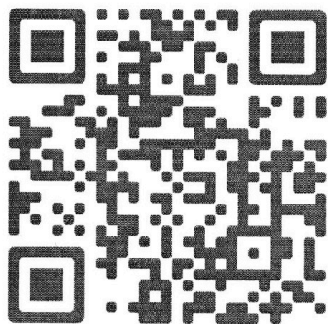
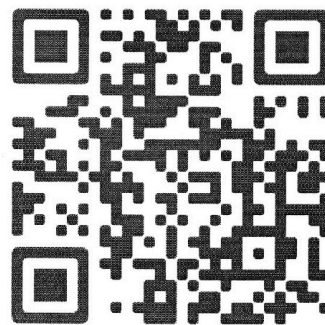




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим что $A : 1111$; $1111 = 11 \cdot 101 \Rightarrow A : 101$, где 101 - простое. Тогда $A = 101 \cdot 11 \cdot K$, где $1 \leq K \leq 9$.
Значит $A : 101$ и $A \times 101^2$. Пусть $A \cdot B \cdot C = n^2$,
т.к. $A : 101 \Rightarrow n : 101 \Rightarrow n^2 : 101^2$, значит $B : 101$ или $C : 101$, но $C \leq 99 < 101 \Rightarrow C \times 101 \Rightarrow B : 101$.
А трёхзначные числа делящиеся на 101 имеют вид $101 \cdot s$, где $1 \leq s \leq 9$. Т.е. числа 101, 202, 303, ..., 808, 909. А т.к. хотя бы одна из цифр делится на 2, то подходит только число 202 $\Rightarrow B = 202$. Заметим что $A : 11$ и $A \times 11^2 \Rightarrow B : 11$ или $C : 11$, но $B = 202, 202 \times 11 \Rightarrow C : 11$.
Тогда C имеет вид $11 \cdot t$, где $1 \leq t \leq 9$, а т.к. C должна быть хотя бы одна цифра 3, то подходит только число 33 $\Rightarrow C = 33$. $B : 2$, и $B \times 2^2$, и $B \times 3$; $C : 3$, $C \times 3^2$, $C \times 2 \Rightarrow A : 2$, $A : 3$ (т.к. $A \cdot B \cdot C = n^2$) $\Rightarrow A : 6$; 101×6 , $11 \times 6 \Rightarrow K : 6$ и т.к. $1 \leq K \leq 9 \Rightarrow K = 6$. След. $A = 6666$. Значит подходит только $A = 6666$; $B = 202$; $C = 33$.

Ответ: $A = 6666$; $B = 202$; $C = 33$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

$x, y > 0$.

x ум. на 1
 y ув. на 1.

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$(x+y+2)(x-1)(y+1) = (x+y+2)xy, \text{ т.к. } x, y > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y+2 > 2 > 0 \Rightarrow (x-1)(y+1) = xy$$

$$xy + x - y - 1 = xy \Rightarrow x - y = 1 \quad \text{Введем в куб:}$$

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = 1$$

$$x^3 - y^3 - 3xy = 1$$

Ответ: 1.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x.$$

$$\text{Пусть } \pi x = \alpha; \pi y = \beta$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cdot \cos \alpha$$

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$1) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0.$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x - y = 1 + 2k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1 + 2k}{2} x - \frac{1 - 2k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \neq 0 \Rightarrow \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \alpha = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Пусть } \frac{\alpha + \beta}{2} = \gamma.$$

$$\sin \gamma \cdot \sin \alpha = \cos \gamma \cdot \cos \alpha. \quad (1)$$

$$\cos(\alpha + \gamma) = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha - \cos \gamma = \sin \alpha \sin \gamma + \cos(\alpha + \gamma) \quad (1)$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \gamma +$$

$$\sin \alpha - \sin \gamma = \sin \alpha - \sin \gamma + \cos(\alpha + \gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \gamma) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{3\alpha + \beta}{2}\right) = 0. \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \frac{3\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi t, t \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi t \Rightarrow 3x + y = 1 + 2t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{y = 1 + 2t - 3x, x \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(x, x - 1 - 2k), k \in \mathbb{Z}$
 $(x, 1 + 2t - 3x), t \in \mathbb{Z}.$

б) ОДЗ: $-5 \leq x \leq 5$; $-4 \leq y \leq 4$ $x, y \in \mathbb{Z}$
Заметим это.

$$\arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}; \arccos \frac{y}{4} \leq \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}, \text{ при этом ра-}$$

венство достигается только при $\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2}$;

$$\arccos \frac{y}{4} = \pi \Rightarrow x = 5; y = -4. \text{ Значит при}$$

остальных возможных значениях x и y нер-во будет верным. Заметим это

x и y должны быть разной четности,
т.к. x и $x - 1 - 2k$ разной четности;



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☒☐☐☐☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

x и $1+2t-3x$ разной четности. При-
чем, т.к. k и t произвольные, то y мо-
жет ~~принимать~~ принимать любое ^{целое} значение
(из разрешенного промежутка) отличное
по четности от x . Тогда при $x = -5, -3, -1, 1,$

$3, 5$:

y может быть равен $-4, -2, 0, 2, 4$.

Всего таких вариантов $6 \cdot 5 = 30$, но есть
среди них вариант $x=5, y=4$ и он не
подходит. Тогда нам подходят 29 вар.

При $x = -4, -2, 0, 2, 4$

y может быть
равен $-3, -1, 1, 3$. Всего таких пар
 $5 \cdot 4 = 20$ и все они подходят.

Значит всего подходящих пар
 $29 + 20 = \underline{49}$

Ответ: 49.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В начале месяца вероятность попасть на концерт была $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$, пусть n - кол-во одиноклассников.

(Т.к. всего вариантов C_n^4 , а нам подходят, когда два билета у Пети и Васи, а остальные мы можем распределить как угодно).

Пусть в конце месяца выделим S билетов. Тогда вероятность вместе попасть на концерт равна $\frac{C_{n-2}^{S-2}}{C_n^S}$ (Т.к. всего вариантов раздать билеты C_n^S , а нам подходит ~~тогда~~ когда два билета у Пети и Васи, а остальные $S-2$ можем как угодно раздать $n-2$ ученикам).

Получаем: $\frac{5}{2} \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{S-2}}{C_n^S}$

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{(n-2)!}{2 \cdot (n-4)!} \cdot \frac{n!}{4! \cdot (n-4)!} = \frac{(n-2)!}{(S-2)! \cdot (n-S)!} \cdot \frac{n!}{S! \cdot (n-S)!}$$

$$\frac{5 \cdot 4!}{4} = \frac{S!}{(S-2)!} \Leftrightarrow S(S-1) = 30 \Leftrightarrow S^2 - S - 30 = 0.$$

по Т. ВЬЕТТА:

$S_1 = -5$ - не подходит

$S_2 = 6$

Ответ: 6

по Т. ВЬЕТТА:
 ~~$S_1 = -5$ - не~~
 ~~$S_2 = 6$ - не~~
подходит



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$$AP = \frac{15}{2}$$

$$BP = 5$$

$$AC = 9$$

$$S_{ABC} = ?$$

Решение:

$AO = BO = CO$ как радиусы. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Пусть $\angle BAO = \beta$;

$$\angle CAO = \gamma$$

$$\angle BAC = \alpha$$

$$\text{Т.к. } AO = CO \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA = \gamma. \text{ Т.к. } OA = OB \Rightarrow \angle OBA =$$

$$= \angle OAB = \beta. \text{ Т.к. } BPOC - \text{вне} \Rightarrow \angle PBO =$$

$$= \angle PCO = \beta \text{ (как вне.)}. \text{ Тогда в } \triangle APC$$

$$\angle CAP = \angle ACP = \beta + \gamma. \Rightarrow \triangle APC - \text{равнобедр. с}$$

$$\text{осн. } AC \Rightarrow PC = AP = \frac{15}{2}. \quad \angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$$

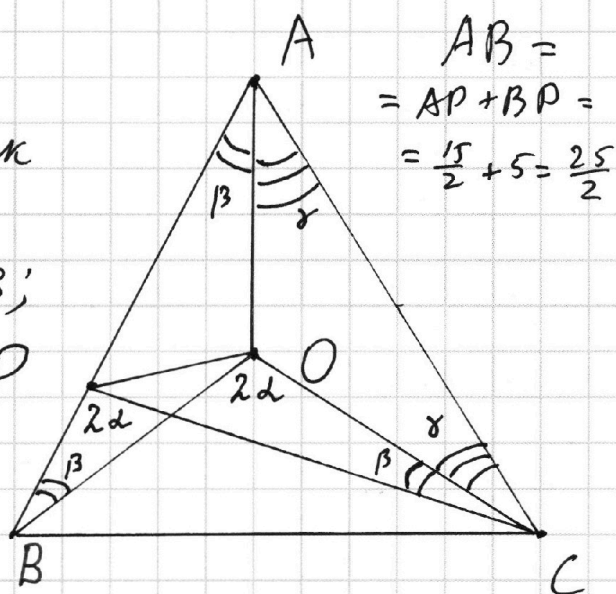
(т.к. центральный угол в 2 раза больше вписанного, если они опир. на одну дугу.)

$$\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha \text{ (как вне.)}$$

$$S_{ABC} = S_{APC} + S_{BPC} \quad (1).$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \sin \alpha. \quad (1)$$

$$S_{APC} = \frac{AP \cdot AC}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{15}{2} \cdot 9 \cdot \sin \alpha \quad (1)$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{BPC} = \frac{BP \cdot PC}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{15 \cdot 5}{2 \cdot 2} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha =$$
$$= \frac{15 \cdot 5}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \text{в (1)}$$

Получаем: $\frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \sin \alpha = \frac{15}{2} \cdot 9 \cdot \sin \alpha + \frac{15 \cdot 5}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
разделим на $\sin \alpha$, т.к. $\sin \alpha \neq 0$, т.к. $\alpha > 0$, $\alpha < 90$.

$$\frac{25 \cdot 9}{2 \cdot 2} - \frac{15}{2 \cdot 2} \cdot 9 = \frac{15 \cdot 5}{2} \cdot \cos \alpha \quad | \cdot 2$$

$$\frac{9}{2} \cdot (25 - 15) = 15 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$$

$$9 \cdot 5 = 15 \cdot 5 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{9}{15}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{81}{225}} =$$
$$= \frac{12}{15} \quad \left(\sin \alpha > 0, \text{ т.к. } 0 < \alpha < 90 \right).$$

(sin α > 0, т.к. 0 < α < 90)

$$\text{Тогда } S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{25 \cdot 9}{2 \cdot 2} \cdot \frac{12}{15} =$$
$$= 5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$$

Ответ: $S_{ABC} = 45$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. вправ. пирамиду можно вписать
только один шар, то ω и есть этот шар.

Значит плоскость сечения пирамиды,
это есть плоскость, касающаяся ω и
11 плоскости основания.

Аналогично Ω касается всех
рёбер усечённой пирамиды $\Rightarrow \Omega$ каса-
ется всех рёбер оболочки пирамиды.

~~А значит плоскость сечения ещё Ω
есть плоскость касающаяся~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} : 1111 \quad 11 \cdot 101 \cdot K \quad 11^2 \quad 11 \quad 11 \quad \frac{11}{101} \quad (101)^2$$

$$B = \overline{2b_1b_2} : 1101 \quad abc = n^2 \quad B = 202; 303; 404; 505 \quad B = 10?$$

$$C = \overline{3c_1} : 1101 \quad (33) \quad B = 202 \quad C = 33 \quad 3 \cdot 11 \quad 6666; 202; 33$$

$$101 \cdot 11 \cdot K \quad K: 2, 3 \quad 101 \cdot 2 \quad x, y > 0.$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$$

$$x-1, y+1.$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\pi x = \alpha \quad \pi y = \beta$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta$$

$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy - y + x - 1$$

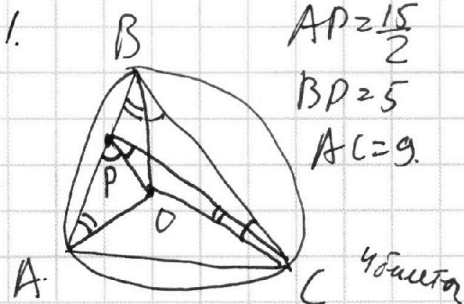
$$x = y+1$$

$$x-y=1.$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 1$$

$$x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = 1$$



n.

$$P(A) = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{12}{n^2}$$

$$\frac{C_{n-5}^3}{C_n^5}$$

$$P(B) = \frac{5}{n} \cdot \frac{5-1}{n} = \frac{20}{n^2}$$

$$\frac{C_{n-5}^2}{C_n^5} \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^3} = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$$

$$C_n^4 \quad C_n^2 \quad C_{n-2}^2 \quad C_n^4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сокр.
Сумм.

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \frac{\pi}{x} + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$\pi x = \alpha$
 $\pi y = \beta$

$\sin 2 = 0$
 $\cos \beta = -1$
 $\cos 2 = 0$
 $\sin \beta = \frac{1}{9}$

$\sin(2+\beta)$
 $\sin 2 \cos \beta$

$$(\sin 2 + \sin \beta) \sin 2 = (\cos 2 + \cos \beta) \cos 2$$

$2 = -\beta$

$$\frac{15}{2} \cdot 9 \cdot \sin 2 + 5 \cdot \frac{15}{2} \cdot \sin 2 = \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \sin 2$$

$\sin 2 \cdot \sin \beta$
 $2 \neq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \beta \neq \frac{\pi}{4}$

$$\sin 2 + \sin \beta \cdot \frac{15 \cdot 9}{2} + 5 \cdot 15 \cos 2 = \frac{25 \cdot 9}{2}$$

$\cos 2$

$$5 \cdot 15 \cos 2 = \frac{25 \cdot 9}{2} - \frac{15 \cdot 9}{2} = 5 \cdot 9$$

$\cos 2 = \frac{9}{15}$

$\frac{12}{15}$

$$\sin 2 = \sqrt{1 - \cos^2 2} = \sqrt{1 - \frac{81}{225}} = \frac{12}{15}$$

$\cos 2 = \sin(\frac{\pi}{2} - 2)$

$$\frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{12}{15} = \frac{5 \cdot 9 \cdot 6}{3} = 90$$

$\sin$
 $\cos(\frac{\pi}{2} - 2) = \cos 2$

$$\sin^2 2 + \sin 2 \sin \beta + 1 = \cos^2 2 + \cos 2 \cdot \cos \beta + 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$$

$$\frac{C_{n-2}^{s-2}}{C_n^s}$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1}$$

$$\frac{(n-2)!}{2 \cdot (n-4)!} : \frac{n!}{4! \cdot (n-4)!} \quad s=?$$

$$\frac{5 \cdot 4! \cdot (n-4)!}{4}$$

$$\frac{5 \cdot 4!}{4} = \frac{s!}{(s-2)!}$$

$$5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = s \cdot (s-1)$$

$$s^2 - s - 30 = 0$$

$$s_1 = -5 \notin \mathbb{N}$$

$$s_2 = 6 \in \mathbb{N}$$

$$11, 5 \quad 2, 5$$

(1)

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$$

$$\frac{C_{n-2}^{s-2}}{C_n^s}$$

$$P = \frac{15}{2}$$

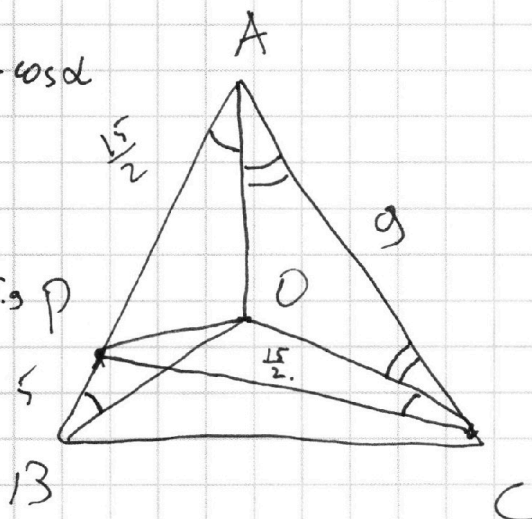
$$5 \cdot \frac{15}{2} \cdot 2 \sin 2 \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \sin 2$$

$$5 \cdot 15 \cdot \cos 2 = \frac{25}{2} \cdot 9$$

$$15$$

$$\cos 2 = \frac{3}{2}$$



$$\frac{5 \cdot \frac{15}{2} \cdot \sin 2 \cdot 2}{2}$$

$$\frac{\frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \sin 2}{2}$$

$$5 \cdot \frac{15}{2} \cdot \sin 2 \cdot 2 = \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \sin 2 \quad (\cos 2 = \frac{3}{2})!?$$

$$75 \sin 2 \cos 2 = 28.75 \cdot \frac{3}{2} \sin 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$$

/sin α cos α

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha}$$

cos β

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\tan \alpha + \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} = \tan \alpha + \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$$

$$\sin(\alpha + \beta) =$$

$$\cos(\alpha + \beta) =$$

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \beta} + \tan \beta \right) \sin \alpha = \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + 1 \right) \cos \alpha$$

$$\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\sin \alpha + \sin \beta =$$

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \beta} + \tan \beta \right) = \tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + 1 = 2 \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \tan \alpha}{\cos \beta} - \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = 1 - \tan \alpha \tan \beta \frac{\sqrt{3} \sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \quad 2 \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta$$

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \beta} = 1 - \tan \alpha \tan \beta \quad \frac{1}{2} \quad \textcircled{1} \quad \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta$$

$$\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = 1 - \tan \alpha \tan \beta \quad 2 \sin \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

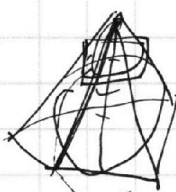
$$\sin 2 + \sin \beta = 2 \sin \frac{2+\beta}{2} \cdot \cos \frac{2-\beta}{2}$$

$$\cos 2 + \cos \beta = 2 \cos \frac{2+\beta}{2} \cdot \cos \frac{2-\beta}{2}$$

$$2 \cos \frac{2+\beta}{2} - \cos \frac{2-\beta}{2} \quad \text{Сторона} =$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$



$$\sin 2 + \sin \beta$$

$$\sin 2 + \sin (2+\beta-\gamma)$$

n



$$\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

n



$$\sin 2 + \sin 2 \cdot \cos (\beta-\gamma) + \cos 2 \cdot \sin (\beta-\gamma)$$

≠ 0

cos 2+β

1; 0;

$$\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} !?$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \left(\sqrt{3}\right)$$

$$\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} =$$

$$\operatorname{tg} 2 = \operatorname{ctg} \gamma$$



$$\sqrt{3} \quad \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{2+\beta}{2} \cdot \sin 2 \cdot \cos \frac{2+\beta}{2}$$

$$\sin 2 + \sin \beta$$

n

$$\sin \frac{2+\beta}{2}$$

$$\cos \frac{2-\beta}{2}$$

$$\sin 2 =$$

$$\operatorname{tg} 2 = \operatorname{ctg} \frac{2+\beta}{2}$$

$$2 \sin \frac{2+\beta}{2} \cdot \cos \frac{2-\beta}{2}$$

$$= \cos 2 \cdot \cos \frac{2-\beta}{2} \cdot \cos \frac{2+\beta}{2} \operatorname{tg} 2 =$$

$$2 \cos \frac{2+\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} 2 = \operatorname{ctg} \beta$$

$$\frac{1}{\operatorname{ctg} 2} = \operatorname{ctg} \beta$$

$$xy - 3\sqrt{2}(x+y) + 18 \sin 2 \cos 2$$

$$xy - 3\sqrt{2}(x+y) + 9 \sin 2 \leq 0$$

$$\sin \frac{2+\beta}{2} \cdot \cos \frac{2-\beta}{2} \cdot \sin 2 = \cos \frac{2+\beta}{2} \cdot \cos \frac{2-\beta}{2} \cdot \cos 2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin 2 = \cos 2 \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin 2$$

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ или } \alpha = \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1) - \beta$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin 2 = \cos 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \begin{aligned} \pi x &= \frac{\pi}{2} (2k+1) - \pi y \\ x &= \frac{2k+1}{2} - y \end{aligned}$$

$$\sin x \cdot \sin 2 = \cos 2 \cdot \cos x \quad \left\{ \begin{aligned} x + y &= \frac{2k+1}{2} \end{aligned} \right. \quad \begin{matrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{6} & \frac{3}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{6} \end{matrix}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{3}{4}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos y \cdot \cos x \cdot \sin 2 \cdot \sin y$$

$$\frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\sin 2 \sin y = \cos y \cos x - \cos \frac{\alpha}{2} \sin y$$

$$1. \quad \cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$\sin 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin$$

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$$

$$\cos(\alpha + \frac{\alpha + \beta}{2}) = 0$$

$$\cos \frac{3\alpha + \beta}{2} = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0. \quad \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

$$\frac{x - y}{2} = \frac{1}{2} + 2k$$

$$x - y = 1 + 4k \Rightarrow x = y + 1 + 4k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin 2 = \cos 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin 2 \cdot \sin \gamma = \cos 2 \cdot \cos \gamma.$$

$$\sin \cos (\alpha + \gamma) = \cos 2 \cdot \cos 2 - \sin 2 \cdot \sin \gamma.$$

$$\frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{6} \quad 0.$$

$$\cos 2. \quad \cos (\alpha + \gamma) = 0.$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{5} \right). \quad \cos \left(\frac{3\alpha + \beta}{2} \right) = 0.$$

$$\textcircled{5}. \quad x \in [-5, 5]$$

$$\frac{3\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\begin{cases} y = x - 4k - 1 \\ y = 1 + 4k - 3x \\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\frac{3x + y}{2} = \frac{1}{2} + 2k. \quad \arcsin \left(\frac{x}{5} \right)$$

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5, \\ -4 \leq y \leq 4. \end{cases}$$

$$3x + y = 1 + 4k.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x, y \in \mathbb{Z}$

а) $-5 \leq x \leq 5 \quad -4 \leq y \leq 4$

$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \leq \arccos \frac{y}{4} \leq 0$

$-5 \leq x \leq 5$

$-4 \leq y \leq 4$

$x=5, y=4$ не ок.

$x=4, y=3, 1, -1, -3, 5, 4$

let (x, y)

$(-5, 5)$

$(-4, 4)$

$(-3, 3)$

$(-2, 2)$

$(-1, 1)$

$(0, 0)$

$(1, 1)$

$(2, 2)$

$(3, 3)$

$(4, 4)$

$(5, 5)$

$(-5, -4)$

$(-4, -3)$

$(-3, -2)$

$(-2, -1)$

$(-1, 0)$

$(0, 1)$

$(1, 2)$

$(2, 3)$

$(3, 4)$

$(4, 5)$

$(5, 4)$

$(5, 3)$

$(5, 2)$

$(5, 1)$

$(5, 0)$

$(5, -1)$

$(5, -2)$

$(5, -3)$

$(5, -4)$

$(4, 5)$

$(4, 4)$

$(4, 3)$

$(4, 2)$

$(4, 1)$

$(4, 0)$

$(4, -1)$

$(4, -2)$

$(4, -3)$

$(4, -4)$

$(3, 5)$

$(3, 4)$

$(3, 3)$

$(3, 2)$

$(3, 1)$

$(3, 0)$

$(3, -1)$

$(3, -2)$

$(3, -3)$

$(3, -4)$

$(2, 5)$

$(2, 4)$

$(2, 3)$

$(2, 2)$

$(2, 1)$

$(2, 0)$

$(2, -1)$

$(2, -2)$

$(2, -3)$

$(2, -4)$

$(1, 5)$

$(1, 4)$

$(1, 3)$

$(1, 2)$

$(1, 1)$

$(1, 0)$

$(1, -1)$

$(1, -2)$

$(1, -3)$

$(1, -4)$

$(0, 5)$

$(0, 4)$

$(0, 3)$

$(0, 2)$

$(0, 1)$

$(0, 0)$

$(0, -1)$

$(0, -2)$

$(0, -3)$

$(0, -4)$

$(-1, 5)$

$(-1, 4)$

$(-1, 3)$

$(-1, 2)$

$(-1, 1)$

$(-1, 0)$

$(-1, -1)$

$(-1, -2)$

$(-1, -3)$

$(-1, -4)$

$(-2, 5)$

$(-2, 4)$

$(-2, 3)$

$(-2, 2)$

$(-2, 1)$

$(-2, 0)$

$(-2, -1)$

$(-2, -2)$

$(-2, -3)$

$(-2, -4)$

$(-3, 5)$

$(-3, 4)$

$(-3, 3)$

$(-3, 2)$

$(-3, 1)$

$(-3, 0)$

$(-3, -1)$

$(-3, -2)$

$(-3, -3)$

$(-3, -4)$

$(-4, 5)$

$(-4, 4)$

$(-4, 3)$

$(-4, 2)$

$(-4, 1)$

$(-4, 0)$

$(-4, -1)$

$(-4, -2)$

$(-4, -3)$

$(-4, -4)$

$(-5, 5)$

$(-5, 4)$

$(-5, 3)$

$(-5, 2)$

$(-5, 1)$

$(-5, 0)$

$(-5, -1)$

$(-5, -2)$

$(-5, -3)$

$(-5, -4)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solutions on grid paper:

1. $(y - 3\sqrt{2})$, $L = 0$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $x = 0$, $y = 0$, $\sin 2$, $\cos 2$.

2. $(x - 3\sqrt{2} \sin 2)(y - 3\sqrt{2} \cos 2) \leq 0$, $xy - 3\sqrt{2}(y \sin 2 + x \cos 2) + 9 \sin 2 \cos 2$.

3. $x, y \leq 5$, $L = 0$, $xy \leq x^2 + y^2$, $\angle = \frac{\pi}{4}$, $\sin 2$.

4. $xy - 3\sqrt{2} y \frac{\sqrt{2}}{2} = 9$, $xy - 3y = 0$, $(x - 3)(y - 3) \leq 0$.

5. $3\sqrt{2} \sin 2$.