(n-3) &= 36 \cdot 4 (n-k+1)(n-k+2) \\ (k-1)k(n-2)(n-3) &= 144((n-k)^2 + 3(n-k) + 2) \end{aligned}$$

$16 \cdot 9$ 2^4 2^5

$k-1$ $n-2$ 2 5 $k+k$

$$\begin{aligned} k^2 n^2 - 5nk^2 + k^2(6-144) - kn^2 + nk(5+288) - k(6-3 \cdot 144) - \\ - 2 \cdot 144 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k^2(n^2 - 5n + 138) + k(-n^2 + 293n + 3 \cdot 144 - 6) - \\ - 2 \cdot 144 = 0 \end{aligned}$$

$3 \cdot 46$ $6 \cdot 23$

$$n^2(k^2-k) + n(-5k^2 + k \cdot 293) - 138k^2 + (3 \cdot 144 - 6)k -$$

$$k(k-1)(n-2)(n-3) = 144(n-k+1)(n-k+2)$$

$-2 \cdot 144$ $\div 3$ $\div 3$

$$\begin{aligned} k: 3 \quad k=3 \quad p \quad n-k+t = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$n = \frac{k+t}{3}$$

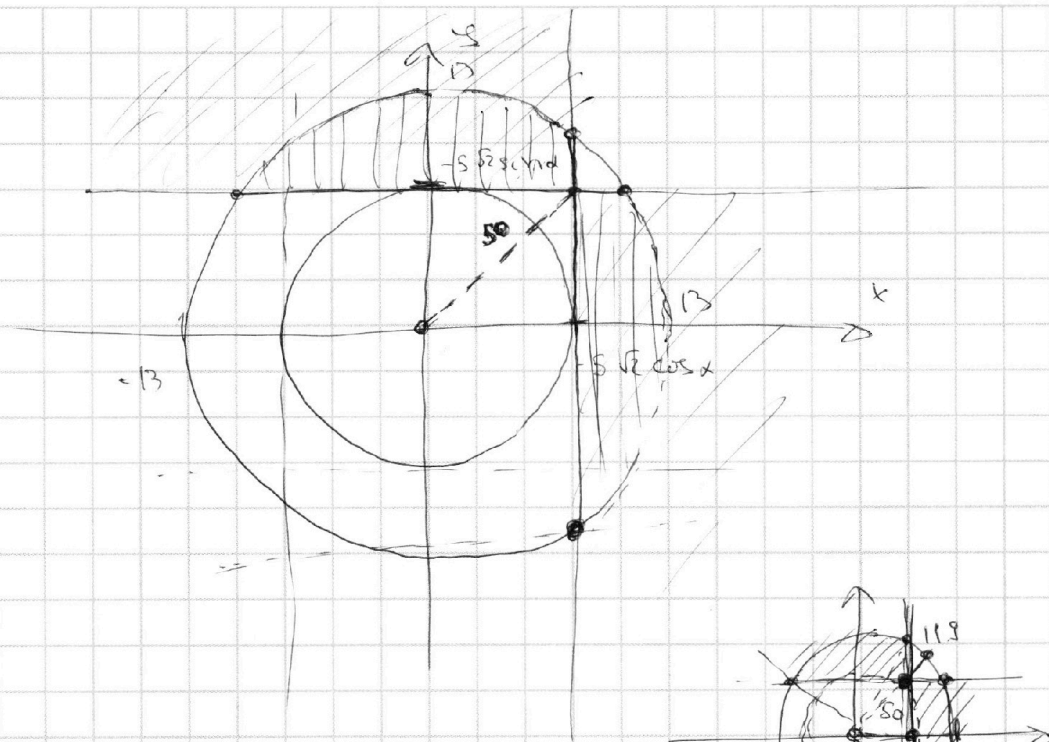


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$(-5\sqrt{2}\cos\alpha)^2 + y^2 = 169$$

$$50\cos^2\alpha + y^2 = 169$$

$$x^2 + y^2 = 50$$

$$(x_0; y_0) \quad x_0^2 + y_0^2 = 50$$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ x_0^2 + y_0^2 = 169 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

48. n - количество элементов

$$6 \frac{C_n^2}{C_n^4} = \frac{C_n^{k-2}}{C_n^k}$$

$$\frac{1}{n} \cdot 6 \cdot n(n-1)$$

$$\frac{n!}{4!(n-4)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$\frac{4! \cdot 6 \cdot n(n-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{36 \cdot 4}{(n-2)(n-3)}$$

$$C_n^{k-2} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k+2)!}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(k)!(n-k)!} = \frac{k!(n-k)!}{(k-2)!(n-k+2)!}$$

$$k(k-1); 144 = (12)^2 = 16 \cdot 9$$

$$= \frac{(k-1)k}{k(n-k+1)(n-k+2)} = \frac{36 \cdot 4}{(n-2)(n-3)}$$

$$(k^2 - k)(n-2)(n-3) = 36 \cdot 4(n-k+1)(n-k+2)$$

$$(k^2 - k)(n^2 - 5n + 6) = 144(n-k+1)(n-k+2)$$

$$k^2 n^2 - 5n k^2 + 6k^2 - k n^2 + 5n k - 6k = 144 n^2 - 288 k n + 144 k^2 + 3 \cdot 144 n - 3 \cdot 144 k + 2 \cdot 144$$

$$(k^2 - k)(n^2 - 5n + 6)$$

$$k(k-1)(n-2)(n-3) = 144(n-k+1)(n-k+2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

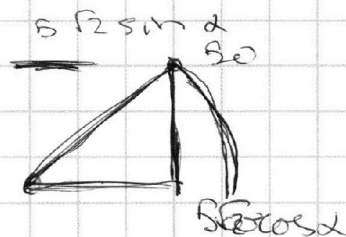
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & b & c \\ b & 6 & c \\ b & c & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3d \\ d3 \end{pmatrix}$$

$$ABC = k^2$$



$$a(1111)$$

$$101 = 11$$

$$a \cdot 101 \cdot 11 = 101 \cdot 11 - \text{простое}$$

$$\Rightarrow \frac{101}{11} = 101$$

$$\Rightarrow x$$

$$ABC = a \cdot 101 \cdot 11 \cdot 606 \cdot \frac{3d}{\sqrt{3}} = 2$$

$$a = 2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(y+2)} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+x+5=0 \\ xy=(x-2)(y+2) \end{cases}$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$0 = -2x - 2y - 4$$

$$y = x - 2$$

$$M_1 = x^3 + (x+5)^3 + 6x(x+5) = x^3 + x^3 + 15x^2 + 75x + 125 + 6x^2 + 30x = 2x^3 + 21x^2 + 105x + 125$$

$$M_2 = x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2) = x^3 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x = 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(k^2 - k) \left(\frac{x}{6} + \cos \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \right) < 0$$

$$k(k-1) \text{ — бинарно простое}$$

$$x \in \mathbb{Z} \quad y \in \mathbb{Z} \quad \frac{x}{6} \leftarrow$$

$$x = k - 1$$

$$(n-2)(n-3) \text{ — бинарно простое}$$

$$\sin x = \frac{x}{6} \quad \sin \alpha = \frac{x}{6}$$

$$x = \arcsin \frac{x}{6} \quad \sin \beta = \frac{y}{2}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{x}{6}$$

$$(n-k+1, n-k+2) \text{ — бинарно простое}$$

$$D_2(k) = \alpha$$

$$D_2(n-k) = \min(\alpha, \beta)$$

$$D_2(n-k+1) = \beta$$

$$D_2(n-k+2) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha + \beta = 5$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin \alpha =$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \pi x \\ \alpha - \beta = \pi y \end{cases}$$

$$\left| \frac{x}{6} \right| \leq 1$$

$$-6 \leq x \leq 6$$

$$-2 \leq y \leq 2$$

$$\alpha = \frac{\pi x + \pi y}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = -2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}$$

$$\sin \pi x = -\cos \pi x$$

$$\sin \pi x + \cos \pi x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \pi x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \pi x =$$

$$= \sin \left(\frac{\pi}{4} + \pi x \right) = 0$$