



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



✓ 1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

✓ 2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 3, а  $y$  — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 9xy$ .

✓ 3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

✓ 4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{16}{5}$ ,  $BP = 2$ ,  $AC = 4$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\boxed{n=1}$$

(A; B; C)

A · B · C ~~хорошее - потому что~~ квадрат nat. числа.

1) Рассмотрим число A. Оно сост. из одинаковых цифр, а значит делит праудрение 111...n, где n ∈ N и  $x \leq n$  начинает значение от 1 до 9.

$$A = 111 \cdot n = 101 \cdot 11 \cdot n$$

2) Так как праудрение A · B · C - ~~делит~~ квадрат, то числа B и C должны содержать множители

11, 101. ~~или~~ Так как A · B - трёхзначное, а C ~~делит~~ двухзначное, то  $B = x \cdot 101$ ,  $C = 11 \cdot y$ ,  $x, y \leq 9$ ,  
~~и~~  $x, y \in N$

3) Одна из цифр B - единица. Это возможно только когда  $x = 1$ .  $\Rightarrow$  Значит  $B = 101$ .

Одна из цифр C - 5.  $\Rightarrow$  Это возможно только при  $y = 5$ , т. е.  $C = 55$ .

4) Получаем, что праудрение  $A \cdot B \cdot C = 111 \cdot n \cdot \overbrace{(101 \cdot 11)}^{1111} \cdot 5$

$$\begin{aligned}\sqrt{A \cdot B \cdot C} \in N &\Rightarrow \sqrt{1111 \cdot n \cdot 101 \cdot 11 \cdot 5} \in N \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{1111 \cdot n \cdot 5} \in N \Rightarrow \sqrt{n = 5} \Rightarrow A = 5555.\end{aligned}$$

Ответ: (5555; 101; 55).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad | \cdot xy(x-3)(y+3)$$

$$(x-3)(y+3)(y+x+1) = xy(x-3+y+3+1)$$

$$(x-3)(y+3)(y+x+1) = xy(*y*x+1) \rightarrow \boxed{y = -x-1} \rightarrow \text{результат!!!}$$

$$\cancel{xy-3y+3x-9} = xy$$

$$\boxed{y = x-3}$$

- лишний множитель

$$\boxed{\begin{array}{l} y = -x-1 \\ y = x-3 \end{array}}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = \\ = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$$

Поставим вместо  $y = x-3$ :

$$(x-x+3)(x^2 + x^2 - 3x + x^2 - 6x + 9) - 9*(x^2 - 3x) =$$

$$= 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 27x = \boxed{27}$$

Теперь  $y = -x-1$ :

$$(x+x+1)(x^2 - x^2 - x + x^2 + 2x + 1) + 9(x^2 + 1)$$

Заметим, что по усл.  $x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow -x-1 < -1$

Однако тогда  $y = -x-1 < -1$ , но по усл.  $y > 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  противоречие. Такого быть не может.

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\boxed{n=3} \quad (x; y) \in \mathbb{R}$$

a)  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$

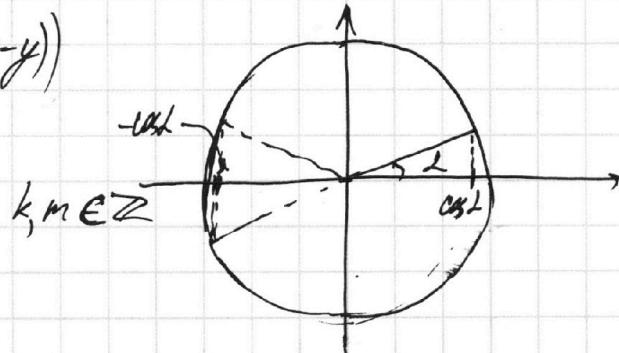
$$\frac{\cancel{\sin 2\pi x}}{2} - \frac{\sin \pi(x-y) - \cos \pi(x+y)}{2} = \frac{\cancel{\cos 2\pi x}}{2} + \frac{\cos \pi(x+y) + \cos \pi(x+y)}{2}$$

$$\cancel{\cos \pi(x+y)} - \cancel{\cos \pi(x-y)} = 2 \cos 2\pi x + \cos \pi(x-y) + \cos \pi(x+y)$$

$$2 \cos 2\pi x + 2 \cos \pi(x-y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2\pi x) = -\cos(\pi(x-y))$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi + \pi(x-y) + 2\pi k \\ 2\pi x = \pi - \pi(x-y) + 2\pi m \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2x = \cancel{\pi}x - y + 2k \\ 2x = 1 - x + y + 2m \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\begin{cases} y = 1 - x + 2k \\ y = 3x - 1 + 2n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}}$$

5)  $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

Замечаем, что  $\arccos \angle \in [0; \pi]$ , поэтому



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

негравенство может не выполняться в ej. случае:

$$\arccos \frac{x}{4} = \arccos \frac{y}{9} = \pi \quad (\text{если } x < 0) \Rightarrow \begin{cases} x + 4 \\ y = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{здесь} \\ \text{чт-бо} \\ \text{не вып.} \end{array}$$

Область определения  $\arccos x$ :

$$x \in [-1; 1] ; \quad \text{в нашем случае } \arccos x \neq \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow x \in (-1; 1]$$

Подставим значение  $x$  в  $\arccos$  из нашего нер-ва:

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 < \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 < \frac{y}{9} \leq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4 < x \leq 4 \\ -9 < y \leq 9 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -4 < x \leq 4 \\ -9 < 1-x+2k \leq 9 \\ -9 < 3x-1+2n \leq 9 \end{array} \right.$$

Проверим сколько пар для всех

целых  $x$  от  $-3$  до  $4$  выполнимо:

<u><math>x</math></u>	<u>Kол-во пар</u>
-3	$9+9=18$
-2	$9+9$
-1	18
0	18
1	18
2	18
3	18
4	18

Ответ: 144 пары.

$$\text{Всего: } 18 \cdot 8 = 80 + 64 = 144 \text{ пары}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 41

Пусть всего было  $n$  одиннадцатиклассников.

Вероятность, что Петя и Валя вместе идут на концерт ~~была~~ в начале месяца:

$$P_1 = \left( \frac{4}{n} \right) \cdot \left( \frac{3}{n-1} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{вер., что идёт} \\ \text{второй} \end{array}$$

$\downarrow$   
вер., что Петя  
идёт

Пусть в конце месяца оказалось, что было  $x$  билетов, причём  $x > 4$ . Тогда вероятность стала:

$$P_2 = \frac{x}{n} \cdot \frac{(x-1)}{(n-1)} ; \text{ по условию: } P_1 = \frac{P_2}{3,5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2 = 3,5 P_1$$

$$\text{Подставим } P_1 \text{ и } P_2: \quad \frac{x(x-1)}{n(n-1)} = 3,5 \cancel{\frac{x^2 - 4 \cdot 3}{n(n-1)}} \quad \left| \begin{array}{l} n > 2 \\ n(n-1) \end{array} \right.$$

$$x^2 - x = 42 \quad ( \Rightarrow x^2 - x - 42 = 0 )$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ x = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} 7 \text{ билетов было} \\ \text{выдано на концерт.} \\ \text{в конце месяца.} \end{array}$$

Ответ: 7.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n=6)$$

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 9 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим нер-во (2).

Уравнение  $x^2 + y^2 = 9$  —

окружность с центром

в т.  $(0; 0)$ , радиусом 3, а

$x^2 + y^2 \leq 9$  — внутр. область

этой окружности.

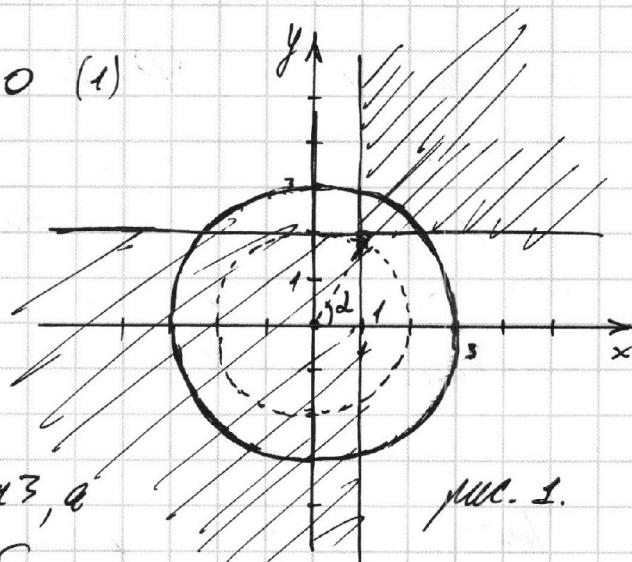


рис. 1.

Теперь рассмотрим (1).

Пусть  $\Phi$  есть т.  $O'(2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha)$ ,

точка в декарт. коорд., где

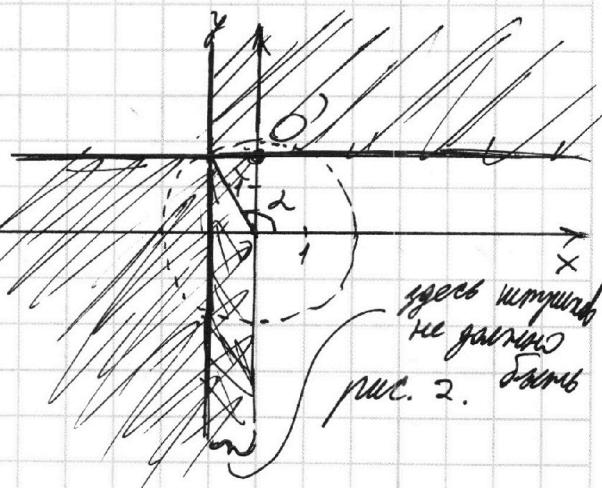
$O'$  — центр:

$$x' = x - 2 \cos \alpha$$

$$y' = y - 2 \sin \alpha$$

(1):  $x'y' \geq 0 \Rightarrow x' \text{ и } y' \text{ либо имеют одинаковый}$   
 $\text{знак, либо} \rightarrow \text{затемняются}, \text{ т.е. } x'y' \geq 0 \text{ — область}$   
 $\text{пр-ва в 1-ой и 3-й четвертих новой декарт.}$   
 $\text{коорд. (см. рис. 2.)}$  (в исх. шт. коорд.)

При этом точка  $O'$   $\rightarrow$  принадлежит окружности радиусом 2 с центром в т.  $O$ .



здесь штрихи  
не должны  
быть

рис. 2. быть



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь можно понять, как выглядят фигура  $\Phi(\lambda)$ .

Это две части окр. радиусом 3, ограниченные двумя окр. линиями, пересекающимися в  $O'(2 \cos \lambda; 2 \sin \lambda)$

Периметр этой фигуры складывается из длины дуг окружностей и длины отрезков, параллельных координатным осям.

Значит, что сумма длин дуг окр. остаётся постоянной и равной половине длины окружности. Остается посчитать длину отрезков. Введём углы  $\beta$  и  $\gamma$ . Можно записать:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \cos \lambda &= 3 \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{2}{3} \cos \lambda \\ 2 \cdot \sin \lambda &= 3 \cdot \sin \beta \Rightarrow \sin \beta = \frac{2}{3} \sin \lambda \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \lambda}$$
 ~~$\Rightarrow \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \lambda}$~~

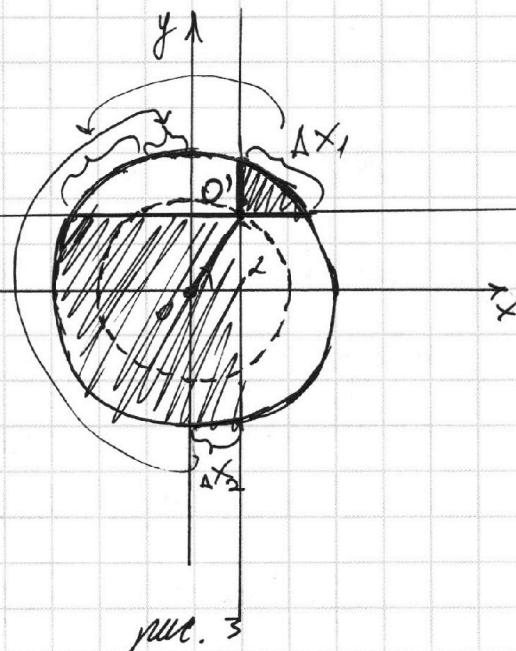


рис. 3

Сумма длин, полученных нами:

$$M_1 = 2 \cdot 3 \sin \beta + 2 \cdot 3 \cos \beta$$

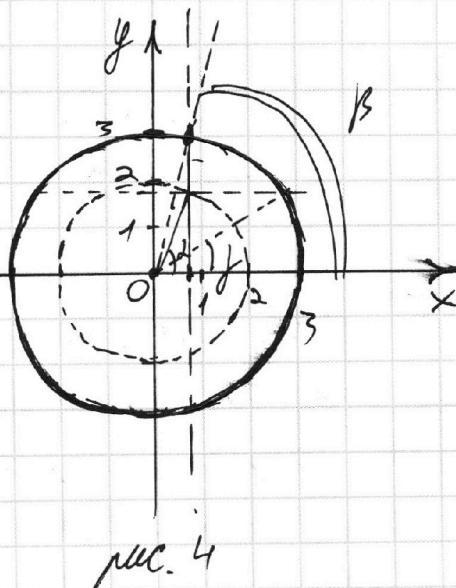


рис. 4



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M_1 = 2 \cdot 3 \left( \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha} + \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha} \right)$$

взяли производную:

$$\frac{dM_1}{d\alpha} = 6 \cdot \left( \frac{2 \cos \alpha \cdot -\sin \alpha}{2 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha}} + \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha} = 2 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \pm \cos \alpha - \text{ в нашем случае это всегда максимумы} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k}$$

$$\frac{1}{2} \times \text{Длина окр: } M_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 3 = 3\pi$$

$$M_1 = 2 \cdot 3 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = 4\sqrt{2}$$

Общий периметр:

$$\boxed{M = 4\sqrt{2} + 3\pi}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\begin{array}{r} 3 \quad 5 \quad 7 \\ 11 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1111 \\ 11 \\ \hline 1111 \\ -11 \\ \hline 011 \\ -11 \\ \hline 01 \\ -11 \\ \hline 0 \end{array}$

A:  $x \cdot 1111 = x \cdot 11 \cdot 101$

B:  $\cos \alpha = \frac{x}{2}$

C:  $\cos \beta = \frac{x}{3}$

$\Rightarrow \cos \beta = \frac{2}{3} \cos \alpha$

$k = \frac{y}{x}$        $\sin \alpha = \frac{2}{3} \sin \beta$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

$R = \sqrt{1 - 2\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 1 - 2\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}$

$\Rightarrow b = a + b$

$\Rightarrow \frac{z}{b} = \frac{a+b+z}{a} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow z \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = \frac{a+b}{a} \Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow z = \frac{a+b}{ab} = \frac{a+b}{ab}$

$R = \sin \alpha R$

$R = \cos \alpha R$

$\sin \alpha = \frac{z}{\sqrt{2}}$

$\sin \beta = \frac{z}{\sqrt{3}}$

$\sin \gamma = \frac{2}{3} \sin \alpha$

$\cos \beta = \frac{2}{3} \cos \alpha$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

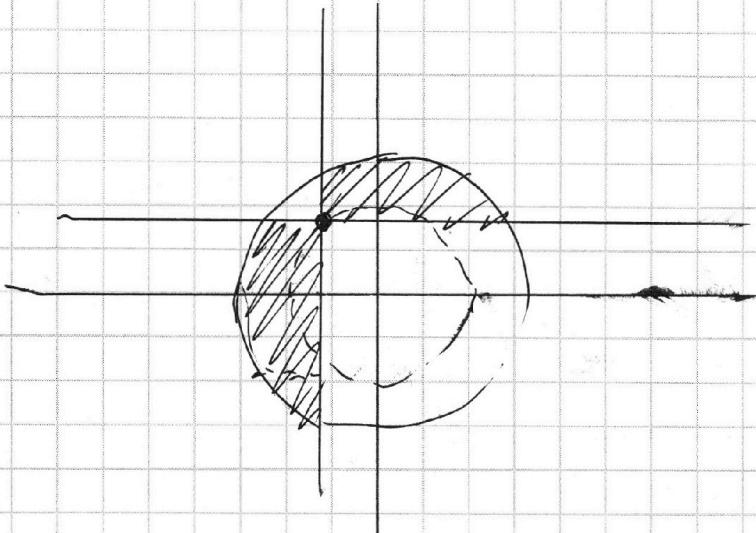
5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A —————  $\overbrace{\quad \quad \quad}^{n=3}$

B —————

C ————— 5 ————— —5  $\overbrace{\quad \quad \quad}^{n=4}$

$n=2$ .  $x, y > 0$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

B; D; n 11 кв.

4; >4

A  $\rightarrow$  3,5 A

$\overbrace{\quad \quad \quad}^{n=3}$

Наряду кес:

$$\Delta \approx P = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$$

$$P_1 = 3,5 P = \frac{x}{n} \cdot \frac{(x-1)}{n-1}$$

$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$

a)  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$

$$\frac{1 - \cos 2\pi x}{2} - \frac{(\cos \pi(x-y) - \cos \pi(x+y))}{2} = \frac{1 + \cos 2\pi x}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} < 2\pi$$

$$\arccos \frac{x}{4} \neq \arccos \frac{y}{3}$$

$$\arccos \frac{y}{3} \neq \pi$$

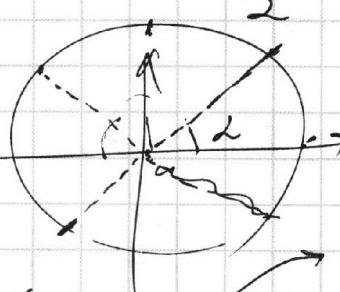
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x$$

$$\sin(x+y) = \sin x$$



$$\frac{x}{4} \neq -1$$

$$\frac{y}{3} \neq \pi$$

$$\sin x \sin y \cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\cos(x+y) + \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin x \cos y - \cos x \sin y$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

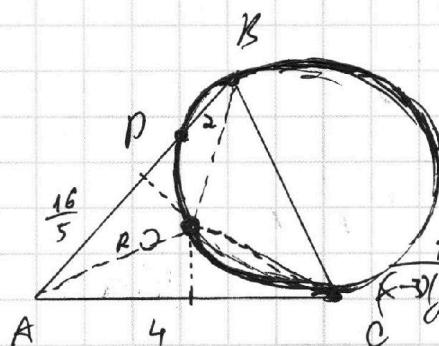
$$-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$-9 < y \leq 9$$

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

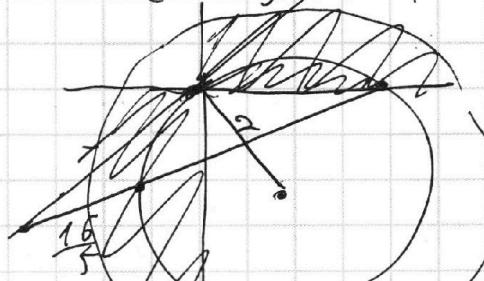
$$\cos \beta = \frac{2}{3} \cos \alpha$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha}$$



$$-9 < 1-x+2k \leq 9$$

$$-9 < 3x-1+2n \leq 9$$



$$\frac{2\beta}{5} \cdot \frac{16}{5} \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \right|$$

$$2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}$$

$$y(x-3)(y+3) + x(x-3)(y+3) + (x-3)(y+3) = xy(y+3) + xy(x-3) + xy$$

$$(x-3)(y+3)(y+x+1) = xy(y+x+x-3+y+1)$$

$$xy - 3y + 3x - 9 = xy$$

$$y \neq -x-1$$

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$$

$$(x-x+3)(x^2 + x^2 - 3x + x^2 - 6x + 9) - 9(x^2 - 3x)$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$y = x - 3$$

$$x(y-2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

