

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1

Число A представим как: $A = 11 \cdot 101 \cdot x^*$
 Заметим, что, поскольку ABC — квадрат целого четырехзначного числа, либо B , либо C должны содержать 101 как множитель. Это же может быть C , так как это единственный делитель 101, либо B . Из всех трехзначных чисел, делящихся на 101, получим (101; 202; 303; 404; 505; 606; 707; 808; 909), только одно содержит цифру 1 — это число 101. Значит, $B = 101$. 101 не делится на 11, значит, либо ABC было квадратом, либо C должен делиться на 11. Из всех четырехзначных чисел, делящихся на 11 (11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99), только одно содержит цифру 5 — это число 55. Значит, $C = 55$. Тогда $ABC = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 5x$. Чтобы это было квадратом, $5x$ должно быть квадратом, три $1 < x < 9$ единственная квадрат — 25 при $x = 5$.
 Тогда $A = 5555$

Ответ: (5555; 101; 55)

*: $1 < x < 9$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

 $\checkmark 2$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy}$$

$$K^* = \frac{(x-3) + (y+3) + 7}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+7}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+7}{(x-3)(y+3)}$$

$$\begin{cases} x \neq 0; x \neq 3 \\ y \neq 0; y \neq -3 \\ x+y+1=0 \\ xy = (x-3)(y+3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0; x \neq 3 \\ y \neq 0; y \neq -3 \\ y = -x-1 \quad (1) \\ y = x-3 \quad (2) \end{cases}$$

При $x > 0$: y в (1) будет отрицательна, что противоречит условию задачи.
 При $y > 0$: x в (2) будет больше нуля, откуда следут равенства всех коэффициентов в системе. Тогда образуется, она сводится к:

$$\begin{cases} x > 3 \\ y = x-3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M &= x^2 - y^2 - 8xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 8xy = \\ &= (x-x+3)(x^2 + x(x-3) + (x-3)^2) - 8x(x-3) = \\ &= 3(3x^2 - 8x + 8) - 8x^2 + 27x = 9x^2 - 27x + 27 - \\ &- 8x^2 + 27x = \boxed{27} - \text{Ostler} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
7 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

✓ 3

$$\begin{aligned} \text{a)} (\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \sin \pi x &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\ 2 \sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \sin \pi x &= 2 \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \cos \pi x \\ \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) (\sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \sin \pi x - \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \cos \pi x) &= 0 \\ \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) (\cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) + \cos \pi x) &= 0 \\ \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k, 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k, 0 \end{cases} \quad \leftarrow \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 + 2k \\ 3x - y = 1 + 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 1 + 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ y = 3x - 1 - 2k \end{cases}$$

δ) Ограничения: $-4 \leq x \leq 4$
 $-8 \leq y \leq 8$

Заметим, что $\arccos\left(\frac{x}{4}\right) + \arccos\left(\frac{y}{8}\right) < 2\pi$ выполняется при любых x и y (с учётом ограничений), кроме случаев, когда $x = -4$ и $y = -8$. Также заметим, что при фиксированием x $y = -x + 1 + 2k$ и $y = 3x - 1 - 2k$ дают в конечные решениях чётное число решений (если x - чётное) или чётное число решений (если x - нечётное). Вспомогательная эпика при переделе:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

x	y	η
-4	-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9	9
-3	-8, -6, -4, 2 , 0, 2, 4, 6, 8	2 9
-2	-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9	10
-1	-8 -6 -4 2 , 0 2 4 6 8	2 9
0	-9 -7 -5 -3 -1 1 3 5 7 9	10
1	-8 -6 -4 2 , 0 2 4 6 8	2 9
2	-9 -7 -5 -3 -1 1 3 5 7 9	10
3	-8 -6 -4 2 , 0 2 4 6 8	2 9
4	-9 -7 -5 -3 -1 2 , 1 3 5 7 9	10

Число: 85 решений

Решение:

а)
$$\begin{cases} y = -x + 7 + 2k \\ y = 3x - 1 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

б) 85



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

✓ 4

Пусть n - число однодневных стиков; x - число бисектов на календаре в конце месяца; p_1 и p_2 - вероятности попадания на календаре в начале и в конце месяца. Тогда

$$p_1 = \frac{C_4^2}{C_n^2} = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{2!(n-2)!}{n!} = \frac{12}{n(n-1)}$$

$$p_2 = \frac{C_x^2}{C_n^2} = \frac{x!}{2!(x-2)!} \cdot \frac{2!(n-x)!}{n!} = \frac{x!}{(x-2)!} \cdot \frac{n!}{(n-x)!} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-x)!}$$

$$p_2 = 3,5 p_1$$

$$\frac{x(x-1)}{n(n-1)} = 3,5 \cdot \frac{12}{n(n-1)}$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ x = -6, \end{cases} \text{невозможно по смыслу задачи}$$

$$x = 7$$

Ответ: 7



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

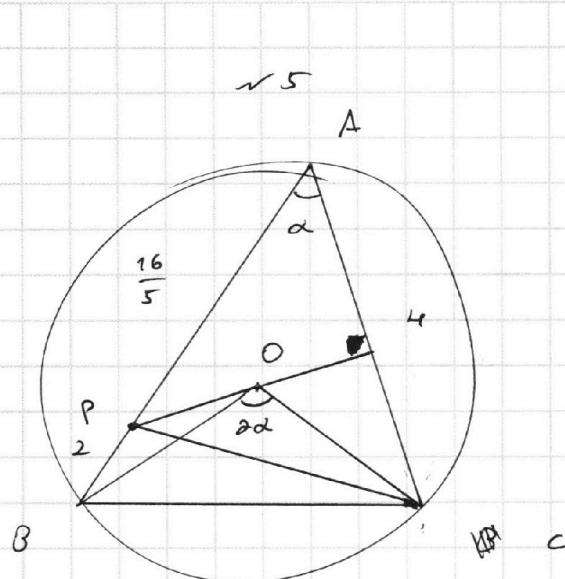
5

6

7

СТРАНИЦА
7 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



- 1) $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$ (из центральный угол)
- 2) $\angle BCO = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha$ ($BO = OC = R$)
- 3) $\angle BPO = 180^\circ - \angle BCO = \alpha + 90^\circ$ ($\angle BPO$ - внеш.)
- 4) $\angle PMA = \angle BPC - \angle PAC = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$ ~~так~~
- внешний угол $\Rightarrow \angle PMA$ - висота к $\triangle APC$
- 5) $\angle BPC = \angle BOC$ (как углы, опирающиеся на одну сторону вписанный $\angle BPO$)
- 6) $\angle PCA = \angle BPC - \angle BAC = \angle BOC - \angle BAC = 2\alpha - \alpha = \alpha$
- 7) $\angle PCA = \angle PAC = \alpha \Rightarrow \triangle APC$ - равнобедр.
- 8) $\angle PAC = \angle ACP = \frac{1}{2} \angle A$ ($\angle A = \frac{1}{2} \angle A$)
- 9) $\cos \alpha = \frac{AP}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{AP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{5}}{8}$
- 10) $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$
- 11) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{5} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{73\sqrt{39}}{20}$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = \frac{73\sqrt{39}}{20}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

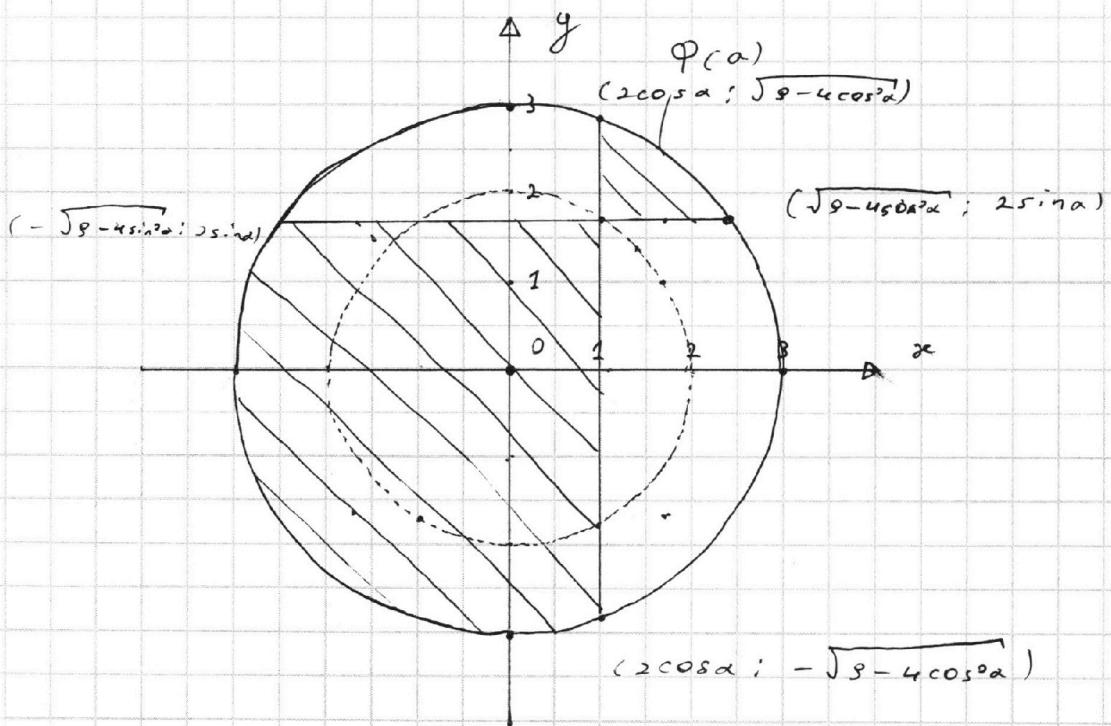
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases} \end{cases} \quad x^2 + y^2 \leq 9 \quad - \text{ круг с радиусом 3 и центром } (0; 0)$$

$(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$ пробегает при изменении α окружность радиуса 2 и центром $(0; 0)$



Длина вер - 20 отрезка: $2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$

Длина вер - 20 отрезка: $2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

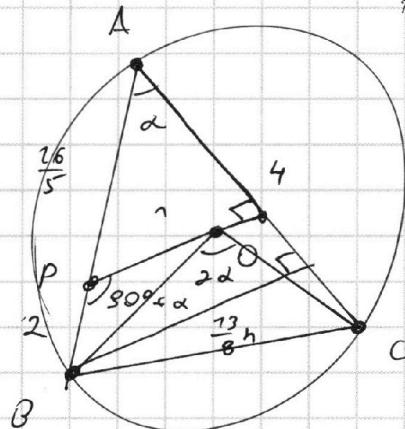
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

нибо α
нибо BC

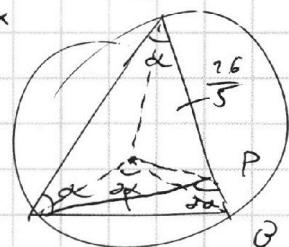
$$h = AP \sin \alpha$$



$$\frac{180^\circ - 2\alpha}{2}$$

$$90^\circ - \alpha$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2RA$$



$$(x - 2\cos \alpha)(y - 2\sin \alpha) \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

$$x = 2\cos \alpha$$

$$y = 2\sin \alpha$$

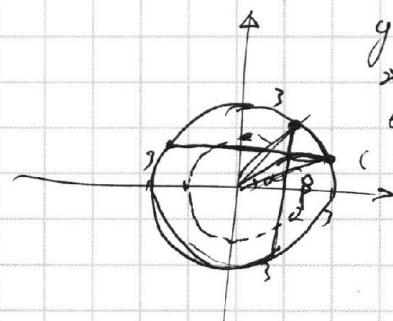
$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 2\cos \alpha \\ y \geq 2\sin \alpha \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq 2\cos \alpha \\ y \leq 2\sin \alpha \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [-2\cos \alpha, 2\cos \alpha] \\ y \in [-2\sin \alpha, 2\sin \alpha] \end{array} \right.$$

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot \alpha$$

$$\begin{matrix} 107 \\ 77 \\ 701 \\ 701 \\ 1111 \end{matrix}$$



$$x^2 \leq 4 \cos^2 \alpha$$

$$y^2 \leq 4 \sin^2 \alpha$$

$$x = y$$

$$6g\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$(2\sin \alpha)$$

$$4\sin^2 \alpha + x^2 = 4$$

$$4\sin^2 \alpha = k \sin^2 \alpha$$

$$26$$

$$26$$

$$156$$

$$52$$

$$676$$

$$R = \frac{BC}{2\sin \alpha}$$

$$BC = 2R \sin \alpha$$

$$BC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos(2\alpha) = 4R^2 \cos^2 \alpha$$

$$BC^2 = (\frac{26}{5})^2 + 4^2 - 2 \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 \cos(\alpha)$$

$$BC^2 =$$

$$R = \frac{BC}{2\sin \alpha}$$

$$BC^2 = 4 \cdot \frac{BC^2}{4\sin^2 \alpha} \cos^2 \alpha$$

$$BC^2 = 4R^2 \cos^2 \alpha$$

$$BC^2 = \frac{1076}{25} - \frac{208}{5} \cos(\alpha)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S = \frac{1}{2} A\vartheta \cdot AC \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{x^2}{\frac{76}{5}}$$

$$A\vartheta = AP + P\vartheta$$

$$\frac{AP}{P\vartheta} = \frac{5}{8}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad h_1$$

$$\cos \alpha = \frac{AH}{AP} \quad (\text{справка})$$

$$AH = \frac{1}{2} AC \quad (\text{справка})$$

$$\angle PCA = \angle PAC$$

$$\angle PCA = \angle OPC = \angle RAC$$

$$\angle BPC = \angle ODC = 2\alpha$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 200$$

$$\frac{OC}{\sin 2\alpha}$$

ω,

$$\frac{26}{5} \cdot \frac{\pi}{5}$$

$$\frac{26}{76}$$

$$\frac{156}{26}$$

$$\frac{476}{476}$$

$$\frac{64}{25}$$

$$\frac{25}{39}$$

$$\frac{204}{476} \omega = x \cdot x$$

$$\frac{26}{5} \cdot 2 =$$

$$\frac{PO}{\cos \alpha} = \frac{OC}{\sin 2\alpha}$$

$$OC = \frac{2 \cos \alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$\frac{PH_2}{L_2} = \frac{PB}{AB} =$$

$$OC^2 = 16 + \left(\frac{26}{5}\right)^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{26}{5} \cos^2 \alpha$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{PH_1}{L_1}$$

$$R = \frac{OC}{2 \sin \alpha}$$

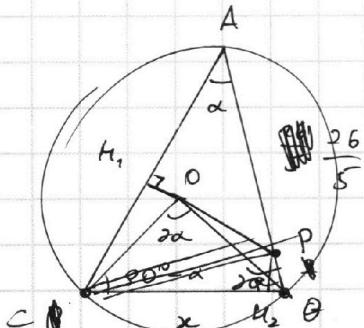
$$\frac{h_1}{PH_2} - 1 = \frac{PH_1}{h_1}$$

$$\frac{PB}{h_1} = \frac{AB}{PB} - 1$$

$$16 + \left(\frac{26}{5}\right)^2 - \frac{208}{5} \cos^2 \alpha = \frac{2026}{25} - \frac{208}{5} \cos^2 \alpha = 4R^2 \sin^2 \alpha$$

$$h_1 h_2 - h_2 PH_2$$

$$AP + P\vartheta = AB$$



$$\frac{AP}{PB}$$

$$x = 2R \sin \alpha$$

$$S = \frac{ab \sin C}{4R}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1/A :	1111	11...101
	2222	22...201
	3333	33...201
	4444	44...201
	5555	55...201
	6666	66...201
	7777	72...201
	8888	88...201
	9888	98...201

B : 707

C: 51	75
52	25
53	35
54	45
55	55
56	65
57	75
58	85
59	85

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

$$(r-2)(r-2)$$

$$(r-2)^2 \cdot r \cos \alpha \geq 0$$

$$7 \leq x \leq 9$$

$$101 \cdot 201 \cdot 11 \cdot x \cdot 55$$

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} =$$

$$5555 : 101 : 55$$

$$2) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{9+3}{(x-3)(y+3)} = xy - 3y + 3x - 9 = xy$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+x+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$(y+x+1) \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-3)(y+3)} \right) = 0$$

$$x^3 + (x+1)^3 + 9x(x+1)$$

$$x-3 = -7$$

$$\begin{cases} y = -x - 7 & x \neq 0 \\ y = x - 3 & y \neq 0 \\ y \neq 0 & y \neq 3 \end{cases}$$

$$j =$$

$$x = 2$$

$$y = -3$$

$$x = 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0 \quad x-3=-2 \quad \frac{1}{y+3} = \frac{1}{67}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{72}$$

$$0.5 - \frac{1}{3} - \frac{1}{8}$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$-x-7 > 0$$

$$x < -7$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$x \geq 3$$

$$x \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$(x-x+3)(x^2 + x(x-3) + (x-3)^2) =$$

$$y \neq 0$$

$$y \neq -3$$

$$-8x^2 + 27x$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3)$$

$$(x^2 + x^2 - 2x + x^2 - 6x + 9)$$

$$(\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \sin(\pi x) =$$

$$3x^2 - 28x + 28 - 9x^2 + 28x$$

$$= (\cos(\pi x) + \cos(\pi y)) \cos(\pi x)$$

$$\cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \sin(\pi x) = 2 \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right).$$

$$\cos(\pi x)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & (\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \sin(\pi x) = (\cos(\pi y) + \cos(\pi x)) \cos(\pi x) \\
 & \sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \\
 & \cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
 & \sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \sin \pi x = \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \\
 & \cdot \cos(\pi x) \\
 & \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \sin \pi x - \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \cos \pi x \right) \\
 & \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2} + \pi x\right) = 0 \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{2\pi x - \pi y}{2}\right) = 0 \end{array} \right. \quad \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\
 & \frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\
 & \left\{ \begin{array}{l} x+y = 1 + 2k \\ 3x-y = 1+2k \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 1-2x+2k \\ y = 3x-1-2k \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} 4 \leftarrow 2k \\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \\
 & \left. \begin{array}{l} -13-2k \\ -13-2k \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} 3+2k \\ 3+2k \end{array} \right. \quad \frac{C_4^2}{n!} \quad \frac{a!}{(a+2)!} \\
 & \text{d)} -4 \leq x \leq 4 \quad \left. \begin{array}{l} x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} -2: 8 \\ -2: 8 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} -1: \\ -1: \end{array} \right. \quad \frac{n!}{(n-2)!} \\
 & -9 \leq y \leq 9 \quad \left. \begin{array}{l} x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} -3: 8 \\ -3: 8 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} -2: \\ -2: \end{array} \right. \quad \frac{a!}{(a+2)!} \\
 & -4: 9 \quad -3: 8 \quad -2: 8 \quad -1: \\
 & P(\alpha) = \begin{matrix} 7 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 7 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \\ 7 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 = 7+168 = 768 \\ x = 7+73 = 7 \end{matrix} \\
 & = P\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = -6 \\ x = -6 \end{matrix} \\
 & P(\alpha) = \begin{matrix} -7 \\ -3 \\ -2 \\ -4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -7 \\ -3 \\ -5 \\ -7 \\ -9 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x^2 - x - 42 = 0 \\ n \end{matrix} \\
 & = P(\alpha + 2\pi) \quad \begin{matrix} -5 \\ -7 \\ -6 \\ -8 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 72 \\ (n-1)n \end{matrix} \\
 & n = 4 \quad \frac{4}{n} \cdot \frac{4}{n} = \quad x(x-1) = 3,5 \cdot 12 \quad \frac{72}{(n-1)n} = \\
 & n = 2x \quad \frac{x}{n} \cdot \frac{x-1}{n} = \quad x(x-1) = 3,5 \cdot 12 \quad \frac{72}{(n-1)n} = \\
 & \therefore \quad \begin{matrix} x = 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} \\ 4\cos^2\alpha + y^2 = 9 \end{matrix} \quad \begin{matrix} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x!}{(x-2)!} \cdot \frac{(n-2)!}{n!} \\ \cancel{\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}} \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{matrix} \quad \begin{matrix} y = \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} \\ 4\sin^2\alpha + x^2 = 9 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \cancel{\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}} \\ 2\cos\alpha \\ \cancel{\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}} \\ 2\sin\alpha \end{matrix} \\
 & y = 2\sin\alpha \quad \begin{matrix} 4\sin^2\alpha + x^2 = 9 \\ \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} = 2\sin\alpha \end{matrix} \\
 & \alpha = \sqrt{\frac{9}{4\cos^2\alpha} - 1}
 \end{aligned}$$