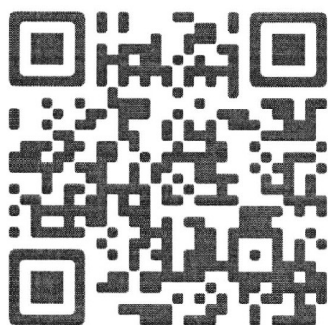




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть из условия $A = a \cdot 111$, где $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow A = 9 \cdot 11 \cdot 101$

П.к. $ABC = n^2$, где $n \in \mathbb{N}$, то все простые множители в произведении ABC

должны входить четное количество раз $\Rightarrow BC : 101 \cdot 11$. П.к. $C < 100$, то

$B : 101 \Rightarrow B = 707$, где $7 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. П.к. по условию B содержит

цифру 7, то $7 \neq 7 \Rightarrow B = 707 / 11 \Rightarrow C : 11 \Rightarrow C = 64$, где $C \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

П.к. по условию C содержит цифру 1, то $C = 11 \Rightarrow BC = 101 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 7$, значит

$BC : 7 \Rightarrow A : 7 \Rightarrow (9 \cdot 11 \cdot 101) : 7 \Rightarrow 9 : 7 \Rightarrow 9 \neq 7 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow A = 7777 \Rightarrow$ тройка

$(A|B|C) = (7777, 707, 11)$ - единственное решение

Ответ, $(7777, 707, 11)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

До изменения: $k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$, после изменения $k = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$,

т.к. выражение не изменилось, то $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x-x+4}{x(x-4)} + \frac{y-y-4}{y(y+4)} + \frac{3(x\cancel{y} - \cancel{xy} + 4y - 4x + 16)}{(x-4)(y+4)xy} = 0 \quad | \cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(x-4)} - \frac{1}{y(y+4)} + \frac{3(y-x+4)}{xy(x-4)(y+4)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y(y+4) - x(x-4) + 3y - 3x + 12}{xy(x-4)(y+4)} = 0 \quad \Rightarrow \frac{y^2 + 4y - x^2 + 4x + 3y - 3x + 12}{xy(x-4)(y+4)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^2 + 4y - x^2 + 4x + 12}{xy(x-4)(y+4)} = 0 \quad \Rightarrow \frac{(y + \frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} + 12}{xy(x-4)(y+4)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(y + \frac{7}{2})^2 - (x - \frac{1}{2})^2}{xy(x-4)(y+4)} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} (y + \frac{7}{2})^2 = (x - \frac{1}{2})^2 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 4 \\ y \neq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + \frac{7}{2} = x - \frac{1}{2} \\ y + \frac{7}{2} = -x + \frac{1}{2} \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 4 \\ y \neq -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+4=x \\ y+3=-x \text{ - неверно, т.к. } y+3>0, \text{ а } (-x)<0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 4 \\ y \neq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+4=x \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 4 \\ y \neq -4 \end{cases}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (y+4)^3 - y^3 - 12y(y+4) = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y =$$

$= 64$ - выражение можно дописать как константу при нахождении (5) 1),

$$\text{т.к. } \frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{3}{5 \cdot 1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = 1 \frac{4}{5}, \text{ а } M = 125 - 1 - 60 = 125 - 61 = 64$$

Ответ: 64.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin(\pi y) - \sin(\pi x)) \sin(\pi y) = (\cos(\pi y) + \cos(\pi x)) \cos(\pi y)$$

$$\sin^2(\pi y) - \sin(\pi x) \sin(\pi y) = \cos^2(\pi y) + \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$

$$\sin^2(\pi y) - \cos^2(\pi y) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$-\cos(2\pi y) = \cos(\pi y - \pi x) \Rightarrow \cos(\pi y - \pi x) + \cos(2\pi y) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi y + \pi y - \pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi y - \pi y + \pi x}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi y - \pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi y + \pi x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi y + \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\pi y - \pi x = \pi + 2\pi k \\ \pi y + \pi x = \pi + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} 3y - x = 1 + 2k \\ y + x = 1 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x + 1 + 2k}{3} \\ y = -x + 1 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \forall x \in [-1; 1] \left\{ \begin{array}{l} \arccos(x) \in [0; \pi] \\ \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \arccos(x) \geq 0 \\ -\arcsin(x) \geq -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \arccos\left(\frac{x}{7}\right) - \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) \geq -\frac{\pi}{2} \right| \Rightarrow \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{7}\right) = 0 \\ \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{7} = 1 \\ \frac{x}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

Проверка на удовлетворение пары (7; 4) условию из пункта а):

$$\begin{cases} y = \frac{x + 1 + 2k}{3} \\ y = -x + 1 + 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \in \mathbb{Z} \\ k = 5 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \text{пара (7; 4) удовлетворяет условию из пункта а)}$$

Ответ: а) $(x, \frac{x + 1 + 2k}{3})$ или $(x, -x + 1 + 2k)$ для $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall k \in \mathbb{Z}$;

б) все пары $(x, \frac{x + 1 + 2k}{3})$ или $(x, -x + 1 + 2k)$ для $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall k \in \mathbb{Z}$, кроме пары (7; 4)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

из данных $\arccos\left(\frac{x}{7}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$ следует, что $\begin{cases} |x| \leq 7 \\ |y| \leq 4 \\ x \neq 4(x, y) \neq (7, 4) \end{cases}$

$$\begin{cases} x \in \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ y \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \\ (x, y) \neq (7, 4) \end{cases}$$

Для $x = -7$: $\begin{cases} y = \frac{-6+2k}{3} \\ y = 8+2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in \{-4, -2, 0, 2, 4\} \\ y \in \{-4, -2, 0, 2, 4\} \end{cases} \rightarrow 5 \text{ пар}$

Для $x = -6$: $\begin{cases} y = \frac{-5+2k}{3} \\ y = 7+2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in \{-3, -1, 1, 3\} \\ y \in \{-3, -1, 1, 3\} \end{cases} \rightarrow 4 \text{ пары}$

Для $x = 2k$: $\begin{cases} y = \frac{2k+1+2k}{3} \Rightarrow y \in \{-3, -1, 1, 3\} \\ y = -2k+1+2k \Rightarrow y \in \{-3, -1, 1, 3\} \end{cases} \rightarrow 4 \text{ пары для } \forall x \in \mathbb{Z}$

Для $x = 2k+1$: $\begin{cases} y = \frac{2k+2+2k}{3} \Rightarrow y \in \{-4, -2, 0, 2, 4\} \\ y = -k+2+2k \Rightarrow y \in \{-4, -2, 0, 2, 4\} \end{cases} \rightarrow 5 \text{ пары для } \forall x \in \mathbb{Z}$

Всего пар: $8 \cdot 5 + 7 \cdot 4 - 1 = 40 + 28 - 1 = 40 + 27 = 67$

Ответ, а) $(x, \frac{x+1+2k}{3})$ или $(-x, -x+1+2k)$ или $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall k \in \mathbb{Z}$

б) 67 пар



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

54

Пусть было x одноклассников и y билетов в конце месяцев. Количество способов выбрать 4 людей из x людей C_x^4 . Если Женя и Вася поехали на концерт, то осталось 2 свободных места, тогда количество вариантов выбрать пар, C_{x-2}^2 . Вероятность для Женя и Васи в начале месяца $p_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{\frac{(x-1)!}{2!(x-4)!}}{\frac{x!}{4!(x-4)!}} = \frac{(x-2)! \cdot 4!}{2! \cdot x!} = \frac{3 \cdot 4}{x(x-1)}$.

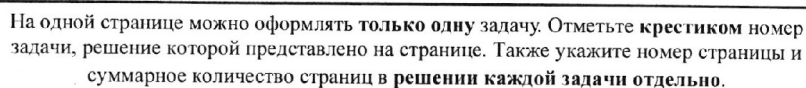
Количество способов выбрать 2 людей из x людей C_x^2 . Если Женя и Вася поехали на концерт, то осталось $(y-2)$ свободных мест, тогда количество вариантов выбрать, содержащих и Женю, и Васю C_{x-2}^{y-2} . Вероятность для Женя и Васи поехать на концерт в конце месяца $p_2 = \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y} = \frac{\frac{(x-1)!}{(y-2)!(x-y)!}}{\frac{x!}{(x-y)! \cdot y!}} = \frac{(x-2)! \cdot y!}{(y-2)! \cdot x!} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$.

Так как по условию $p_2 = 11p_1$, $\frac{y(y-1)}{x(x-1)} = \frac{11 \cdot 12}{x(x-1)} \Rightarrow y(y-1) = 132 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y^2 - y - 132 = 0 \Rightarrow (y-12)(y+11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 12 \\ y = -11 < 0 - \text{невозможно} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в конце месяца было 12 билетов.

Ответ: 12.



7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ouben's $99\sqrt{15}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 & (2) \\ x^2 + y^2 \leq 36 & (1) \end{cases}$$

- (1) $x^2 + y^2 \leq 36$ - внутренняя часть круга с центром в точке $(0,0)$ и радиусом 6
(2) $(x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0$

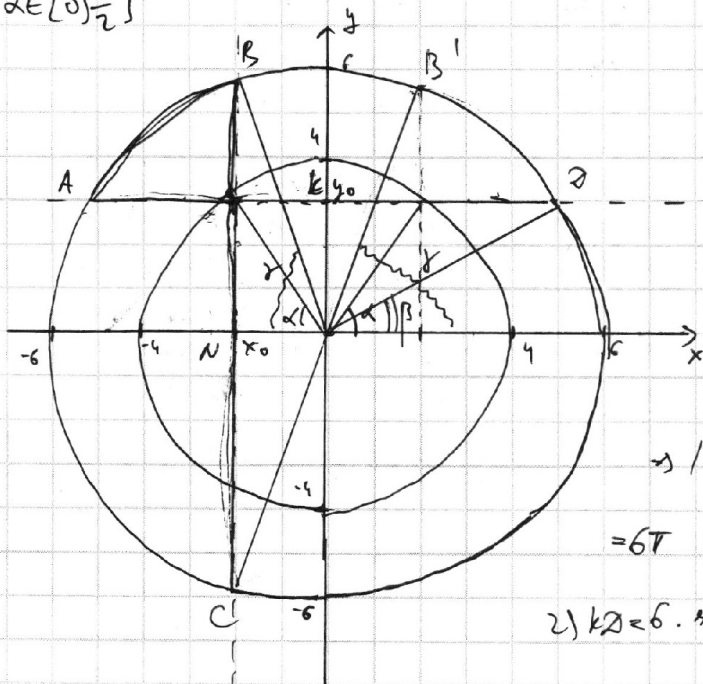
Пусть $x_0 = -4 \sin \alpha$ и $y_0 = 4 \cos \alpha$, тогда $x_0^2 + y_0^2 = 16 \sin^2 \alpha + 16 \cos^2 \alpha = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_0, y_0)$ - точка на окружности с центром в точке $(0,0)$ и радиусом 4

$$(x - x_0)(y - y_0) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 \leq 0 \\ y - y_0 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - x_0 \geq 0 \\ y - y_0 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq x_0 \\ y \geq y_0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq x_0 \\ y \leq y_0 \end{cases}$$

$\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$



$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{-x_0}{6} \\ \sin \beta &= \frac{-y_0}{4} \end{aligned} \Rightarrow \cos \beta = \frac{2}{3} \cos \alpha$$

1) дуга AB симметрична дуге $B'D$ относительно оси $Oy \Rightarrow$

$\Rightarrow$ их длины равны $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |AB| + |CD| = |CD| + |DB'| = |CD'| = 6\pi$$

$$2) KD = 6 \cdot \sin(90^\circ - \beta) = 6 \cdot \cos \beta = 6 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = 2KD = 12 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}$$

$$3) NB = 6 \cdot \sin \beta = 6 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha} \Rightarrow C'B = 12 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{y_0}{4}$$

$$\sin \beta = \frac{y_0}{6} \Rightarrow \sin \beta = \frac{2}{3} \sin \alpha$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4) M' = |\overline{CA'B}| + AD + BC' = 6\pi + 12 \left(\sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha} + \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha} \right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по неравенству о средних ~~минимум~~ ~~максимум~~ достигается при $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

5) ~~для~~ рассматриваем только случаи при $\alpha \in [0; \frac{\pi}{4}]$, но из симметрии ~~максимум~~ ~~минимум~~

в других случаях будет достигаться как раз при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$

$$6) M'_{\min} = 6\pi + 12 \left(2\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}} \right) = 6\pi + 24 \sqrt{1 - \frac{2}{9}} = 6\pi + 24 \cdot \sqrt{\frac{7}{9}} = 6\pi + 24 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} =$$

$$= 6\pi + 8\sqrt{7}$$

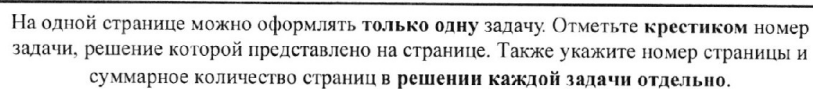
Ответ: ~~макс~~ $M = 6\pi + 8\sqrt{7}$ достигается при

$$7) M = 12\pi - |\overline{CA'B}| + AD + BC' = 12\pi - 6\pi + AD + BC' = 6\pi + AD + BC' = M'_{\min} = 6\pi + 8\sqrt{7}$$

8) Минимум M' соответствует максимуму $M \Rightarrow$ достигается при $\alpha =$

$\pi/4$.

Ответ: $M_{\max} = 6\pi + 8\sqrt{7}$ достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$.



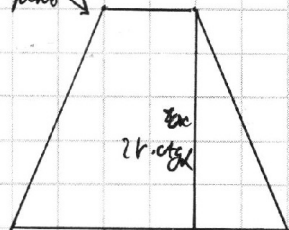
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

d-?

$$\sqrt{7}$$

Соколов зина



Теме

- 1) Пусть R -фаза Ω и r -фаза ω .
- 2) Так ω касается верхней и нижней граней, то высота кривой ω равна $2r$.
- 3) Пусть некая грань ω , тогда высота боковой грани равна $2r \cdot \cos \alpha$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(a^2+b^2+x^2)(b^2+b^2+x^2)}{2r^2(2ab^2+1)} = (b^2+x^2)$$

$$(c')^2(2r)^2 + (a-b)^2$$

$$c^2 = (c')^2 + (a-b)^2 = (2H^2 + 2(a-b)^2)$$

$$(a^2+k)(b^2+k) = k(2r^2)(2ab^2+1)$$

$$a^2b^2 + (a^2+b^2)k + k^2 = k(2r^2(2ab^2+1))$$

$$\frac{(a^2+b^2+x^2)(b^2+b^2+x^2)}{(2r)^2 + 2(a-b)^2} = b^2+x^2$$

$$x^2 = \left(\frac{(2r)^2 + a^2 - b^2}{4r} \right)^2 = \frac{(2H^4 + a^4 + b^4 - 2b^2(2r)^2 - 2b^2a^2 + 2a^2(2r)^2)}{16r^2}$$

$$b^2+x^2 = \frac{(2r)^4 + a^4 + b^4 + 2r^2(2a^2 - 2b^2) - 2b^2a^2 + 16r^2b^2}{16r^2} = \frac{(2H^4 + a^4 + b^4 + 2r^2(2a^2 + 6b^2) - 2b^2a^2)}{16r^2}$$

$$\frac{(2r)^4}{16r^2}$$

$$a^2b^2 + k(a^2+b^2) + k^2 = k(2H^2 + 2(a-b)^2)$$

$$aH^2 + a^2b^2 - 4ab = p - 2ab$$

$$k^2 + k(a^2+b^2 - 2(a-b)^2 - (2r)^2) + a^2b^2 = 0$$

$$k^2 + k(-a^2 - b^2 + 4ab - (2r)^2) + a^2b^2 = 0$$

$$D = (4ab - a^2 - b^2 - (2r)^2)^2 - 4a^2b^2 = (2ab - a^2 - b^2 - (2r)^2 - 2ab)(4ab - a^2 - b^2 - (2r)^2 + 2ab)$$

$$= (-(a-b)^2 - (2r)^2)(6ab - a^2 - b^2 - (2r)^2) = ((a-b)^2 + (2r)^2)(2r^2 + (a-b)^2 - 4ab) =$$

$$= p(p-4ab)$$

$$k = \frac{(p-2ab) \pm \sqrt{p(p-4ab)}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(A|B|C) \in \mathbb{N} \quad \Delta 1 \quad ABC \approx 4^2 \Rightarrow C < 100 \quad B \cdot C : 101 \Rightarrow B : 101 \Rightarrow B = 707$$

$$A = \overline{aaaa} \quad A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$$

$$7 \in B \quad C : 11 \Rightarrow C = 11$$

$$ABC = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 7 \cdot 101 \cdot 11 = a \cdot 7 \cdot (11 \cdot 101)^2 \approx 4^2 \Rightarrow 7a = 4^2 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A|B|C) = (7777 \ 707 \ 11) - \text{Фигурное. шрифт.}$$

$$x > y > 0 \quad \Delta 2 \quad (x-4)(y+4) = xy - 4y + 4x - 16$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy \quad \frac{x-4}{(x-4)x} + \frac{y-4}{(y+4)y} + \frac{3xy - 3(x-4)(y+4)}{xy(x-4)(y+4)} = 0$$

$$\frac{4}{x(x-4)} - \frac{4}{y(y+4)} + \frac{3(xy - 4y + 4x - 16)}{xy(x-4)(y+4)} = 0$$

$$\frac{4(y(y+4) - x(x-4))}{xy(x-4)(y+4)} + \frac{3(3y - 3x + 12)}{xy(x-4)(y+4)} = 0$$

$$\frac{y^2 + 4y - x^2 + 4x + 3y - 3x + 12}{xy(x-4)(y+4)} = 0 \Rightarrow y^2 + 7y - x^2 + x + 12 = 0$$

$$y^2 + 7y = (y^2 + 2 \cdot \frac{7}{2} y + \frac{49}{4}) - \frac{49}{4} = (y + \frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4}$$

$$-x^2 + x = -(x^2 - x) = -(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}$$

$$A = (y + \frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = (y + \frac{7}{2})^2 - (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{48}{4} = 12$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(y + \frac{x}{2})^2 = (x - \frac{1}{2})^2 \Rightarrow \begin{cases} y + \frac{x}{2} = x - \frac{1}{2} \\ y + \frac{x}{2} = \frac{1}{2} - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 4 = 0 \\ y + x = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4 \\ y = -2x \end{cases}$$

или $y + 3 > 0$
 $-x < 0$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (y+4)^3 - y^3 - 12y(y+4) = (y^3 + 3y^2 \cdot 4 + 3y \cdot 16 + 64) - y^3 - 12y^2 - 48y =$$

$$= 64 - \text{единственный вариант} - \text{допускается при } (5; 1)$$

$$k_1 = \frac{1}{5} + 1 + \frac{3}{5} = \frac{4}{5} + 1 = 1\frac{4}{5}$$

$$k_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = 1\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow M = 125 - 1 - 60 = 125 - 61 = 64 \text{ - верно}$$

(убедитесь
критерия)

$$(x)y \in \mathbb{R}^2$$

$\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} & \cos(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}) + \cos(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}) = \\ & = \cos(+1) \cos(-1) + \sin(+1) \sin(-1) + \\ & + \cos(+1) \cos(-1) - \sin(+1) \sin(-1) = \\ & = 2 \cos(\frac{a+b}{2}) \cdot \cos(\frac{a-b}{2}) \end{aligned}$$

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

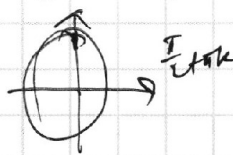
$$- \cos \pi y = \cos(\pi y - \pi x) \Rightarrow \cos(\pi y - \pi x) + \cos(2\pi y) = 0$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi y - \pi x + 2\pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi y - \pi y + \pi x}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi y - \pi x}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi y + \pi x}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi y + \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y - x = 1 + 2k \\ y + x = 1 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} 3y - x = 1 + 2k \\ y + x = 1 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x+1+2k}{3} \\ y = -x+1+2k \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \text{ - ответ к вопросу 9}$$





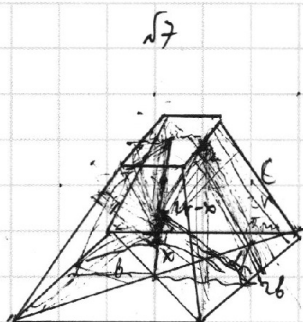
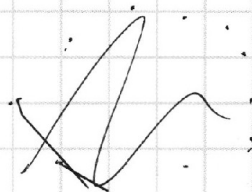
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

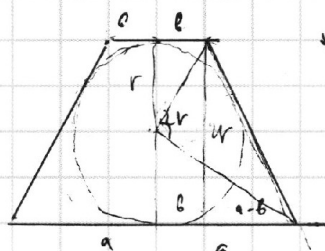
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Omega(R)$
 $\omega(r)$



$$h = 2r$$

$$\begin{aligned} c^2 &= \left(\frac{2r}{\sin \alpha}\right)^2 + (a-b)^2 = \frac{2 \cos \alpha + 1}{\sin^2 \alpha} \\ &= \left(\frac{2r}{\sin \alpha}\right)^2 + (2r \cos \alpha)^2 = (2r)^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \cos^2 \alpha\right) \\ &\quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \mid \cdot \sin^2 \alpha \\ 1 + \cos^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \end{aligned}$$



$$\frac{\sqrt{r^2 + b^2}}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

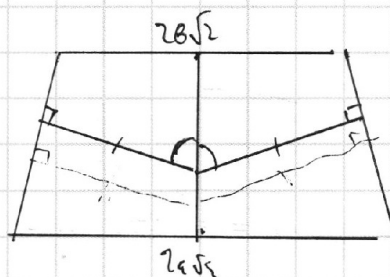
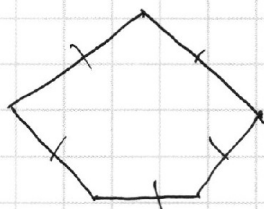
$$r = \frac{\sqrt{r^2 + b^2} \sqrt{r^2 + a^2}}{c}$$

$$c = \frac{\sqrt{r^2 + b^2} \sqrt{r^2 + a^2}}{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{2r}{\sin \alpha} &= \frac{\sqrt{r^2 + b^2} \sqrt{r^2 + a^2}}{r} \\ \sin \alpha &= \frac{2r^2}{\sqrt{r^2 + b^2} \sqrt{r^2 + a^2}} \end{aligned}$$

$$(2r)^2 + (a-b)^2 = \left(\frac{2r}{\sin \alpha}\right)^2 \Rightarrow (a-b)^2 = (2r)^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1\right) = (2r \cos \alpha)^2$$

$$\underline{a-b = 2r \cos \alpha}$$



$$R = \sqrt{b^2 + x^2}$$

$$R = \sqrt{a^2 + (2r-x)^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + x^2 - 4rx}$$

$$\Rightarrow b^2 + x^2 = a^2 + (2r-x)^2 \Rightarrow (2r-x)^2 = b^2 + x^2 - a^2$$

$$b^2 = a^2 + (2r)^2 - 4rx$$

$$4rx = \frac{(2r)^2 + a^2 - b^2}{4r}$$

$$\frac{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (2r-x)^2} \cdot \sqrt{(b\sqrt{2})^2 + x^2}}{2ax \cdot r\sqrt{2} \cdot \sqrt{2\cos^2 \alpha + 1}} = \sqrt{b^2 + x^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

56

Задача 1:

$$\begin{cases} (x+4\sqrt{3}m)(y-4\sqrt{3}m) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

— окружность с радиусом 6.

$$(1) \begin{cases} x+4\sqrt{3}m \leq 0 \\ y-4\sqrt{3}m \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+4\sqrt{3}m \geq 0 \\ y-4\sqrt{3}m \leq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \leq -4\sqrt{3}m \\ y \geq 4\sqrt{3}m \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -4\sqrt{3}m \\ y \leq 4\sqrt{3}m \end{cases}$$

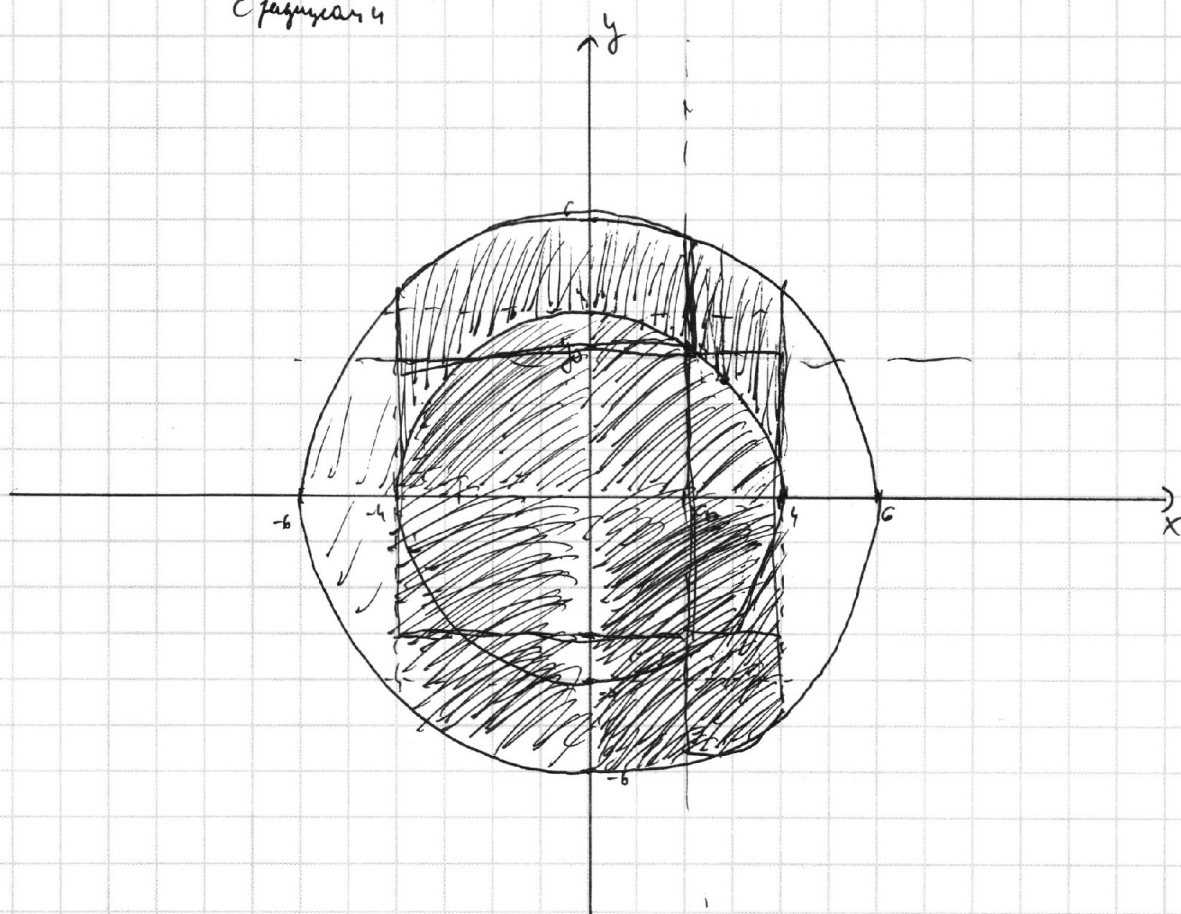
— симметрично

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \geq 16m^2 + 16m^2 = 16$$

— окружность с радиусом 4

$$\begin{cases} x \leq x_0 \\ y \geq y_0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq x_0 \\ y \leq y_0 \end{cases}$$

нанедем x_0 и y_0 на ось x и y соответственно



$$4) S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\beta + \gamma) = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12 \cdot \frac{3\sqrt{13}}{14} = \frac{99\sqrt{13}}{2} - \text{antwort}$$



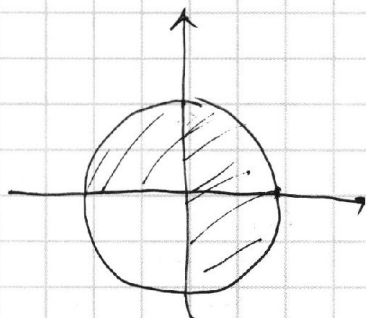
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8) \begin{cases} 3y - x = 1 + 2k \\ y + x = 1 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos\left(\frac{x}{7}\right) - \arccos\left(\frac{y}{4}\right) > -\frac{\pi}{2}$$



$$\arccos \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos \in [0, \pi] \quad (0+2) - \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2} > -\frac{\pi}{2}$$

⇒ единств. вариант не выполняются условия

$$\begin{cases} \arccos \neq 0 \\ \arccos \neq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{7} = \cos(0) \\ \frac{y}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{7} = 1 \\ \frac{y}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=4 \end{cases} \rightarrow \text{проверка на условия пункта а)}$$

$$\begin{cases} 12 - 7 = 1 + 2k \\ 11 = 1 + 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 1 + 2k \\ 10 = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=2 \\ k=5 \end{cases}$$

⇒ оба не подходят под условия пункта а ⇒ **1** - ответ к пункту б

√4

пусть одноклассники сидят в конце 1, 2.

C_x^4 - кол-во вариантов выбора 4 одноклассников

$$p_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{\frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}}{\frac{x!}{4!(x-4)!}} = \frac{(x-2)! \cdot 4!}{x! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4}{(x-1)x} = \frac{12}{x(x-1)}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi & \beta & \gamma & \delta & \epsilon & \zeta \end{matrix} \quad 4 \rightarrow y$$

$$p_2 = \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y} = \frac{\frac{(x-2)!}{(y-2)!(x-y)!}}{\frac{x!}{y!(x-y)!}} = \frac{(x-2)! \cdot y!}{x! \cdot (y-2)!} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$$