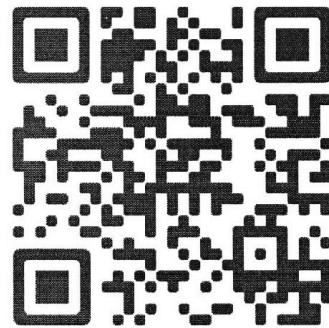


МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$
Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A : aaaa = a \cdot 1111 = a \cdot 101 \cdot 11 \quad (1) \quad (101 \text{ и } 11 - \text{простые} \\ \text{не } 2, 3, 5, 7 (\text{так как } \sqrt{101}))$$

B: --- есть цифра 1 (2)

C: -- есть цифра 5 (3)

A, B, C - квадрат ^{натур. ч.} (4)

- $A = a \cdot 101 \cdot 11$, причём 11 и 101, простые, значит встреч. в виде множителей в B и C для выполн. (4)
- B с двумя 1. \Rightarrow не может содерж. множитель 101, тогда же его содержит $B = B \cdot 101$; но при $B \in [1; 9]$ это число записывается как ~~Без~~ ^{как} цифра 0
- $B = \overline{B0B}$ есть 1 по условию, $\Rightarrow B=1$; $B = \cancel{1} 101$
- $B \neq 11 \Rightarrow C = 11$; $C = C \cdot 11$, запис. \overline{CC} , однако ~~это~~ запись не 16

$$A = a \cdot 101 \cdot 11$$

$$ABC = a \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5 - \text{квадрат нат. числа}$$

$$B = 101$$

$$C = 55 = 5 \cdot 11$$

$\Rightarrow a \cdot 5$ - квадрат. при $a \in [1; 9]$ единств. ~~решение~~ ^{решение} $a = 5 \Rightarrow A = 5555$

Ответ: ~~(5555; 101; 55)~~.

Ответ: ~~(5555; 101; 55)~~.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{(y+3)} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} ; \quad \begin{array}{l} x \neq 3; \quad x, y > 0 \\ \text{иначе} \\ \text{неопр.} \end{array}$$

при $x+y \geq 9$ к общ. знаменателю: $xy(x-3)(y+3)$ $M = x^3y^3 - 9xy = ?$

$$y(x-3)(y+3) + x(x-3)(y+3) + (x-3)(y+3) = xy(y+3) + xy(x-3) + xy;$$

$$(y+x+1)(x-3)(y+3) = xy(y+3 + (x-3) + 1);$$

$$(y+x+1)(x-3)(y+3) = xy(y+x+1);$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+x+1=0 \text{ невозможно, т.к. } y > 0 \text{ и } x > 0 \Rightarrow x+y+1 > 0 \\ (x-3)(y+3)=xy \text{ тогда } -9+xy-3y+3x=xy \end{cases}$$

$$3x=3y+9$$

$$x=y+3. \text{ подставляем в } M:$$

$$M = \underbrace{(y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y}_{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)} = (y+3-y)((y+3)^2 + y(y+3) + y^2) - 9y^2 - 27y$$

$$= 3 \cdot \underbrace{(y^2 + 6y + 9 + y^2 + 3y + y^2)}_{3y^2 + 9y + 9} - 9y^2 - 27y = 9y^2 + 24y + 27 - 9y^2 - 27y = 27$$

$$(x=y+3 \text{ получено равнос. преобр.} \Rightarrow \text{нет других знач.)})$$

Ответ: 27.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \sqrt{2}x (\sin \sqrt{2}x - \sin \sqrt{2}y) = \cos(\sqrt{2}x) \cdot (\cos \sqrt{2}x + \cos \sqrt{2}y), \quad x, y - \text{действ.}$$

но 0-ле $\sin x - \sin y$

$$\sin \sqrt{2}x \cdot \cancel{\sin \frac{\sqrt{2}x - \sqrt{2}y}{2}} \cos \cancel{\frac{\sqrt{2}x + \sqrt{2}y}{2}} = \cos \sqrt{2}x \cdot \cancel{1} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}x + \sqrt{2}y}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}x - \sqrt{2}y}{2};$$

$$\cos \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \right) = 0 \quad (1)$$

$$\sin \sqrt{2}x \cdot \sin \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \right) = \cos \sqrt{2}x \cdot \cos \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \right) \quad (2);$$

но 0-ле $\sin x + \sin y$

(2):

$$\cos \left(\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right) * -\cos \left(\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \right) = \frac{\cos \left(\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right) + \cos \left(\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right)}{2}$$

$$-\cos \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \right), \quad 2\cos \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(3x-y) \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(3x-y) \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \right) = 0 \quad (1), \quad (2) : \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(3x-y) \right) = 0 \quad (2); \quad x+y = 2n+1; \quad y = 2n+1-x.$$

Вывод:

$$(c; 2n+1-c), \quad c \in \mathbb{R}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) : \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(3x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3x-y = 2k+1;$$

$$y = 3x-2k+1;$$

$$\text{Вывод: } (d; 3d-2k+1); \quad d \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(любые числа, удовл. этим условиям - решения)

$$\delta) \arccos \left(\frac{x}{4} \right) + \arccos \left(\frac{y}{9} \right) < 2\sqrt{2}; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$x \in [-4, 4]; \quad y \in [-9, 9]. \quad \arccos \left(\frac{x}{4} \right) \in [0, \sqrt{2}]; \quad \arccos \left(\frac{y}{9} \right) \in [0, \sqrt{2}].$$

Чтобы не выполнять, нужно, чтобы $\arccos \left(\frac{x}{4} \right) = \sqrt{2}$ и $\arccos \left(\frac{y}{9} \right) = \sqrt{2}$
(т.к. слева $\leq 2\sqrt{2}$, а справа $2\sqrt{2}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{4} = -1 \\ \frac{y}{9} = -1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -4 \\ y = -9 \end{array} \right. \quad \begin{matrix} \text{- единств. пара, где} \\ \text{второй не выполняется.} \end{matrix}$$

переберу, сколько y подходит к каждому x

(среди x $\in [-4, 4]$ и $y \in [-9, 9]$)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

перед. ноги. пары

$$(2n+1-x)$$

$$(4 \cdot 3x+1-2k)$$

$$h, k \in \mathbb{Z}$$

у из 1 серии		у из 2 серии	
-4	$2h+5: [-9; 9]$ кроме -9 (пары ноги)	$-2k-11: [-9; 9]$ т.к. не 10 знач.	$\} \Rightarrow$ задач. 9 знач.
-3	$4h+2n+4$ $[-8; 8] \Rightarrow$ 9 знач. $(\frac{8-(-8)}{2}+1=9)$ $\{-8; -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8\}$	$-8n-2k$	

• заметим, что обе серии имеют одинак. чётность $(3x+1-x)$, а также одинак. периодичность $(2h+2k)$,
 $h, k \in \mathbb{Z}$
знач. пары из обеих серий совп.

• заметим, что в зав-сти от чётности x есть либо $y \in [-9; 9] \Rightarrow 10$ знач.,
либо $y \in [-8; 8] \Rightarrow 9$ знач. y

тогда gilt $x \in [-4; 4]$ будет всего $10 + 9 + 10 + 9 + 10 + 9 + 10 + 9 + 10 = 85$ значений

$$-\frac{1}{2} \underset{R}{=} 85 \text{ значений}$$

$$\begin{aligned} &\text{для } d=16, \text{ использ. формуле:} \\ &\sin(d\alpha - \sin\beta) = 2 \sin \frac{d-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}, \\ &\cos(d\alpha + \cos\beta) = 2 \cos \frac{d+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}, \\ &\sin(d\alpha + \sin\beta) = \frac{\cos(d\alpha - \cos\beta) - \cos(d\alpha + \sin\beta)}{2}, \quad \cos(d\alpha \cos\beta) = \frac{\cos(d\alpha - \sin\beta) + \cos(d\alpha + \cos\beta)}{2} \end{aligned}$$

Ответ: a) $(c, 2n+1-c)$, $c \in R$, $n \in \mathbb{Z}$; b) $(d; 3d-2k+1)$, $d \in R$, $k \in \mathbb{Z}$,

85.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

пусть x - ^{новое} кол-во билетов, n - количество учеников
 т.к. исходов ^{$x \geq 4$} равно вер., $P(\text{вероятность}) = \frac{\text{кол-во благопр. распред. билетов}}{\text{кол-во всевозможн. распред.}}$

• В начале месяца:

Всего исходов - C_n^4 (4 билета на n человек)

множак: C_{n-2}^{4-2} (2 билета достались Дете и Васе, распред. оставшие)

$$P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = \left(\cancel{\frac{2!}{4!}} \cdot \frac{1}{n(n-1)} \right) \cdot \frac{24}{2} = \frac{12}{n(n-1)} = P_1$$

• В конце месяца: $P = \frac{C_{n-2}^{x+1}}{C_n^{x+1}} = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} = \frac{\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}}{\frac{n!}{x!(n-x)!}} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)} = P_2$

но усл.: $\frac{P_2}{P_1} = 3,5$; $\frac{x(x-1)}{\cancel{\frac{12}{n(n-1)}}} = \frac{7}{2}$; $x(x-1) = \frac{7}{2} \cdot 12 = 42$;

$$x^2 - x - 42 = 0;$$

$$(x-7)(x+6) = 0.$$

$x = \begin{cases} 7 \\ -6 \end{cases}$ ² возможн. невозможно

Ответ: 7



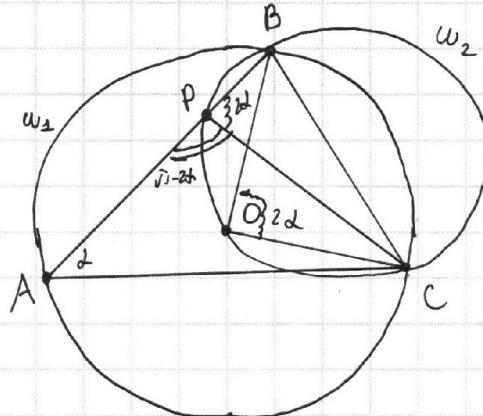
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

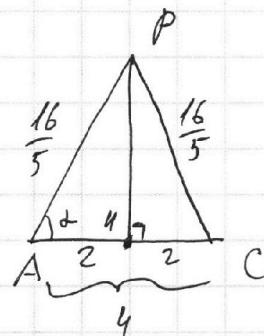
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AP = \frac{16}{5}; PB = 2; AC = 4$$



4) *pacch. s APC*:



$$= \sqrt{\left(\frac{16-10}{5}\right)\left(\frac{16+10}{5}\right)} = \sqrt{\frac{2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 3}{5^2}} = \frac{2}{5} \sqrt{39}.$$

$$\sin \angle = \frac{\frac{2}{5}\sqrt{39}}{\frac{16}{5}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

(пробег. РН - бензин + о газ б. регулятор)

$$\Delta h = hc = \frac{g}{2} = 2$$

$$\cancel{F_{\text{mgg}} \cdot \sin \alpha} = \frac{p_h}{AP}$$

$$PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 - 2^2}$$

$$A_C = 4$$

(пробег. РН - бензин + о газ б. регулятор)

$$\Delta h = hc = \frac{g}{2} = 2$$

$$\cancel{F_{\text{mgg}} \cdot \sin \alpha} = \frac{p_h}{AP}$$

$$PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 - 2^2}$$

$$5) \text{ в } ABC: S = \frac{BA \cdot AC \cdot \sin \angle BAC}{2} = \left(\frac{16}{5} + 2\right) \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$= \frac{26 \cdot 4 \cdot \sqrt{39}}{5 \cdot 2 \cdot 8} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

$$\text{Ober: } \frac{13\sqrt{39}}{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

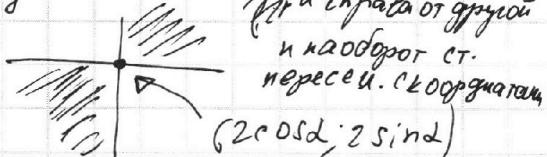
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0 \quad (1); \\ x^2 + y^2 \leq 9 \quad (2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \cos \alpha \\ y \geq 2 \sin \alpha \\ x \leq 2 \cos \alpha \\ y \leq 2 \sin \alpha \end{cases}$$

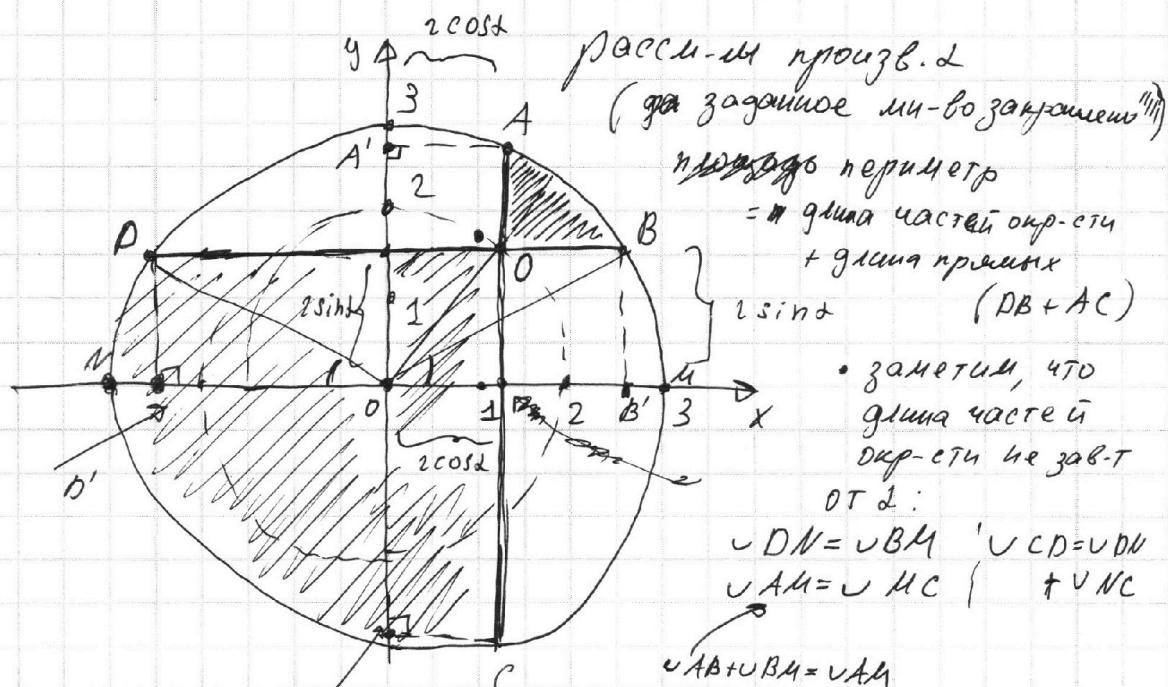
при фикс. α (1) задает на α угл. 1-сту x, y 2 области: выше одной прямой

ниже другой от другой и наоборот ст. пересеч. координат



- заметим, что на-бо точек, за-все. от 2 скоорд.-ши $(2 \cos \alpha; 2 \sin \alpha)$ - окр-сть радиуса 2 (из опре. $\sin \alpha \cos \alpha$)

(2) задает на-бо точек, лежащих вну-гра окр-сти радиуса $R=3$ с центром в т. $(0; 0)$.



расши-ши произв. 2
(за заданное ми-во замкнувш.)

на-бога периметр
= длина частей окр-сти
+ длина прямых

$$(DB + AC)$$

заметим, что
длина частей
окр-сти не зав-т
от α :

$$\begin{aligned} \cup DN = \cup BM & \quad \cup CD = \cup BN \\ \cup AM = \cup MC & \quad + \cup NC \end{aligned}$$

$$\cup AB + \cup BC = \cup AC$$

получаем, что $\cup DC + \cup AB$
 $= \cup NC + \cup AC = \pi$ где π -



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

таким образом, периметр $M = DB + AC + \text{[глубина прямых]}$

$$\begin{array}{c} 3 \\ \curvearrowleft \\ \text{const} \end{array}$$

$$DB + AC = D'B' + C'A' \quad (\text{нарис.}) = \sqrt{R^2 - 4\sin^2 \alpha} + 2\sqrt{R^2 - 4\cos^2 \alpha}$$

(по теор. Пифагора) \Rightarrow если $x = 2\sin \alpha; x \in [-2; +2];$

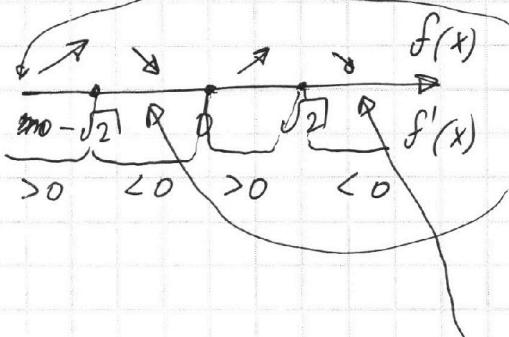
$$R = 3 \quad 4\sin^2 \alpha = x^2; 4\cos^2 \alpha = 4 - x^2;$$

$$\text{тогда глубина прямых (далее } f(x)) = 2\sqrt{9 - x^2} + 2\sqrt{5 + x^2}$$

$$f(x) = 2\sqrt{9 - x^2} + 2\sqrt{5 + x^2}; \frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} \cdot -2x + \frac{1}{\sqrt{5 + x^2}} \cdot 2x$$

$$= 2x \left(\frac{1}{\sqrt{5+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \right) \text{ иском производная: } x=0 \quad \sqrt{9-x^2} = \sqrt{5+x^2}$$

$$\begin{aligned} 9 - x^2 &= 5 + x^2; \\ 2x^2 &= 4 \\ x &= \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$



$$f'(0) = -4 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) > 0$$

$$f'(-\sqrt{2}) = -2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} \right) < 0$$

$$f'(0) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} \right) > 0$$

$$f'(\sqrt{2}) = 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) < 0$$

$$f(x)_{\max} \text{ при } x = \pm \sqrt{2} \quad \text{тогда } f(x) = \text{тогда } f(x) = 4\sqrt{4}$$

$$\text{т.о. произв. при } 2\sin \alpha = \pm \sqrt{2} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left(2 \cdot \sqrt{9-2} + 2 \cdot \sqrt{5+2} \right)$$

$$M(x)_{\max} = \pi \cdot 3 + 4\sqrt{4}, \text{ достигается при } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } 3\pi + 4\sqrt{4}. \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

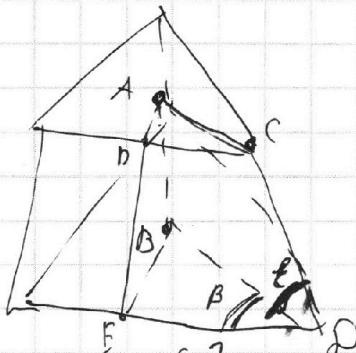
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

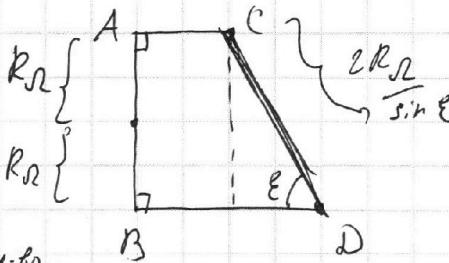


пра в. усн. призмы \Rightarrow в основах гр. в. n -угольники, их центры лежат на одной прямой

и их центры перпендикулярны им



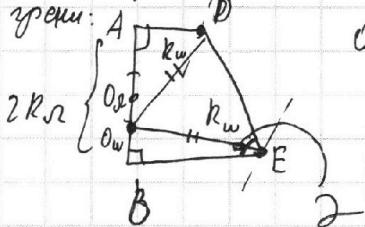
рассмотрим сечение, перпендикулярное и проходящее через центр и вершину одного из углов



э-угол между обр пл-стн
 $c\beta = \frac{180(n-2)}{2n}$, n -кол-во
секущих, перпендикулярных

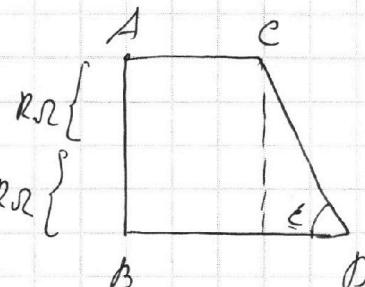
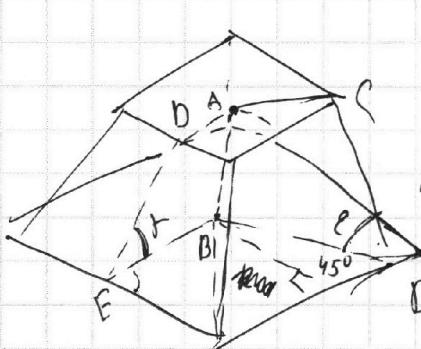
$$\cos \epsilon = \cos CDB \cdot \cos \beta;$$

но теор. о тр. cos



он равногл. от D и E, т.к.
насажены прямых через эти
т. перпендикулярных им

если $n=4$:



$$CD \sin \epsilon = 2Rn$$

$$= DE \cdot \sin \gamma$$

$$\cos \gamma \cdot \cos 45^\circ = \cos \epsilon;$$

$$\cos \gamma = \sqrt{2} \cos \epsilon$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A \quad aaaa = a \cdot 1111$$

~~$B \quad \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{1}$~~

~~$C \quad \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{1}$~~

$$a \cdot 11 \cdot 101$$

$$a \cdot 11 \cdot 101$$

$$55$$

$$101$$

$$1111: * 11 \cdot 101$$

Б В или С есть 51 число

В С не может быть 101,

$$\Rightarrow B = 8 \cdot 101, \text{ но } 8 \text{ не } 1 \Rightarrow$$

~~$8 \cdot 11 - 3 = 93.$~~

$$B = 101$$

~~$14 - 3 = 51$~~

~~$19 - 5 = 14$~~

$$a \cdot 5 - \text{ноль. кв-т}$$

$$(a=5)$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}, \quad x, y > 0;$$

$$M = x^3 y^3 - 9xy$$

~~$= -x(x^2 - 3y)$~~

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}; \quad (\rightarrow xy(x-3)(y+3))$$

$$y(x-3)(y+3) + x(x-3)(y+3) + (x-3)(y+3) = xy(y+3) + xy(x-3) + xy;$$

$$(x+y+1)(x-3)(y+3) = xy(y+3 + x-3 + 1);$$

~~$\Leftrightarrow x+y+1 = 0 \quad x$~~

$$(x-3)(y+3) = xy; \quad xy - 3y + 3x - 9 = 0; \quad \begin{cases} x = y+3 \\ xy = xy \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M &= (y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3) = (y+3-y)\left((y+3)^2 + (y+3)y + y^2\right) - 9y(y+3) \\ &= 3(y^2 + 6y + 9 + y^2 + 3y + y^2) - 9y^2 - 24y; \\ &= 9y^2 + 24y + 24 - 9y^2 - 24y = 24 \end{aligned}$$

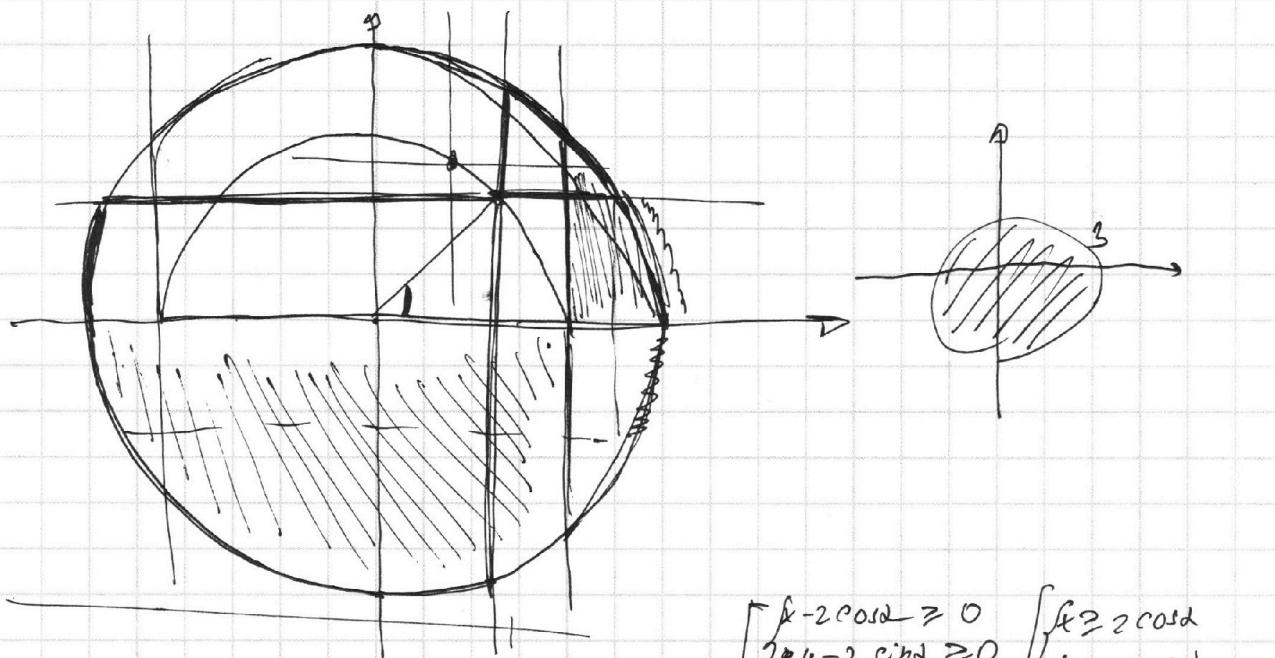
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

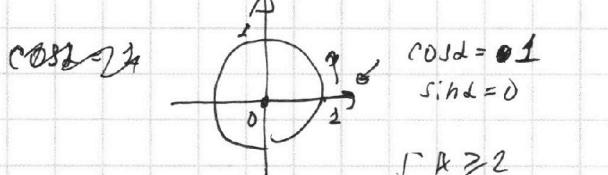
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0; \\ x^2 + y^2 \leq r^2; \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \sin\alpha = 1, \quad \cos\alpha = 0$$

$$\begin{cases} x - 2\cos\alpha \geq 0 \\ y - 2\sin\alpha \geq 0 \\ x - 2\cos\alpha \leq 0 \\ y - 2\sin\alpha \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 0 \\ x \leq 2 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$\cos\alpha$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

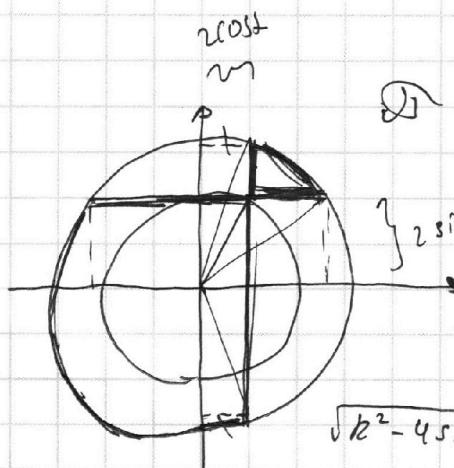
$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - 4\sin^2\alpha}} \cdot -4$$

$$2\sqrt{R^2 - 4\cos^2\alpha}$$

$$2\sin\alpha + 2\sqrt{R^2 - 4\sin^2\alpha}$$

$$\left(\sqrt{R^2 - 4\cos^2\alpha} + \sqrt{R^2 - 4\sin^2\alpha} \right)$$

$$\sqrt{R^2 - 4\sin^2\alpha} \times \sqrt{R^2 - 4\cos^2\alpha} \rightarrow \max$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

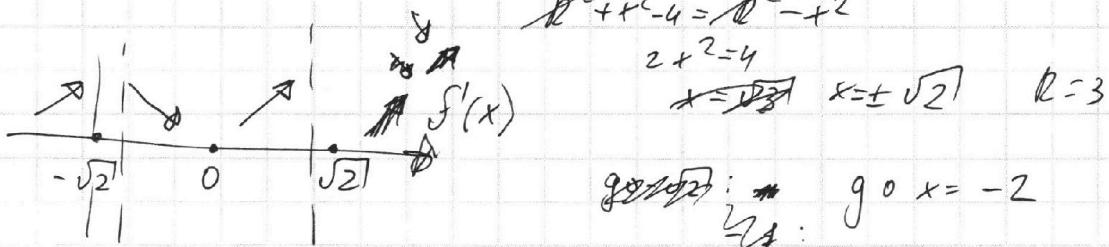
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{R^2 - 4 \sin^2 \alpha} + \sqrt{R^2 + 4 \sin^2 \alpha - 4} \quad 2 \sin \alpha = x \quad x \in [-1; 1],$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot -2x + \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2 - 4}} \cdot 2x; = 2x \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2 - 4}} \right)$$

$$\frac{d}{dx} = 0; \text{ либо } 2x = 0, \text{ либо } \sqrt{R^2 + x^2 - 4} = \sqrt{R^2 - x^2}$$



$$R^2 + x^2 - 4 = R^2 - x^2 \\ 2x^2 = 4 \\ x = \pm \sqrt{2} \quad R = 3$$

здесь: $x = -2$

$$0 \quad -2 \quad 1$$

$$-2 \sqrt{\frac{1}{\sqrt{9+4-4}} - \frac{1}{\sqrt{9-4}}}$$

$$= -2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) > 0$$

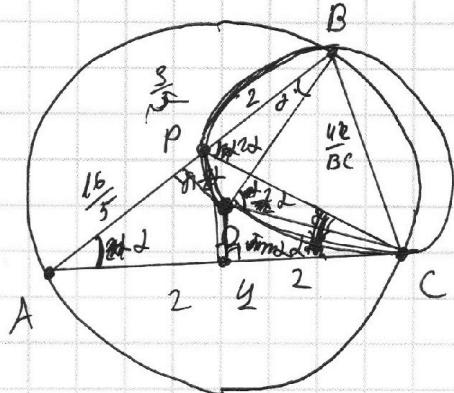


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер залачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S = \frac{AB \cdot BC \cdot AC \cdot \sin 2x}{2}$$

$$= \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$$

$$\sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 - (2)^2} = \sqrt{\frac{6}{5} \cdot \frac{26}{5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 13}{5^2}} = \frac{2}{5} \sqrt{39}$$

дано: окр. w_2 (P -ие случ. 1.)

$$OP^2 = BC$$

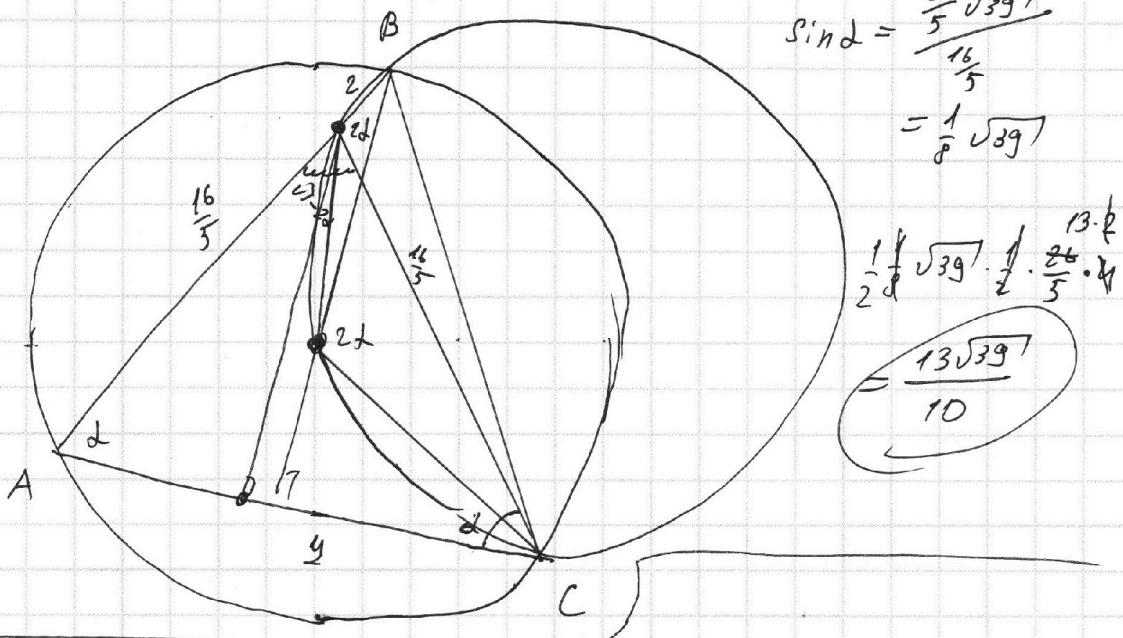
$$S = \frac{a \cdot BC}{4R}; BC = \frac{4R}{AB \cdot AC}$$

$$2R = \frac{BC}{\sin 2x}; BC = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$2R = \frac{BC}{\sin 2x}; \sin 2x = BC / 2R$$

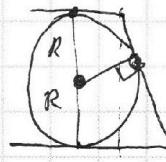
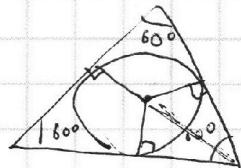
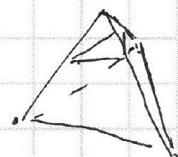
$$\sin 2x = \frac{\frac{2}{5} \sqrt{39}}{\frac{16}{5}}$$

$$= \frac{1}{8} \sqrt{39}$$



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \sqrt{39} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{5} \cdot \frac{13}{2}$$

$$= \frac{13\sqrt{39}}{10}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \sqrt{2}x (\sin \sqrt{2}x - \sin \sqrt{2}y) = \cos(\alpha) \cos \sqrt{2}x (\cos \sqrt{2}x + \cos \sqrt{2}y).$$

$$\underbrace{\sin(\alpha+\beta)}_{f} - \underbrace{\sin(\alpha-\beta)}_{g} = 2 \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

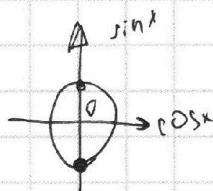
$$\cos \frac{\alpha}{2} (\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin \sqrt{2}x \sin \frac{\sqrt{2}x - \sqrt{2}y}{2} = \cos \sqrt{2}x \cos \frac{\sqrt{2}x - \sqrt{2}y}{2},$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{2}$$



у ; четверть 4 + x

н

P винчестер

C_n^k

$$P = \frac{\text{число кор.}}{\text{Все}} = \frac{C_n^k}{C_n^{k+1}}$$

8 1 2 3

$$C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!}$$

