



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 3



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
  - $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
  - $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 2, а  $y$  — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 6xy$ .
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$ .  
б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 25$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 35$ .
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (лины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111a \text{ где } a \in \mathbb{Z}, 1 \leq a \leq 9$$

$$A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C - \text{поли. квадрат,}$$

значит дел. на 11 и 101 хотя бы делится

(т.к. 11, 101 — простые).  $a \nmid 101$ ,  $C \nmid 101$

$$\Rightarrow B \mid 101 \Rightarrow B = 606 \quad (\text{т.к. } B \text{ содержит цифру } 6)$$

$$\Rightarrow ABC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 606 \cdot C = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot$$

$$\cdot a \cdot C. \quad a \nmid 11 \Rightarrow C \mid 11 \Rightarrow C = 33 \quad (\text{т.к.}$$

$$C \text{ содержит цифру } 3) \Rightarrow ABC = 2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot a$$

$$\Rightarrow 2a - \text{поли. квадрат} \Rightarrow a = 2 \text{ или } a = 8$$

$$\Rightarrow A = 2222 \text{ или } A = 8888$$

$$\text{Ответ: } (2222, 606, 33), (8888, 606, 33)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\Rightarrow xy = (x-2)(y+2) \text{ — при усл. } mto \quad x \neq 0, x \neq 2, y \neq 0, y \neq -2$$

$$, y \neq -2 \quad \Rightarrow \quad xy = xy - 2y + 2x - 4 \Rightarrow 2(x-y) = 4$$

$$\Rightarrow x - y = 2$$

$$M = \cancel{x^3 - y^3} - 6xy = (x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 - \\ - 6xy = (x-y)^3 + 3xy(x-y-2) = \\ = 8 \quad \text{Отвег: 8}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) \text{ Пусть } \pi x = a, \pi y = b$$

$$(\sin a + \sin b) \sin a = (\cos a - \cos b) \cos a$$

$$\cancel{\sin} \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} \cdot \sin a =$$

$$= \cancel{\sin} \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{b-a}{2} \cdot \cos a$$

$$\Rightarrow \sin a \cdot \cos \frac{a-b}{2} = \cos a \cdot \sin \frac{b-a}{2}$$

$$\cancel{①} \quad \tan a = \tan \left( \frac{b-a}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{b-a}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \pi x = \frac{\pi y - \pi x}{2} + \pi n \Rightarrow x = \frac{y-x}{2} + n$$

$$\Rightarrow 2x = y - x + 2n \Rightarrow 3x = y + 2n$$

$$y = 3x + 2(-n)$$

~~Задача~~. Тогда множество решений

опред. числами  $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ :  $x = t, y = 3t + 2n$ .

~~Доказательство~~

$$② \begin{cases} \cos a = 0 \\ \cos \left( \frac{a-b}{2} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} + n, \quad \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} + m \Rightarrow x-y = 1+2m$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + n - y = 1+2m \Rightarrow y = n - 2m - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} + k \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: 1.  $(t, 3t+2m)$ ,  $t \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$

2.  $(\frac{1}{2} + n, \frac{1}{2} + k)$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$

3)  $\arcsin x + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$   $\Leftrightarrow \arcsin x < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  подходит

любая пара  $(x, y)$  из ОДЗ.

$x, y$ - любые  $\Rightarrow x = t, y = 3t + 2m$ . С

количество параметров  $m$  можно сказать

$y$  любым целым числам такими же

недостатку, что и  $x$ .  $\Rightarrow x = t, y = t + 2k,$

$k \in \mathbb{Z}$ .  $-1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \Rightarrow -6 \leq x \leq 6$

$-1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq y \leq 2$

В диапазоне  $[-6; 6]$  нет четных значений  $x$ ,

которых из которых может соответствовать одно

из 3 четных знач.  $y$  из  $[-2; 2]$ .  $-2 \cdot 3 = 21$  нап.

В  $[-6; 6]$  нет. знач.  $x$ , каждому из которых

может соотв. одно из 2 нет. знач.  $y$  из  $[-2; 2]$ .  $-6 \cdot 2 = 12$  нап.

$21 + 12 = 33$  пары Ответ: 33.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ицтв дою було віднесене до багатої ~~загальн~~

Санкт-Петербург, Россия 101-Бо 17-Января-1988

— n. Тогда раз-бо ~~и~~ усюгаб, козга

herr u Bach weg oda hory my dner

$C_{n-2}^{k-2}$ . Осьле  $\tau_{01-00}$  змогаб -  $C_n^k$ .

Вероятность благоприятного исхода:

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot k!}}{\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}} = \frac{(n-2)! \cdot k!}{n! \cdot (k-2)!} =$$

$$= \frac{k(k-1)}{n(n-1)}. \quad \text{Eben } x - \text{aus - so}$$

Синетаб с Royal верига, то

$$\frac{x(x-1)}{n(n-1)} = \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} \cdot 6 \Rightarrow x(x-1) = 72$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 72 = 0 \quad D = 1 + 288 = 289 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow x = 9 \quad \text{r.a. } x > 4$$

Orber: 9.

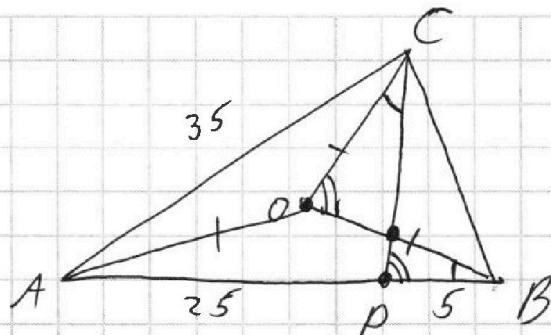
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} & \angle COB = 180 - 2CA \\ & \angle A = \angle B = \angle C \Rightarrow \\ & \Rightarrow \angle CAO = \angle ACO, \angle BAO = \angle ABO \\ & \angle CBO + \angle BCO = 180 - \angle A - \\ & - (\angle ABO + \angle ACO) = 180 - 2\angle A \end{aligned}$$

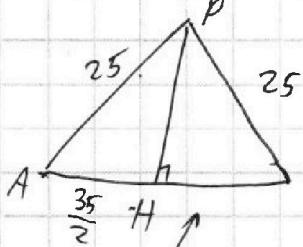
$$\angle COB = 180 - 2CA \quad 180 - (180 - 2\angle A) = 2CA$$

$$\begin{aligned} & R_1 = \text{радиус описан. окр. } (ABC), R_2 = \text{радиус } (BOC) \\ & 2R_1 = \frac{CB}{\sin \angle A}, 2R_2 = \frac{CB}{\sin(2\angle A)} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin(2\angle A)}{\sin \angle A} = 2 \cos \angle A \\ & \angle COB = \angle CPB \text{ как внеш.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \angle CPB = 2\angle A \Rightarrow \angle ADC = 180 - 2\angle A$$

$$\Rightarrow \angle ACP = 180 - \angle A - (180 - 2\angle A) = \angle A$$

$$\Rightarrow AP = CP = 25$$



$$\text{знач} \quad \cos \angle A = \frac{\frac{35}{2}}{25} = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$$

роб. трап.  
бокова сим. с неравенством

т.к.  $ABC$  — остроугольный

$$\Rightarrow \sin \angle A = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} =$$

$$= \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{105\sqrt{51}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит, сумма длин  $yy^2$ , приращающих  $\Phi(d)$

всегда равна половине длины орбиты.

$$R = 13, \frac{2\pi R}{2} = \pi R = \boxed{13\pi}$$

Часто напоминают, что одна часть периметра, принадлежащая прямой  $x = -5\sqrt{2}\cos d$  и  $y = -5\sqrt{2}\sin d$  равна сумме длин отрезков этих прямых, приращающих орбиты, т.е.

$$L = \text{длина} \underbrace{2\sqrt{169 - 50\sin^2 d}}_{\substack{\text{длина} \\ \text{прямой} \\ y = -5\sqrt{2}\sin d}} + \text{длина} \underbrace{2\sqrt{169 - 50\cos^2 d}}_{\substack{\text{длина} \\ \text{прямой} \\ x = -5\sqrt{2}\cos d}}$$

на максимизируем

$$\begin{aligned} & \cancel{L = } \sqrt{169 - 50\sin^2 d} + \sqrt{169 - 50\cos^2 d} = \\ & = -\sqrt{169 - 50\sin^2 d} + \sqrt{169 - 50(1 - \sin^2 d)} = \\ & = \sqrt{169 - 50\sin^2 d} + \sqrt{169 + 50\sin^2 d} \end{aligned}$$

максимизируем  $f(x) = \sqrt{169 - x} + \sqrt{169 + x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{169-x}} + \frac{1}{2\sqrt{169+x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{169-x} = \sqrt{169+x} \\ &= \sqrt{169+x} \Rightarrow 169 - x = 169 + x \Rightarrow 2x = 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow x = 25, f(25) = 24, f(169) = 12\sqrt{2}, f(-169) = \\ & = 12\sqrt{2} \Rightarrow \text{макс. при } x = 25 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow L \leq 2 \cdot 24 = 48, \quad 50 \sin^2 \alpha = 25$$
$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Наименимальное  $M = 13\pi + 48$

Ответ: наим. знач  $M = 13\pi + 48$

при  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 189 \end{cases}$$

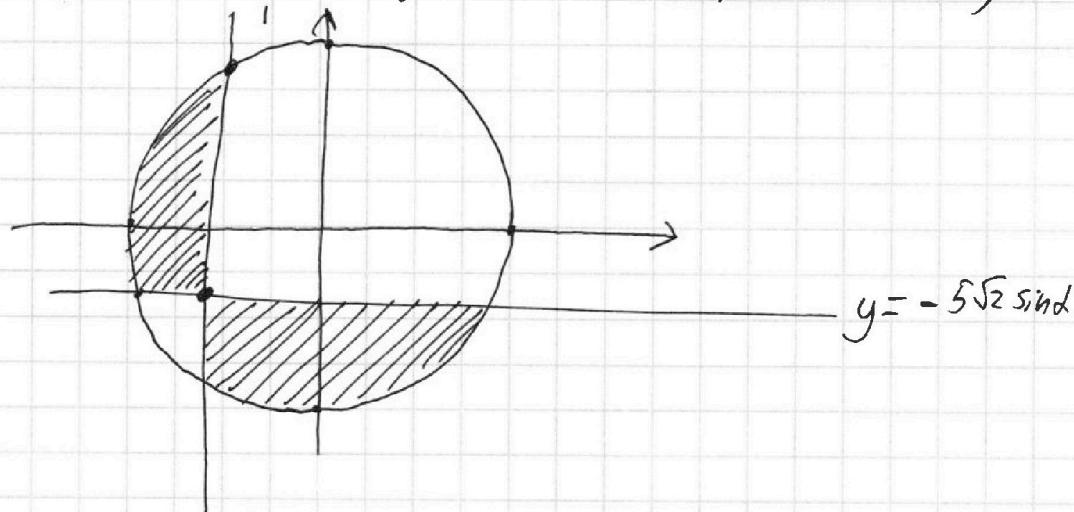
$x^2 + y^2 \leq 189$  — ~~всегда~~ все точки  
внутри окружности с радиусом 13  
и центром в  $(0, 0)$ .

$$(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0$$

— левая верхняя и правая нижняя  
области, ограниченные прямими

$$x = -5\sqrt{2} \cos \alpha, \quad y = -5\sqrt{2} \sin \alpha.$$

Фигура  $\Phi(\alpha)$  выглядит так (закраиной обр.):



$$x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$$

1. пересечение прямых  $(-5\sqrt{2} \cos \alpha, -5\sqrt{2} \sin \alpha)$  всегда имеет  
внутри окружности, т.к.  $50 \sin^2 \alpha + 50 \cos^2 \alpha = 50 < 189$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

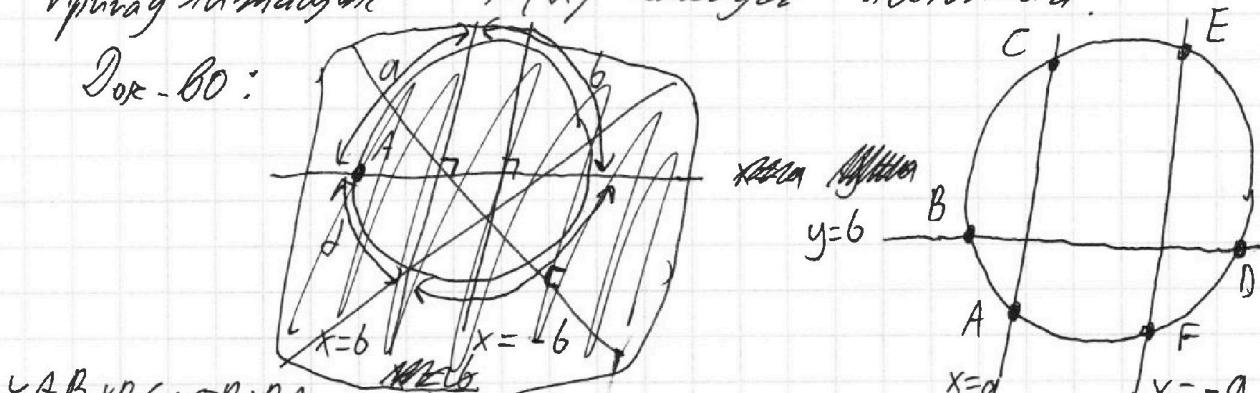
СТРАНИЦА  
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

периметр  $M$  равен сумме  $\checkmark$  длии огрунности, при наложенных  $\Phi(d)$  и длии ограждений ~~ограждений~~ ограждений, при наложенных  $\Phi(d)$ .

Заметим, что сумма длии дуг огрун., при наложенных  $\Phi(d)$  является постоянна.

Док-во:



$\cup AB, \cup BC, \cup CD, \cup DA$  & ~~огражд.~~ — дуги огрунности от пересечения с прямой  $y=6$ ,  $x=6$ . Докажем, что

~~огражд.~~  $\cup AB + \cup CD = \cup BC + \cup AD$ . Рассм  $\checkmark x = -a$ .

Из. симметрии  $\forall$  относительно прямой  $x=0$ :

$\cup ED = \cup BC, \cup AB = \cup FD$ . Из симметрии относ.  $y=0$ :

$$\cup CE = \cup AF \Rightarrow \cup CD - \cup BC = \cup CD - \cup ED =$$

$$= \cup CE = \cup AF = \cup AD - \cup FD = \cup AD - \cup AB$$

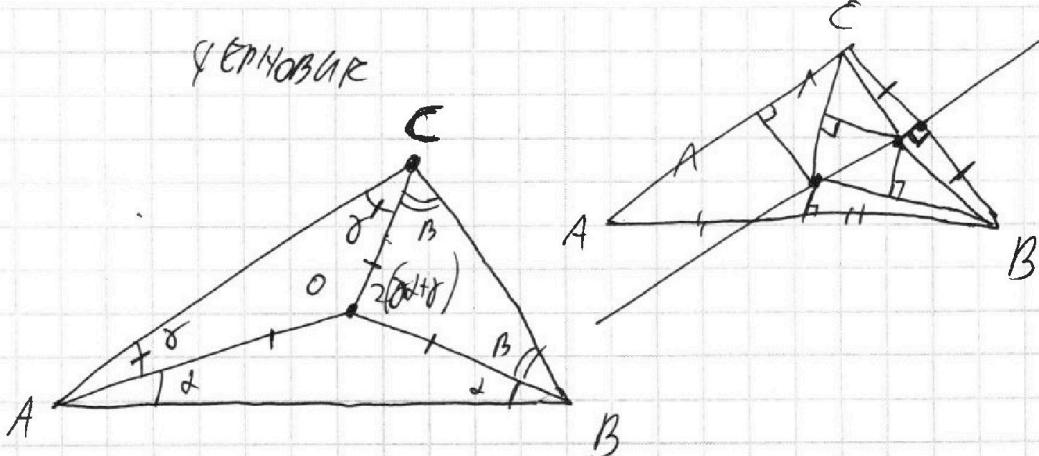
$$\Rightarrow \cup CD - \cup BC = \cup AD - \cup AB \Rightarrow \cup AB + \cup CD = \cancel{\cup AD + \cup BC} \text{ и. г.}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



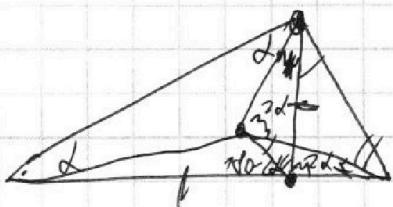
$$360 - (180 - 2\alpha) - (180 - 2\beta) = 2(\alpha + \beta)$$

$$\frac{R_1}{R_2} = R_1 = \frac{CB}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$R_2 = \frac{CB}{\sin(2(\alpha+\beta))} \geq$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin(2(\alpha+\beta))}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2 \sin \cos}{\sin} = 2 \cos$$

$$2 \cos \angle A$$



$$\frac{S}{R_1} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.











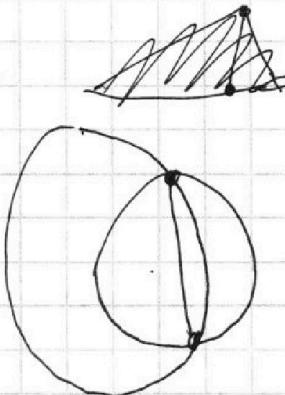
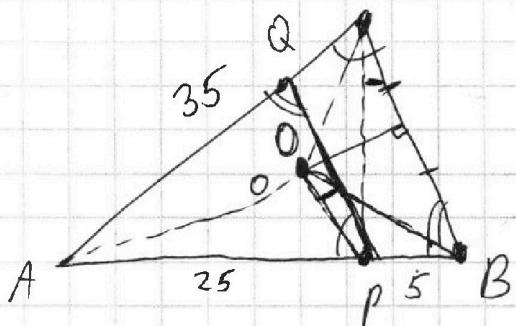
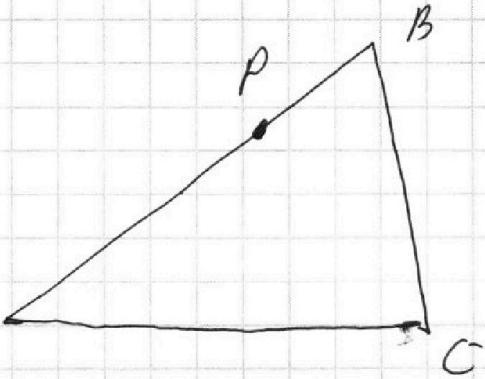
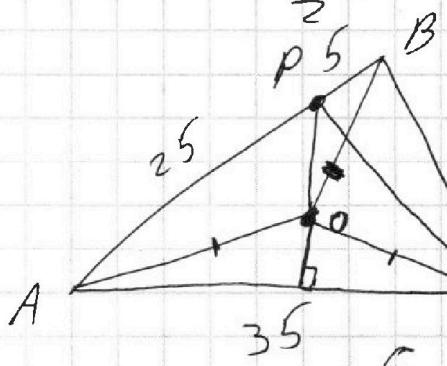
СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = 6 \cdot \frac{72}{n(n-1)}$$

$$k(k-1) = 72 \quad k^2 - k - 72 = 0 \quad k = 1 + 288 = \\ = 289$$

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad k = 9$$

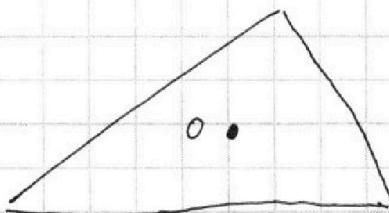


$$AQ \cdot AC = AP \cdot AB$$

$$35A \cdot 35AQ = 25 \cdot 30 = 750$$

$$AQ = \frac{750}{35A} = \frac{750}{7}$$

$$35^2 = 1225 \quad 25^2 = 625$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \frac{\binom{n}{n-2}^2}{\binom{n}{n}} = \frac{\cancel{n(n-1)}}{\cancel{n(n-1)(n-2)(n-3)}} = \frac{12}{(n-2)(n-3)} \\
 & = \frac{(n-2) \cancel{(n-3)(n-2)}}{8} = \frac{12}{n(n-1)} \\
 & \frac{\binom{n}{n-2}^{k-2}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-2)!}{(n-k)!} = \frac{(n-2)!}{(n-k+1)!(k-2)!} = \\
 & = \frac{(n-2)! \cdot (n-k)!(k)!}{n! \cdot (n-k+1)!(k-2)!} = \\
 & = \frac{k!(k-1)}{n(n-1) \cancel{(n-k+1)!(n-k+2)}} = 6 \quad \frac{(n-1)}{k!(k-1)} = \\
 & \frac{n(n-1)}{n!} = \frac{n!}{(n-2)(n-3)} = \\
 & \frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!} = \frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!} = \\
 & \frac{(n-2)! \cdot 2!}{(n-4)! \cdot 4!} = \\
 & \frac{(n-2)! \cdot (n-4)! \cdot 4!}{(n-4)! \cdot 2! \cdot n!} = (n-2) - (k-2) = \\
 & = n - k
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



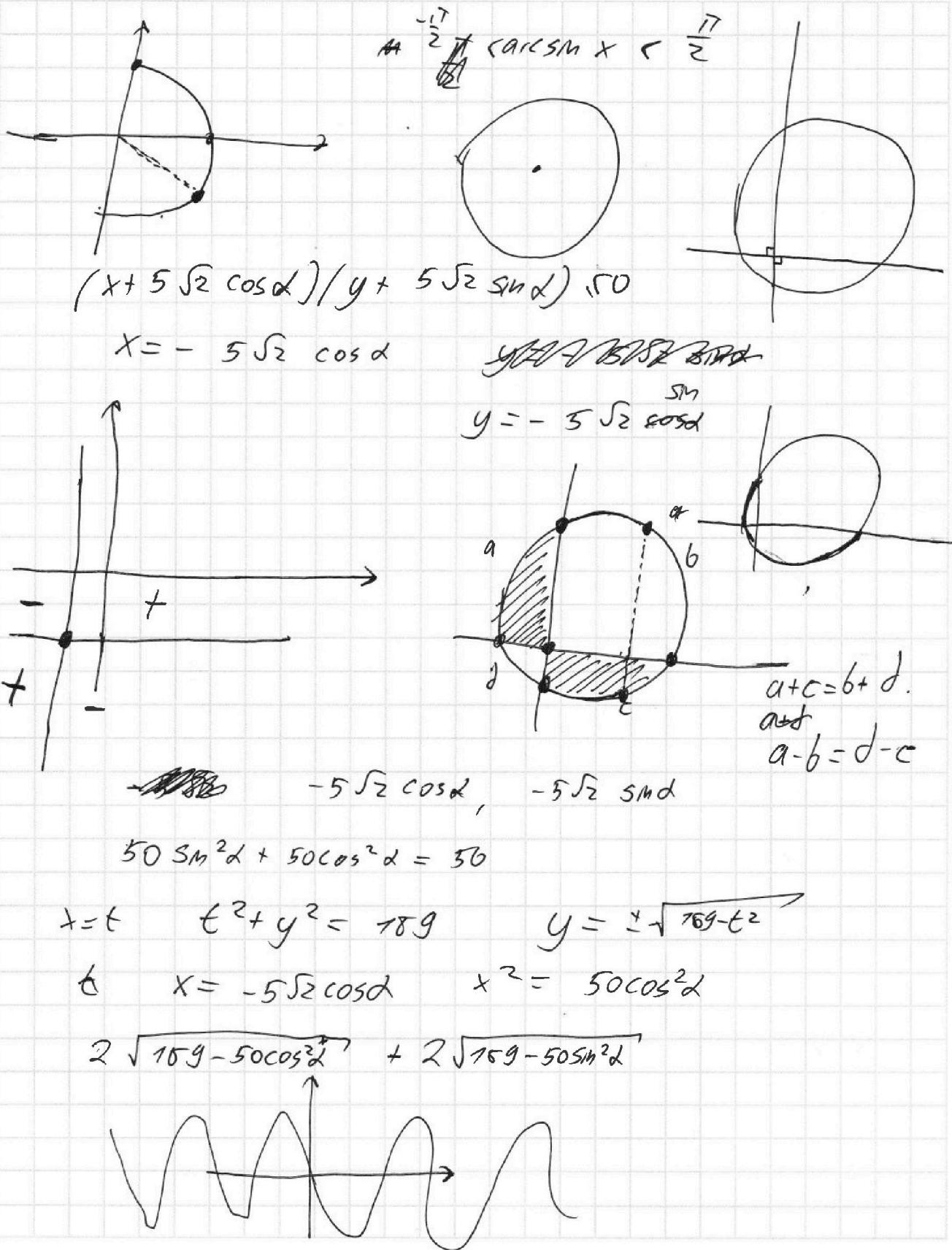







СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

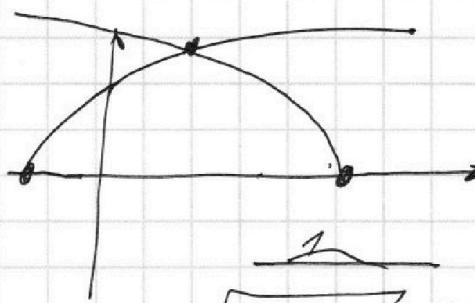
- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{789 - 50(\sin^2 \alpha)} = \sqrt{119 + 50 \sin^2 \alpha} + \sqrt{789 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$\sqrt{119 + x} + \sqrt{789 - x} \rightarrow \cancel{\text{max}}$$



$$159 =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{119+x}} - \frac{1}{2\sqrt{789-x}} = 0$$

$$\sqrt{119+x} = \sqrt{789-x} \Rightarrow 2x = 50 \Rightarrow x = 25$$

$$\sqrt{119+25} + \sqrt{144} = 24$$

$$\therefore x = -119 \quad \sqrt{50} < 24$$

$$\therefore x = \sqrt{119+119} = \sqrt{238} = 12\sqrt{2}$$

$$\sin^2 \alpha = 24 \quad \sin^2 \alpha = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$$

$$\cancel{5} \quad 13 \quad 5 \quad 12 \quad 13$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\cancel{12}}{25} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$n \quad 4$$

$$\bullet \bullet$$

..

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} =$$

$$= \frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{(n-2)! \cdot \cancel{2 \cdot 3 \cdot 4}}{n! \cdot 2} =$$

$$= \boxed{\frac{6}{n(n-1)}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$(\sin x + \sin y) \sin x = (\cos x - \cos y) \cos x$$

$$\frac{\tan x + \tan y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \cos y + \sin y \cos x}$$

$$\frac{\tan x + \tan y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sin(x-y)}{\sin x \cos y - \sin y \cos x}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$$

$$\begin{aligned} x+y &= \alpha & x &= \frac{\alpha+\beta}{2} & y &= \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin x &+ y = \beta \Rightarrow & & & & \end{aligned}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha-\beta}{2} \right)$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = 2 \sin x \sin y$$

$$x-y = \alpha \quad x+y = \beta \quad x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad y = \frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$\cancel{\sin x \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}} = \cancel{\cos x \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{y-x}{2}}$$

$$\sin x \cdot \cos \frac{x-y}{2} = -\cos x \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\Rightarrow \tan x + \tan(y) = \tan x + \tan \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$\tan(y) = \tan \left( \frac{y-x}{2} \right) \quad x = t, \quad y = 3t + 2m$$

$$x = \frac{y-x}{2} + \pi n$$

$$? \quad \cancel{3, 5, 7}$$

~~arcsin~~

$$\arcsin \left( \frac{t}{5} \right) + \arcsin \left( \frac{t+2m}{5} \right) \quad ? \quad ?$$

$$\rightarrow \arcsin \left( \frac{t}{5} \right) + \arcsin \left( \frac{t+2m}{5} \right) \quad t = 1, 2, 3, 4, 5, 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N_1 A = \cancel{1111} \quad 1111 \text{ a } 18059 \quad \frac{\cancel{1111}}{11} = 101$$

$$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C \quad \cancel{1111} \quad B: 101 \quad C: 11$$

$$\cancel{a} \Rightarrow C = 33$$

$$ABC = \cancel{a} \cdot 3a \cdot 11^2 \cdot B \cdot 101 \quad \cancel{3005}$$

$$3 \cdot 101 \cdot a \cdot B \quad B: 101 \quad \cancel{3005} \quad B = 500$$

$$3 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot b$$

$$18a - \text{нен.} \quad \cancel{23^2}$$

20 - нен. вб.

$$4, 10, \quad a=2, \quad a=8$$

$$\text{Ответ: } (2222, 500, 33), (8888, 500, 33)$$

$$N_2 \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{(x-2)(y+2)}$$

Решение. ~~Был~~ убрать по х и по y.

$$x^3 - y^3 - 8xy = \cancel{x^3} (x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 8xy = \\ = (x-y)^3 + 3xy(x-y-2)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4 \Rightarrow 0 = x - y - 2 \Rightarrow x - y = 2$$