

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (лины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим что $A : 1111$; $1111 = 11 \cdot 101 \Rightarrow A : 101$, где

101 — простое. Тогда $A = 101 \cdot 11 \cdot K$, где $1 \leq K \leq 9$.

Значит $A : 101$ и $A \times 101^2$. Используя $A \cdot B \cdot C = n^2$,
т.к. $A : 101 \Rightarrow n : 101 \Rightarrow n^2 : 101^2$, значит $B : 101$
или $C : 101$, но $C \leq 99 < 101 \Rightarrow C \times 101 \Rightarrow B : 101$.

А трёхзначные числа делящиеся на 101 име-
ют вид $101 \cdot s$, где $1 \leq s \leq 9$. Т.е. числа $101, 202, 303, \dots$

$\dots, 808, 909$. А т.к. хотя бы одна из цифр
должна быть 2 , то подходит только число
 $202 \Rightarrow B = 202$. Заметим что $A : 11$ и $A \times 11^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow B : 11$ или $C : 11$, но $B = 202, 202 \times 11 \Rightarrow C : 11$.

Тогда C имеет вид $11 \cdot t$, где $1 \leq t \leq 9$, а т.к. 8

должна быть хотя бы одна цифра 3 ,

то подходит только число $33 \Rightarrow C = 33, B : 2$, и
 $B : 2^2$, и $B : 3$; $C : 3, C \times 3^2, C : 2 \Rightarrow A : 2, A : 3$

(т.к. $A \cdot B \cdot C = n^2 \Rightarrow A : 6$; $101 : 6, 11 : 6 \Rightarrow K : 6$)

но т.к. $1 \leq K \leq 9 \Rightarrow K = 6$. След. $A = 6666$. Значит
подходит только $A = 6666; B = 202; C = 33$.

Ответ: $A = 6666; B = 202; C = 33$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

$x, y > 0$

$x \text{ ум. на 1}$
 $y \text{ ув. на 1}$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$(x+y+2)(x-1)(y+1) = (x+y+2)xy, \text{ т.к. } x, y > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y+2 > 2 > 0 \Rightarrow (x-1)(y+1) = xy$$

$$xy + x - y - 1 = xy \Rightarrow x - y = 1 \quad \text{Возьмем в куб:}$$

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = 1$$

$$x^3 - y^3 - 3xy = 1$$

Ответ: 1.

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x.$$

Пусть $\pi x = \alpha$; $\pi y = \beta$

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cdot \cos \alpha$$

$$2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$1) \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 0.$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x - y = 1 + 2k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \underline{\underline{x-1-2k}}, x \in \mathbb{R},$$

$$2) \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \alpha = \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \alpha}}$$

Пусть $\frac{\alpha+\beta}{2} = \gamma$.

$$\sin \gamma \cdot \sin \alpha = \cos \gamma \cdot \cos \alpha. \quad (1)$$

$$\cos(\alpha + \gamma) = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cdot \sin \gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha \cdot \cos \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos(\alpha + \gamma) \quad \text{б(1)}$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \gamma +$$

$$\underline{\underline{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}} = \underline{\underline{\sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos(\alpha + \gamma)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \gamma) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0. \Rightarrow$$

L

L

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow 3x + \beta = \frac{\pi}{2} + \pi t, t \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi t \Rightarrow 3x + y = 1 + 2t \Rightarrow \\ \Rightarrow y = 1 + 2t - 3x, x \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(x, x-1-2k)$, $k \in \mathbb{Z}$

$(x, 1+2t-3x)$, $t \in \mathbb{Z}$.

Задача 3: $-5 \leq x \leq 5$; $-4 \leq y \leq 4$. $x, y \in \mathbb{Z}$
Заметим что.

$$\arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}; \arccos \frac{y}{4} \leq \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}, \text{ ищем пары}$$

функции достигаются только при $\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2}$,

$$\arccos \frac{y}{4} = \pi \Rightarrow x = 5; y = 4. \text{ Значит при}$$

остальных возможных значениях x и y
неравенство будет верным

Заметим что

x и y должны быть различной четности,
т.к. x и $x-1-2k$ различной четности,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

X и $1+2t-3x$ разной гётности. При-

дём, т.к. X и t произвольные, то y мо-
жет ~~принимать~~ ^{в чистое} принимать любое значение
(из разрешенного промежутка) отличное

от гётности от X . Тогда при $X = -5, -3, -1, 1,$

$3, 5$:

y может быть равен $-4, -2, 0, 2, 4$.

Всего таких вариантов $6 \cdot 5 = 30$, но есть
среди них вариант $x=5, y=4$ и он не
подходит. Тогда нам подходит 29 пар.

При $x = -4, -2, 0, 2, 4$

y может быть
равен $-3, -1, 1, 3$. Всего таких пар

$5 \cdot 4 = 20$ и все они подходят.

Значит всего подходящих пар

$$29 + 20 = \underline{49}$$

Ответ: 49.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Внешние условия вероятности попасть на концерт бываю $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$, пусть n -кол-во одинаковых классиков.

(т.к. всего вариантов C_n^4 , а нам подходит, когда оба билета у Лены и Вовы, а остальное мы можем распределить как угодно).

Пусть в концурте места выделили 5 билетов.

Тогда вероятность вместе попасть на концерт равна $\frac{C_{n-2}^{s-2}}{C_n^s}$ (т.к. всего вариантов раздать билеты C_n^s , а нам подходит ~~чтобы~~ когда оба билета у Лены и Вовы, а остальное $s-2$ можем как угодно раздать $n-2$ ученикам).

$$\text{Получаем: } \frac{5}{2} \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{s-2}}{C_n^s}$$

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{\cancel{(n-2)}^V!}{\cancel{2 \cdot (n-4)}^x!} \cdot \frac{\cancel{n}^x!}{\cancel{4! \cdot (n-4)!}} = \frac{\cancel{(n-2)}^V!}{\cancel{(s-2)! (n-s)!}} \cdot \frac{\cancel{n}^x!}{\cancel{s! (n-s)!}}$$

$$\frac{5 \cdot 4!}{4} = \frac{s!}{(s-2)!} \Leftrightarrow s(s-1) = 30 \Leftrightarrow s^2 - s - 30 = 0.$$

НОТ Виетта:

$$s_1 = -5 - \text{не подходит}$$

$$s_2 = 6$$

~~$$s_1 = -5 \text{ не подходит}$$

$$s_2 = 6 \text{ подходит}$$~~

Ответ: 6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$$AP = \frac{15}{2}$$

$$BP = 5$$

$$AC = 9$$

$$S_{ABC} - ?$$

Решение:

$AO = BO = CO$ как радиусы.

\Rightarrow $\angle BAO = \beta$;

$$\angle CAO = \gamma$$

$$\angle BAC = \alpha$$

Т. к. $AO = CO \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA = \gamma$. Т. к. $OA = OB \Rightarrow \angle OBA =$

$= \angle OAB = \beta$. Т. к. $BPOC$ - винкел $\Rightarrow \angle PBO =$

$= \angle PCO = \beta$ (как винкел). Тогда в $\triangle APC$

$\angle CAP = \angle ACP = \beta + \gamma$. $\Rightarrow \triangle APC$ - равнобедр. с

осн. $AC \Rightarrow PC = AP = \frac{15}{2}$. $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$

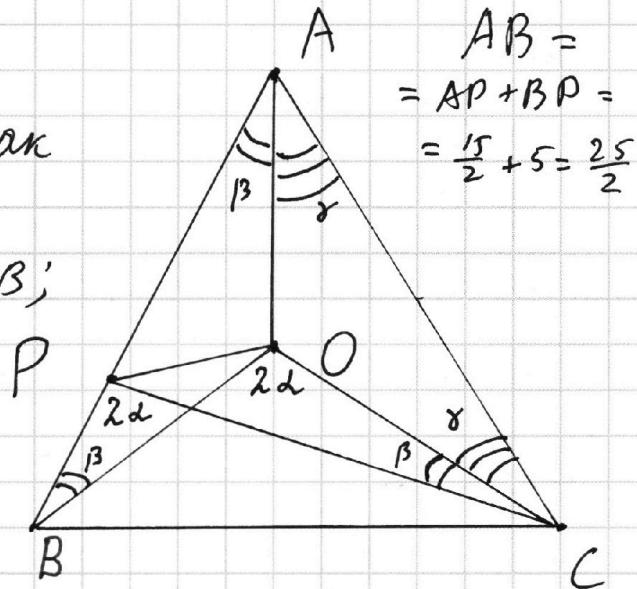
(т. к. центральный угол в 2 раза больше винкеля, если они опир. на одну дугу.)

$\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$ (как винкел.)

$$S_{ABC} = S_{APC} + S_{BPC} \quad (1)$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

$$S_{APC} = \frac{AP \cdot AC}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{15}{2} \cdot 9 \cdot \sin \alpha \quad (1)$$



$$\begin{aligned} AB &= \\ &= AP + BP = \\ &= \frac{15}{2} + 5 = \frac{25}{2} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{BPC} = \frac{BP \cdot PC}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{15 \cdot 5}{2 \cdot 2} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = \\ = \frac{15 \cdot 5}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \text{б. 1)}$$

Получаем: $\frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \sin \alpha = \frac{15}{2} \cdot 9 \cdot \sin \alpha + \frac{15 \cdot 5}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
разделим на $\sin \alpha$, т.к. $\sin \alpha \neq 0$, т.к. $\alpha > 0, \alpha < 90$.

$$\frac{25 \cdot 9}{2 \cdot 2} - \frac{15}{2 \cdot 2} \cdot 9 = \frac{15 \cdot 5}{2} \cdot \cos \alpha \quad | \cdot 2 \\ \frac{9}{2} \cdot (25 - 15) = 15 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$$

$$9 \cdot 5 = 15 \cdot 5 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{9}{15}.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{81}{225}} = \\ = \frac{12}{15}. \quad (\sin \alpha > 0, \text{т.к. } 0 < \alpha < 90). \\ (\sin \alpha > 0, \text{т.к. } 0 < \alpha < 90)$$

$$\text{Тогда } S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{25 \cdot 9}{2 \cdot 2} \cdot \frac{12}{15} = \\ = 5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$$

Ответ: $S_{ABC} = 45$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. в прав. пирамиду можно вписать
только один шар, то и есть этот шар.

Значит плоскость сечения пирамиды,
но есть плоскость, касающаяся шара
и 11 плоскости основания.

Аналогично Тут 2 касается всех
ребер усеченной пирамиды \Rightarrow 2 каса-
ется всех ребер общей пирамиды.

А значит плоскость сечения еще ~~один~~
~~есть плоскость касающуюся~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} : 1111$$

11·101·K

$$11^2 / 1111 / 101 \quad (101)$$

$$B = 2\overline{b_1 b_2} : 101$$

$$abc = n^2.$$

$$C = \overline{3c} : 101$$

$$B = 202; 303; 404; 505 \quad B = 102.$$

$$101 \cdot 11 \cdot K$$

K: 2, 3

$$101 \cdot 2 \cdot 11$$

$$B = 202 \quad C = 33$$

(33)

(K=6.)

$$101 \cdot 2 \cdot 11$$

$$3 \cdot 11$$

$$6666; 202; 33$$

x, y > 0.

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$$

x-1, y+1.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\pi x = a \alpha \\ \pi y = b \beta$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta \\ = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta$$

$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$x = y+1 \quad \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$xy = xy - y + x - 1$$

$$x-y = 1.$$

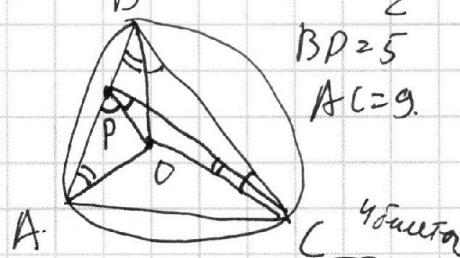
B

$$AP = \frac{15}{2}$$

$$x^3 - 3xy^2 + 3xy^2 - y^3 = 1$$

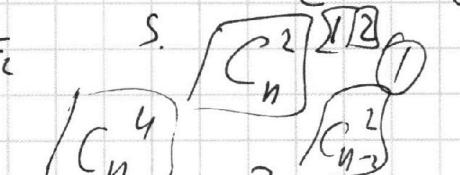
$$\frac{75}{2}$$

$$x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = 1$$



n.

$$P(A) = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{12}{n^2}$$



$$\frac{C_{n-s}^s}{C_n^s}$$

$$P(B) = \frac{s}{n} \cdot \frac{s-1}{n-1} \\ \frac{C_{n-s}^s}{C_n^s} \cdot \frac{(s-2) \cdot s-1}{C_{n-2}^2} \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \quad (S-2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sin \alpha = 0$ $\cos \alpha = 1$
 $\sin \beta = 0$ $\cos \beta = 1$

$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$
 $\sin \alpha = 1$ α
 $\pi y = \beta$. B

$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$
 ~~$\sin \alpha = -\beta$~~ $\frac{15}{2} \cdot 9 \cdot \sin \alpha + 5 \cdot \frac{15}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \sin \alpha$
 $\sin \alpha \cdot \sin \beta$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta \neq \frac{\pi}{2}$
 $\sin \alpha + \sin \beta \cdot \frac{15 \cdot 9}{2} + 5 \cdot 15 \cos \alpha = \frac{25 \cdot 9}{2} \cdot \sin \alpha$
 $\sin \alpha = \frac{12}{15}$
 $\cos \alpha = \frac{5 \cdot 15}{2} \cos \alpha = \frac{25 \cdot 9}{2} - \frac{15 \cdot 9}{2} = 5 \cdot 9$
 $\cos \alpha = \frac{9}{15}$
 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{81}{225}} = \frac{12}{15}$
 $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$
 $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$
 $\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta + 1 = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta + 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$$

$$\frac{C_{n-2}^{s-2}}{C_n^s}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\cancel{\frac{5}{2} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2 \cdot \frac{3}{2}}}.$$

$$\frac{(n-2)!}{2 \cdot (n-4)!} \cdot \frac{n!}{4! \cdot (n-4)!} \quad ?$$

$$\frac{5 \cdot 4!}{4} (n-4)!$$

$$\frac{5 \cdot 4!}{4} = \frac{5!}{(5-2)!}$$

$$5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot (5-1)$$

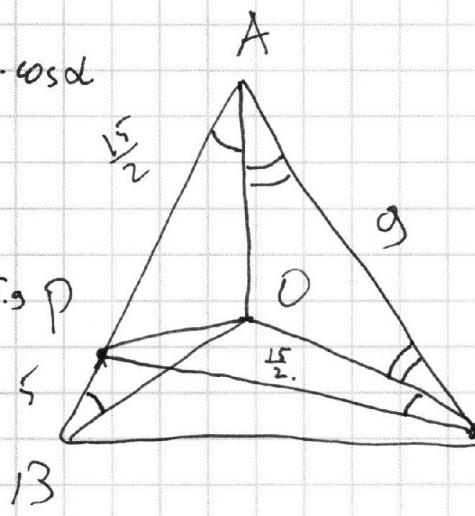
$$15, 5 \quad 3, 5$$

$$\frac{5 \cdot 15}{2} \cdot 2 \sin 2 \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \sin 2$$

$$5 \cdot 15 \cdot \cos 2 = \frac{25}{2} \cdot 9 \quad P$$

$$\cos 2 = \frac{3}{2}$$



$$5 \cdot \frac{15}{2} \cdot \sin 2 \cdot 2 = \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \sin 2 \quad (\cos 2 = \frac{3}{2})?$$

$$75 \sin 2 \cos 2 = 25 \cdot 75 \cdot \frac{3}{2} \sin 2.$$

(1).

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \quad \frac{C_{n-2}^{s-2}}{C_n^s}$$

$$P C = \frac{15}{2}.$$

$$\frac{5 \cdot \frac{15}{2} \cdot \sin 2 \cdot 2}{2} \quad ?$$

$$\frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \sin 2 \cdot 2$$

C

$$\frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \sin 2 \cdot 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin 2 = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \frac{1}{2} \alpha.$$

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin 2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha + \frac{\cos \beta}{\sin 2}$$

$$\frac{1}{\sin 2 \cos \alpha}$$

$$\cos \beta$$

$$\boxed{\sin 2 \cdot \sin \beta}$$

$$\sin(\alpha + \beta) =$$

$$\cos(\alpha - \beta) =$$

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \beta} + \operatorname{tg} \beta \right) \sin 2 = \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + 1 \right) \cos \alpha$$

$$\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{4} = 1.$$

$$\sin \alpha + \sin \beta =$$

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \beta} + \operatorname{tg} \beta \right) \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + 1 = 2 \frac{\sin \alpha \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} - \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \frac{\sqrt{3} \pi^2}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta$$

11

$$\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\frac{\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \alpha + \cos \beta}$$

$$= 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \frac{1}{2}$$

$$(1). \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}$$

11

$$\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\frac{2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(1; 0);$$

$$\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} =$$

$$\sin \alpha + \sin \beta$$

$$2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin \alpha =$$

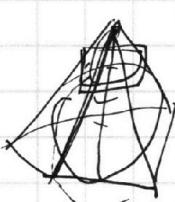
$$\tan \alpha = \tan \beta$$

$$= \cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \tan \alpha =$$

$$2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \tan \alpha = \tan \beta.$$

$$\frac{1}{\tan \alpha} = \tan \beta$$

$$\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin \alpha = \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos \alpha$$



$$\sin \alpha + \sin \beta$$

$$\sin \alpha + \sin (\alpha + \beta - \gamma)$$



$$\sin \alpha + \sin \alpha \cdot \cos (\beta - \gamma) +$$

$$+ \cos \alpha \cdot \sin (\beta - \gamma)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$$

$$\frac{1}{2}, \sqrt{3}$$

$$\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$\tan \alpha = \tan \beta$$

$$\alpha = \arctan \beta$$

$$xy - 3\sqrt{2}(x+y) + 18 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$xy - 3\sqrt{2}(x+y) + 9 \sin \alpha \leq 0.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin \alpha.$$

$$\cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \Rightarrow \alpha + \beta \text{ или } \alpha = \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1) - \beta.$$

$$\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1) - \pi y \\ x = \frac{2k+1}{2} \end{cases}$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \cos \alpha \quad \begin{cases} x+y = \frac{2k+1}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{2}{3}\pi$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$1. \quad \cos(\alpha+\beta)=0.$$

$$\sin \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \frac{\alpha+\beta}{2}) = 0$$

$$\cos \frac{3\alpha+\beta}{2} = 0$$

$$\cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 0.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 0. \quad \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

$$\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} + 2k$$

$$x-y = 1+4k \Rightarrow x = y+1+4k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sin \frac{2\alpha+\beta}{2} \cdot \sin 2 = \cos 2 \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin 2 \cdot \sin \gamma = \cos 2 \cdot \cos \gamma$$

$$\sin \cos(\alpha+\gamma) = \cos 2 \cdot \cos 2 - \sin 2 \cdot \sin \gamma.$$

$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, 0.$$

$$\cos 2 \cdot \cos(\alpha+\gamma) = 0.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\alpha+\beta}{2}\right) = 0.$$

$$\begin{cases} y = x - 4k - 1 \\ y = 1 + 4k - 3x \end{cases}$$

$$\textcircled{5}. \quad x \leq x \leq 5 \quad \frac{3\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{3x+y}{2} = \frac{1}{2} + 4k. \quad \arcsin \frac{y}{5}.$$

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{1} \quad -5 \leq x \leq 5 \quad -4 \leq y \leq 4.$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}. \quad ? \quad -\frac{\pi}{2} \\ -5 \leq x \leq 5. \quad -5 \quad \left[\begin{array}{c} \frac{\pi}{2} \\ \frac{11}{2} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} \frac{\pi}{2} \\ \frac{11}{2} \end{array} \right] \quad \cancel{\left[\begin{array}{c} \pi \\ \frac{11}{2} \end{array} \right]} \quad \frac{\pi}{2}, \frac{11}{2}$$

$$-5 \leq x \leq 5. \quad -4. \quad x=5. \quad y=4. \quad \text{не ок.}$$

$$x=4, y=3, \cancel{1}, -1, -3, \quad \textcircled{3}, 4.$$

$$\text{let } \textcircled{X}.$$

$$(x=5, y=4 \text{ нет.})$$

$$a; \quad 6$$

$$5, 3, 1, -1, -3, -5$$

$$1, -1, -3, 3. \quad 4$$

$$9, 2, 0, -2, -4$$

$$9, 0, 2, -2, -4$$

$$5, 3, 1, -1, -3, -5. \quad 4, 2, 0, -2, -4. \quad \text{?} \quad 5 \quad \text{?} \quad \text{?}$$

$$4, 2, 0, -2, -4.$$

$$3, 1, -1, 3.$$

$$5 \quad x \quad 4$$

$$\text{?} \quad \text{?}$$

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

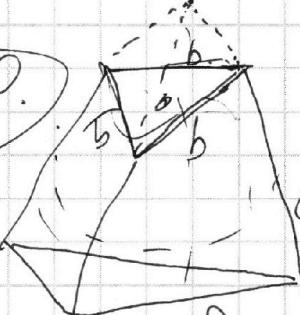
СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{matrix} x \\ 1 \end{matrix}$$

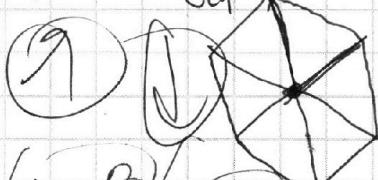
$$(y - 3\sqrt{2})$$

$$\alpha = 0$$



$$\sin \alpha$$

$$\cos \alpha$$



$$(x - \pi/2) y = 0$$

$$\text{если } \alpha < 0$$

$$\sin \alpha$$

$$\cos \alpha$$

$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$$

$$\sin x + \dots y - \dots$$

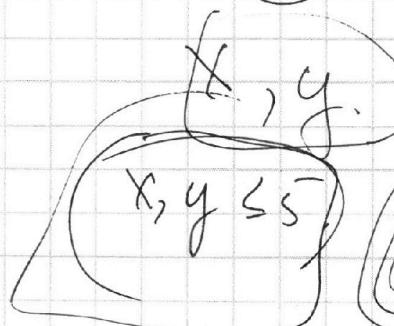
$$(2) \quad \text{xy} - 3\sqrt{2}(y \sin \alpha + x \cos \alpha) + 9 \sin^2 \alpha$$

$$\text{1) } x$$

$$\pi r^2$$

$$25\pi$$

$$\begin{matrix} x \\ x \rightarrow -x \end{matrix}$$



$$x, y \leq 5$$

$$\alpha > 0$$

$$xy \leq x^2 y^2$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \alpha$$

отр.

$$xy - 3\sqrt{2}y\sqrt{2} \geq 9$$

$$xy - 3y \geq 9$$

$$\text{ок } \beta \in$$

$$(x-3)(y-3) \geq 0$$

$$x \geq$$

$$3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$x, y$$

$$y$$

L

L