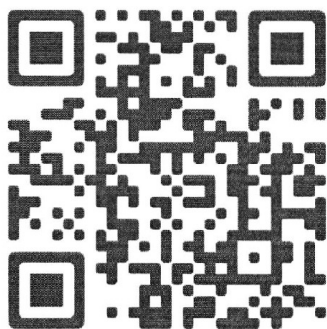




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B \in \{ \overline{b_1 b_2 2} ; \overline{2 b_1 b_2} ; \overline{b_1 2 b_2} \}$$

$$C \in \{ \overline{3c} ; \overline{c3} \}$$

Заметим, что $A = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a$

$$A \cdot B \cdot C = x^2$$

$$A \nmid 101^2, A : 101 \quad C \nmid 101 \text{ т.к. } C < 100$$

Тогда т.к. 101 — простое и $x^2 : 101^2$, то

$$B : 101 \Rightarrow B = b \cdot 101 \quad \text{и } B \text{ — трехзначное} \Rightarrow$$

$\Rightarrow B \in \{ 101; 202; 303; \dots; 909 \}$. Так как B содержит цифру 2, то однозначно $B = 202$

Тогда $B \nmid 11, A : 11, A \nmid 11^2$, 11 — простое и $x : 11^2$,

значит $C : 11$. Тогда $C = c \cdot 11$ и $C < 100$,

значит $C \in \{ 11; 22; 33; \dots; 99 \}$. C содержит цифру 3, значит однозначно $C = 33$.

$$A \cdot B \cdot C = x^2$$

$$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = x^2$$

$$a \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 101^2 = x^2$$

$$a \cdot 2 \cdot 3 = d^2$$

$$a = 2 \cdot 3 \cdot \xi^2$$

при $\xi^2 = 1 \quad a = 6$, при $\xi^2 \geq 4 \quad a \geq 24$
(ξ — цел. число) не цифра

Тогда единств. вариант $A = 6666 \quad B = 202 \quad C = 33$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(y+1)} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \quad | \quad xy(x-1)(y-1)$$

$$x, y \neq 0 \quad x \neq 1 \quad y \neq -1$$

$$xy \frac{(y+x+2)(x-1)(y+1)}{xy} = \frac{(y+1+x-1+2)xy(x-1)(y+1)}{(x-1)(y+1)}$$

Без учета ОДЗ:

$$(y+x+2)(x-1)(y+1) = (y+x+2)xy$$

$$y+x+2=0$$

$$y+x=-2 \quad \text{при } y \neq -1$$

$$y=-x-2 \quad x \neq -1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy =$$

$$= x^3 - (-x-2)^3 - 3x(-x-2) =$$

$$= x^3 + (x+2)^3 + 3x(x+2) =$$

$$= 2x^3 + 9x^2 + 18x + 8$$

$$\text{при } x > 0 \quad M > 8$$

Вспомним про ОДЗ:

$$x \neq 1$$

$$M(1) \neq 2 + 9 + 18 + 8 = 37$$

$$\text{т.е. } M \in \{1\} \cup (8; \infty) \setminus \{37\} - \text{это и есть ответ.}$$

$$(x-1)(y+1) = xy$$

$$xy + x - y - 1 = xy$$

$$x - y = 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy =$$

$$= x^3 - y^3 - 3xy \cdot 1 =$$

$$= x^3 - y^3 - 3xy(x-y) =$$

$$= (x-y)^3 = 1^3 = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☒☐☐☐☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

для простоты обозначим $a = \pi x$
 $b = \pi y$

$$\sin^2 a + \sin b \sin a = \cos^2 a + \cos b \cos a$$

$$\sin b \sin a - \cos b \cos a = \cos a \cos a - \sin a \sin a$$

Заметим, что $\cos b = -\cos a$ и $\sin b = -\sin a$ — решение

в таком случае ~~$a = b$~~ $a = b + \pi(2k+1)$

$$\pi x = \pi y + \pi(2k+1) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = y + 2k+1$$

Т.е. подходят все такие $(x; y)$, что $x - y = 2k+1$
 $k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

Пусть всего одинадцатиклассников n . Тогда, вероятность того, что выберут и Васю и Петю при k билетах равна

$$P(k) = \frac{\cancel{(n-2)}! \cancel{(n-2)}}{\cancel{2!}} \cdot \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot (k-2)!} \cdot \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

т.к. Васю и Петю уже выбрали, осталось выбрать $k-2$ из остальных $n-2$ людей

$$= \frac{(n-2)!}{(k-2)!} \cdot \frac{k!}{n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

— это вероятность

во втором случае.

В первом случае $k=4$ и известно, что

$$P(4) \cdot 2,5 = P(k)$$

$$P(4) = \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}$$

$$2,5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

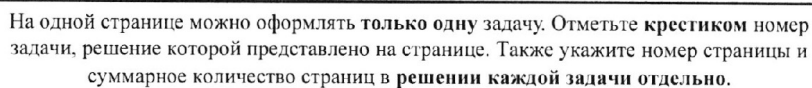
$$\frac{5}{2} \cdot 4 \cdot 3 = k(k-1)$$

$$5 \cdot 6 = k(k-1)$$

$k=6$

$k=-5$

$k > 0 \Rightarrow$ одно решение подходит т.е. $k=6$
(ответ: 6 билетов)



7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A hand-drawn geometric diagram on grid paper. It features a large circle representing a sphere. Points A, B, and C are on the circumference. Point P is on the upper-left part of the sphere, and point D is on the lower-right part. Lines connect A to B, A to C, B to C, A to P, A to D, B to P, B to D, and C to D. Angles are labeled: $\frac{15}{2}$ at point A, $\frac{11}{2}$ at point P, $\frac{5}{2}$ at point B, and α at point D. Arcs are labeled w_1 and w_2 . A line segment is labeled g .

-

$$AK = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{PH}{AP} = \frac{\sqrt{AP^2 - AH^2}}{AP} = \frac{\sqrt{15^2 - 9^2}}{15} = \frac{4}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Площадь $\triangle ABC$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right) \cdot g =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{15+10}{2} \cdot g = (3+2) \cdot g = 45$$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 45$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

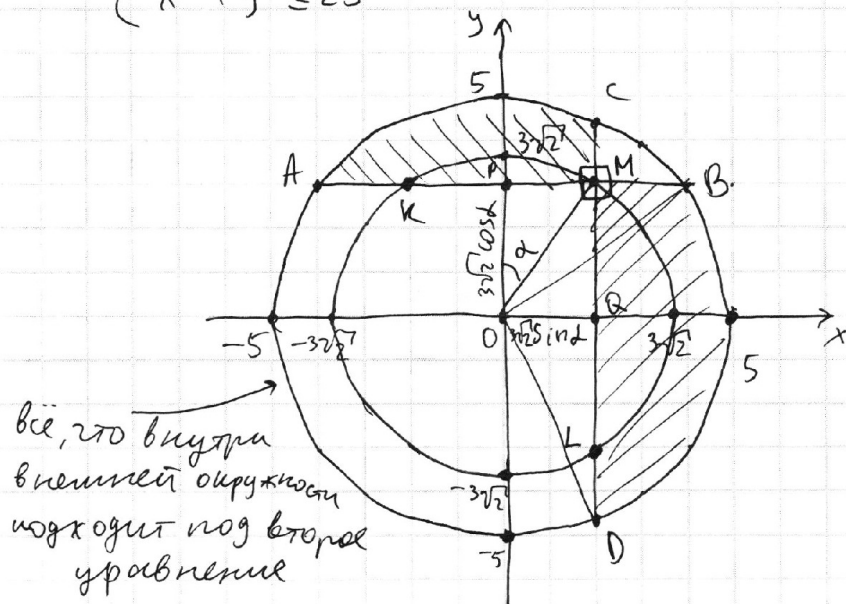
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$



Заштрихованная область — то, что подходит по условию для произвольного α . Для удобства будем откладывать угол, равный α от оси OY по часовой стрелке.

Заметим, что так как углы $\angle CMB = \angle BMD = \angle DMA = \angle AMC = 90^\circ$, то $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{AD} = 5\pi = \text{const}$ (половина длины окружности, радиусом 5)

Тогда, чтобы найти максимальное значение



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

периметра всей заштрихованной части,
нужно найти максимум выражения

$$AM + CM + BM + DM = AB + CD$$

Заметим, что $AK = MB$, из симметрии, и $CM = DL$

$$KM = 2 \cdot 3\sqrt{2} \sin \angle = 6\sqrt{2} \sin \angle$$

$$\Rightarrow ML = 2 \cdot 3\sqrt{2} \cos \angle = 6\sqrt{2} \cos \angle$$

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (3\sqrt{2} \cos \angle)^2 = 25 \quad \text{из } \triangle OPB \quad P - \text{середина } AB$$

$$\left(\frac{CD}{2}\right)^2 + (3\sqrt{2} \sin \angle)^2 = 25 \quad \text{из } \triangle OQD \quad Q - \text{середина } CD$$

$$\frac{AB^2}{4} + 18 \cos^2 \angle = 25$$

$$\frac{CD^2}{4} + 18 \sin^2 \angle = 25$$

) сложим!

$$\frac{AB^2 + CD^2}{4} + 18 = 50$$

$$AB^2 + CD^2 = 9 \cdot (50 - 18) = 9 \cdot 32 = 128$$

$$(AB + CD)^2 = AB^2 + CD^2 + 2AB \cdot CD$$

$$(AB + CD)^2 = 128 + 2AB \cdot CD$$

$AB \cdot CD$ - макс при $AB = CD$ (при $AB^2 + CD^2 = \text{const}$)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получаем

$$2AB^2 = 128$$

$$AB^2 = 64$$

$$AB = 8$$

$$\frac{AB}{2} = 4$$

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (3\sqrt{2} \cos \alpha)^2 = 25$$

$$16 + 18 \cos^2 \alpha = 25$$

$$18 \cos^2 \alpha = 9$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \text{ или}$$

~~или~~

Тогда макс. периметр равен

$$M = 5\pi + 2AB = 5\pi + 16$$

и достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $M = 5\pi + 16$, при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$



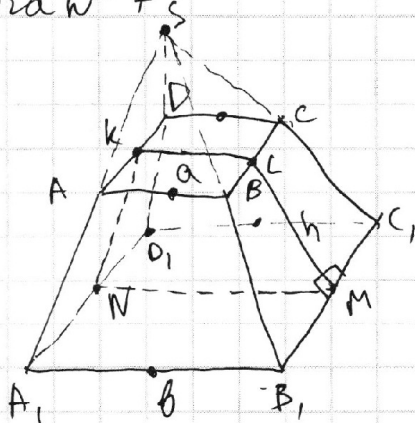
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 7



Поскольку усеченная пирамида правильная,
то шар Ω касается всех её рёбер в их серединах,
~~и шар Ω касается всех её граней в их серединах~~

Решение $AB_1 \parallel C_1D_1$, $BC_1 \parallel AD_1$

$BC_1 \parallel AD_1 \parallel A_1D_1 \parallel B_1C_1$

$MN \parallel KL \parallel AB$

$KL = AB$ $MN = A_1B_1$

$NK \perp LM = S$ — вершина пирамиды, которую отсекает

$KLMN$ — трапеция, причем вписанная

и описанная

$\square ABB_1A_1 = \square B_1BCC_1B_1 = \square C_1CDD_1C_1 = \square D_1DA_1D_1$ —

Все они равнобокие трапеции с высотой

$h = LM = KN$ и основаниями $a = AB = BC = CD = AD$

и $b = A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

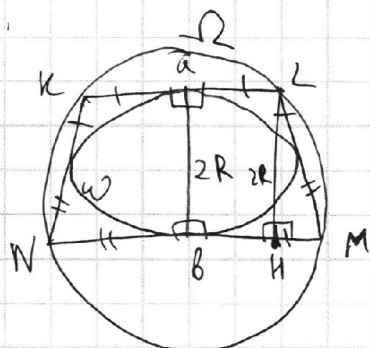
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что т.к. $KL MN$ — описанная ^{трапеция} то $KL + MN = KN + LM$ т.е.

$$a + b = 2h$$

$$h = \frac{a+b}{2}$$

$$S_{ABCD} = a^2$$

$$S_{A,B,C,D} = b^2$$

$$S_{\text{ок}} = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h = 4 \cdot \frac{(a+b)^2}{4} = (a+b)^2$$

$$\frac{S_{\text{ок}}}{S_{A,B,C,D}} = \left(\frac{a+b}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b} + 1\right)^2$$

$$LN^2 + MN^2 = LM^2 \quad (LN - \text{перпендикуляр к } MN)$$

R — радиус вписанной шара

$$(2R)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \quad | \cdot 4$$

$$16R^2 + (b-a)^2 = (b+a)^2$$

$$16R^2 - 2ba = 2ba$$

$$4R^2 = ab$$

Предположительно $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, но не знаю, как доказать и вообще правда ли это

Тогда

$$\frac{S_{\text{ок}}}{S_{A,B,C,D}} = \left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 = \frac{9}{4}$$



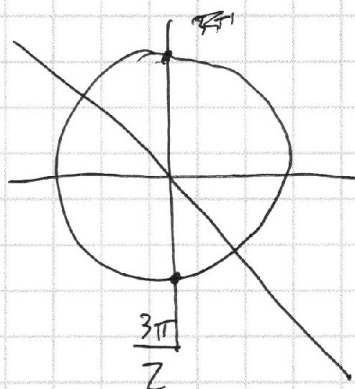
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

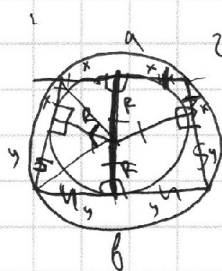
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$



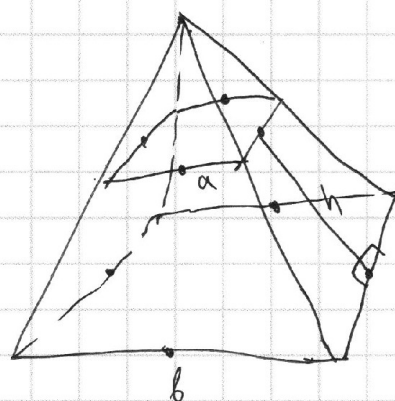
$$x = -y$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{-x}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

~~ХАСС~~

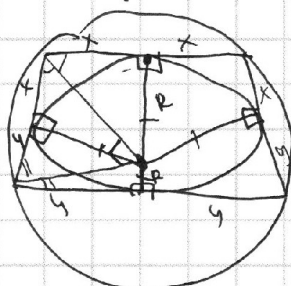


$$2h = a + b$$



$$ab = 2x \cdot 2y = 4xy$$

$$h^2 = x^2 + 2xy + y^2 =$$
$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{ab}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$



$$S_{\text{пол}} = a^2 + b^2$$

$$S_{\text{пол}} = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h = 2h(a+b) =$$
$$= (a+b)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

1 решено $A = \overline{aaaa}$
2 P 3
3 без $A \cdot B \cdot C = x^2$
4 P 3
5 P 3
6 P 3
7 P 3

$B = \overline{0,62}$
 $C = \overline{33}$

$A : 1111$ $1111 = 11 \cdot (101) = 1100 + 11 = 1111$ 101 - простое

$A : 11 \cdot 101$ $A = a \cdot 11 \cdot 101$ $A \cdot 101^2$ $A \cdot 11^2$

$x^2 : 101^2$ $x^2 : 11^2$ т.к. 101 и 11 простые

$C \cdot 101$ т.к. $C < 101 \Rightarrow B : 101 \Rightarrow B \in \{1 \cdot 101, \dots, 9 \cdot 101\}$
 B есть $2 \Rightarrow B = 202$

$A = a \cdot 11 \cdot 101$
 $B = 2 \cdot 101$ $B : 11 \Rightarrow C : 11$ $C \in \{1 \cdot 11, \dots, 9 \cdot 11\}$
 $C = 3 \cdot 11$ C есть $3 \Rightarrow C = 33$

тогда чтобы $ABC = x^2$

$a \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 101^2 = x^2$ $a \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \Rightarrow a = 2 \cdot 3 \cdot 2^2$
если $2 = 1$, то $a = 6$
если $2 = 4$, то $a = 24$ - не цифра

Единств. вариант $A = 6666$
 $B = 202$
 $C = 33$

N2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(y+1)} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{xy+x-y-1}$$

$$y(x-1)(y+1) + x(x-1)(y+1) + 2(x-1)(y+1) = xy(y+1) + xy(x-1) +$$

$$+ 2xy$$

$$y(xy+x-y-1) + x(xy+x-y-1) + 2(xy+x-y-1) = xy(y+1+x-1+2) = xy(y+x+2)$$

$$(y+x+2)(xy+x-y-1) = xy(y+x+2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+x-y-1=xy \\ \begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{гдл } x-y=1$$

$$x^3-y^3-3xy=$$

$$=x^3-y^3-3xy(x-y)=$$

$$=(x-y)^3=1$$

$$x^3-y^3-3xy$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)-3xy$$

$$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=$$

$$=x^3-y^3-3xy(x-y)$$

$$\cancel{x^3-y^3-3xy}$$

$$y=x-1$$

$$x-1=-2-x$$

$$2x=-1 \quad x \neq -\frac{1}{2}$$

$$x^3-(-2-x)^3-3(-2-x)x=$$

$$=x^3+(2+x)^3+3(2+x)x=$$

$$=x^3+x^3+3x^2 \cdot 2+3x \cdot 4+8+6x+3x^2=2x^3+9x^2+18x+8$$

$$x \neq -2$$

$$x \neq 0 \quad x \neq 1$$

$$\text{гдл } x > 0$$

$$M > 8$$

$$M \neq 2+9+18+8=37$$

$$M \neq 2 \cdot -\frac{1}{8} + 9 \cdot \frac{1}{4} - 18 \cdot \frac{1}{2} + 8 =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{9}{4} - 9 + 8 =$$

$$= \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

$$M \in \{1\} \cup (8; +\infty) \setminus \{37\}$$

всего...

W3

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\cancel{\sin \pi x} \cdot \text{tg} \pi x = \frac{\cos \pi x + \cos \pi y}{\sin \pi x + \sin \pi y}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 1 & \cos \pi x = \sin \pi x + 2 \\ 2 & (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\ 4 & \cos \pi x + \cos \pi y \\ 5 & \sin \pi x + \sin \pi y \\ 6 & (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\sin \pi x + 1 + \cos \pi y) (\sin \pi x + 2) \cos \pi x = -\cos \pi y \\ & \sin \pi x = -\sin \pi y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 & \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} + \frac{\cos \pi y}{\sin \pi y} \\ 7 & \sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \sin^2 \pi x + 2 \sin \pi x + 2 + \sin \pi x \cos \pi y + 2 \cos \pi y \\ & \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} \cdot \left(\frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} + \frac{\cos \pi y}{\sin \pi y} \right) = \frac{1}{\cos \pi y} + \frac{1}{\cos \pi x} \end{aligned}$$

$$\frac{\cos^2 \pi x}{\sin \pi y} + \frac{\cos \pi x \cos \pi y}{\sin \pi x} + \frac{1}{\cos \pi y} + \frac{1}{\cos \pi x}$$

$$\begin{aligned} a_1 < a_2 \\ b_1 < b_2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 > a_2 b_1 + a_1 b_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\cos \pi x \cos \pi y - 1}{\cos \pi x} = \frac{1 - \cos^2 \pi x}{\cos \pi y}$$

$$\cos \pi y \cos \pi x \cos \pi y - \cos \pi y = \cos \pi x - \cos \pi x \cos^2 \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\begin{aligned} \sin \pi x \sin \pi y - \cos \pi x \cos \pi y &= \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \cos(2\pi x) \\ \cos \pi x \sin \pi y - \cos \pi y &= \cos \pi x - \cos \pi x \sin \pi x \end{aligned}$$

$$\cos \pi x (\sin \pi y + \sin \pi x) = \cos \pi x + \cos \pi y$$

$$\sin \pi x \cos \pi x$$

$$\sin \pi x \sin \pi y - \cos \pi x \cos \pi y = \cos 2\pi x$$

$$\cos \pi y = -\cos \pi x \quad \sin \pi y = -\sin \pi x$$

1-е решение!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4 4 балла

n кк

$$\pi x = a \quad \pi y = b$$

$$\sin^2 a (\sin a + \sin b)^2 = \cos^2 a (\cos a + \cos b)^2$$

$$2,5 p_1 = p_2$$

$$\sin^4 a + 2 \sin^3 a \sin b + \sin^2 a \sin^2 b =$$

$$\cos^4 a + 2 \cos^3 a \cos b + \cos^2 a \cos^2 b -$$

$$- \sin^2 a \cos^2 a - 2 \sin^2 a \cos a \cos b - \sin^2 a \cos^2 b$$

$$p_1 = \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}{n \cdot (n-1) \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{4!}} = \frac{2 \cdot 4!}{n(n-1)} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{n^2 - n}$$

$$= \frac{48}{n(n-1)} \cdot \frac{(n-2)(n-3) \cdot (n-k+1)}{(k-2)!} =$$

$$p_k = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

$$2 \cdot \frac{4!}{n(n-1)}$$

$$p_1 = \frac{4!}{2 \cdot n(n-1)}$$

$$p_2 = \frac{k!}{(k-2)! \cdot n(n-1)} =$$

$$2,5 \cdot \frac{4-3}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$\frac{5}{2} \cdot 12 = k(k-1)$$

$$2,5 \cdot 12 = k(k-1)$$

$$5 \cdot 6 = k(k-1) \quad (k=6)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

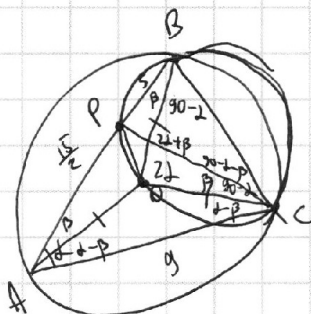
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

W5

1
2
5



$$\begin{aligned} 90-l-\beta+2\beta &= \\ &= 90-l+\beta \\ &90+l-\beta \end{aligned}$$

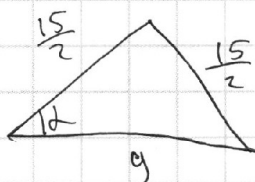
$$180-2l+2\beta+2l+180-2\beta$$

$$90-l+\beta$$

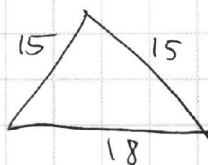
l

$$90-\beta$$

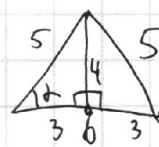
$$\frac{\sin(90-\beta)}{\frac{15}{2}+5} = \frac{\sin(90-l+\beta)}{9}$$



(=)



(=)



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sin l \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{15}{2}+5\right) \cdot 9 = \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{15+10}{2} \cdot 9 = 9 \cdot (3+2) = 9 \cdot 5 = 45 \end{aligned}$$

$\sin l = \frac{4}{5}$

S=45



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

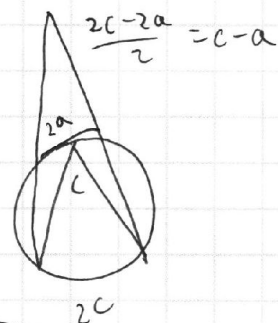
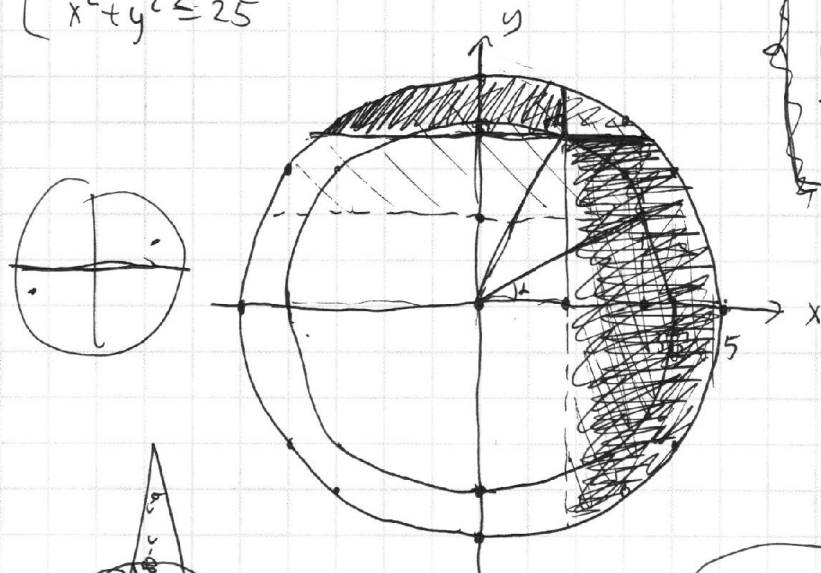
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin t)(y - 3\sqrt{2} \cos t) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 3\sqrt{2} \cos t \\ x \geq 3\sqrt{2} \sin t \end{cases}$$
$$\begin{cases} y \leq 3\sqrt{2} \cos t \\ x \geq 3\sqrt{2} \sin t \end{cases}$$

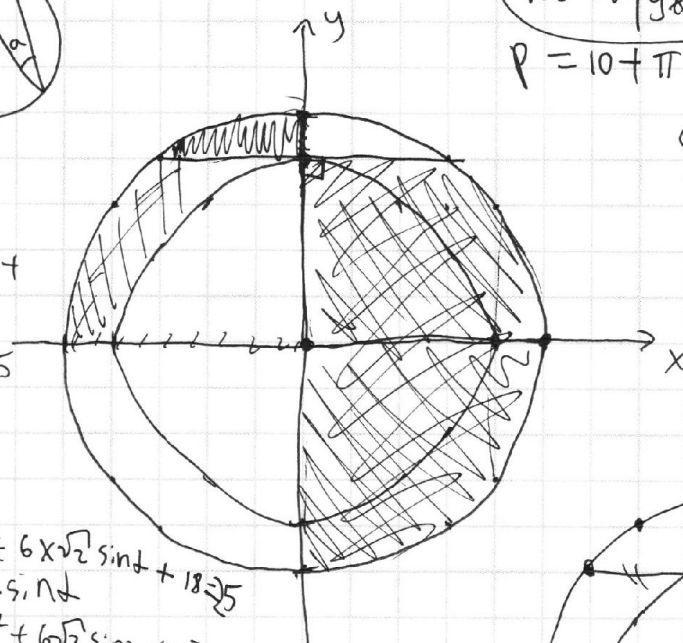


по окружности $\ell = \pi \cdot 5 = 5\pi$
 $P = 10 + \pi \cdot 5 + \text{всрга}$

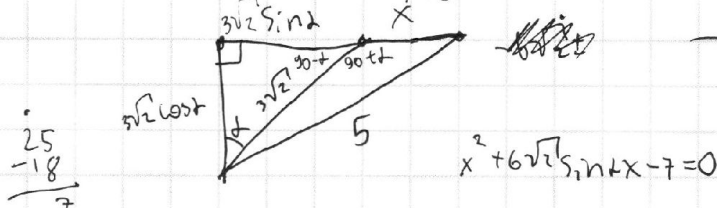
$$S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2$$

$P_{\max}$

$$(x + 3\sqrt{2} \sin t)^2 + (y + 3\sqrt{2} \cos t)^2 = 25$$



$$\begin{aligned} x^2 + 6x\sqrt{2} \sin t + 18 &= 25 \\ \cos(90+t) &= -\sin t \\ x^2 + 6\sqrt{2} \sin t x - 7 &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 25 &= 9 \cdot 2 + x^2 + 2 \cdot 3\sqrt{2} x \sin t \\ 7 &= x^2 + 6\sqrt{2} x \sin t \end{aligned}$$

