



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (лины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B \in \{ \overline{b_1 b_2 2} ; \overline{2 b_1 b_2} ; \overline{b_1 2 b_2} \}$$

$$C \in \{ \overline{3C} ; \overline{C3} \}$$

$$\text{Заметим, что } A = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a$$

$$A \cdot B \cdot C = x^2$$

$$A \nmid 101^2, A \mid 101 \quad C \nmid 101 \text{ т.к. } C < 100$$

Тогда т.к. 101 — простое и $x^2 \mid 101^2$, то

$$B \mid 101 \Rightarrow B = p \cdot 101 \text{ и } B \text{ трехзначное} \Rightarrow$$

$\Rightarrow B \in \{ \overline{p101} ; \overline{202} ; \overline{303} ; \dots ; \overline{909} \}$. Так как B содержит цифру 2, то B однозначно $B = 202$

Тогда $B \nmid 11$, $A \mid 11$, $A \nmid 11^2$, 11 — простое и $x \mid 11^2$,

значит $C \mid 11$. Тогда $C = c \cdot 11$ и $C < 100$,

значит $C \in \{ 11 ; 22 ; 33 ; \dots ; 99 \}$. C содержит цифру 3, значит однозначно $C = 33$.

$$A \cdot B \cdot C = x^2$$

$$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = x^2$$

$$a \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 101^2 = x^2$$

$$a \cdot 2 \cdot 3 = d^2$$

$a = 2 \cdot 3 \cdot \xi^2$ при $\xi^2 = 1$ $a = 6$, при $\xi^2 \geq 4$ $a \geq 24$ (ξ-крайнее) начиная



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(y+1)} + \frac{2}{\cancel{(x-1)(y+1)}} \quad | \quad xy(x-1)(y+1)$$

$$x, y \neq 0 \quad x \neq 1 \quad y \neq -1$$

$$\frac{xy(y+x+2)(x-1)(y+1)}{xy} = \frac{(y+1+x-1+2)xy(x-1)(y+1)}{(x-1)(y+1)}$$

Без учёта ОДЗ:

$$(y+x+2)(x-1)(y+1) = (y+x+2)xy$$

$$y+x+2=0 \quad \leftarrow$$

$$(x-1)(y+1) = xy \quad \rightarrow$$

$$\begin{aligned} y+x &= -2 & \text{при } y \neq -1 \\ y &= -x-2 & x \neq -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy+x-y-1 &= xy \\ x-y &= 1 \end{aligned}$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy =$$

$$= x^3 - (-x-2)^3 - 3x(-x-2) =$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy =$$

$$= x^3 - y^3 - 3xy \cdot 1 =$$

$$= x^3 + (x+2)^3 + 3x(x+2) =$$

$$= x^3 - y^3 - 3xy(x-y) =$$

$$= 2x^3 + 9x^2 + 18x + 8$$

$$= (x-y)^3 = 1^3 = 1$$

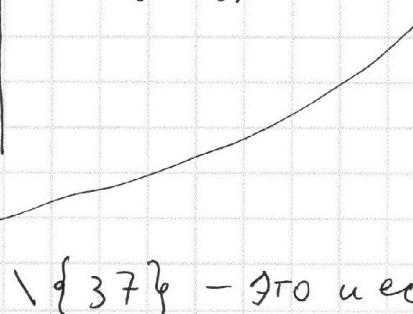
при $x > 0 \quad M > 8$

Вспомним про ОДЗ:

$$x \neq 1$$

$$M(1) = 2 + 9 + 18 + 8 = 37$$

т.е. $M \in \{1\} \cup (8; +\infty) \setminus \{37\}$ — это и есть ответ.



I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

для простоты обозначений $a = \pi x$
 $b = \pi y$

$$\sin^2 a + \sin b \sin a = \cos^2 a + \cos b \cos a$$

$$\sin b \sin a - \cos b \cos a = \cos a \cos a - \sin a \sin a$$

Заметим, что $\cos b = -\cos a$ и $\sin b = -\sin a$ —
решение

$$b \text{ такое что } \cancel{a = b} \quad a = b + \pi(2k+1)$$

$$\begin{aligned} \pi x &= \pi y + \pi(2k+1) \\ x &= y + 2k+1 \end{aligned} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Т.е. получаем все такие (x, y) , что $x - y = 2k+1$
 $k \in \mathbb{Z}$

I-

I-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 4

Пусть всего одиннадцати билетов n . Тогда, вероятность того, что выберут и Васю и Петю при k билетах равна

$$P(k) = \frac{\binom{n-2}{k-2} \binom{n-3}{2}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-2)!}{(n-k)! (k-2)!} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot k!}$$

т.к. Васю и Петю
 уже выбрали, остались
 выбрать
 оставших
~~когда~~ k модей

$$= \frac{(n-2)!}{(n-k)!} \cdot \frac{k!}{n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \rightarrow \text{то вероятность}$$

во втором случае.

В первом случае $k = 4$ и известно, что

$$P(4) \cdot 2,5 = P(k)$$

$$P(4) = \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}$$

$$2,5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$\frac{5}{2} \cdot 4 \cdot 3 = k(k-1)$$

$$5 \cdot 6 = k(k-1)$$

$\nearrow k=6$

$\searrow k=-5$

$k > 0 \Rightarrow$ одно решение подходит т. к. $k=6$
 (Ответ: 6 билетов)



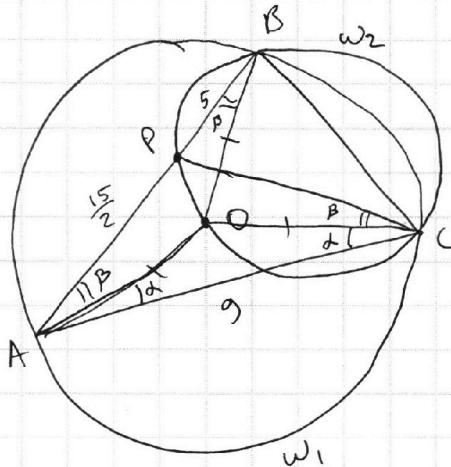
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5



1) О-центр описанной окружности $\triangle ABC \Rightarrow$

$$\Rightarrow AO = BO = OC \Rightarrow \angle OAB = \angle OBA = \beta,$$

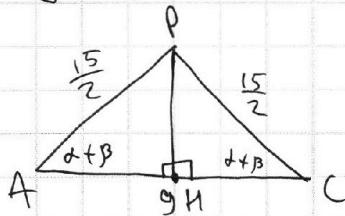
$$\angle OAC = \angle OCA = \delta$$

2) $\angle ABO = \angle PBO$ отражен на \overarc{PO}
 $\angle PCO$ отражен на \overarc{PO} } $\Rightarrow \angle PBO = \angle PCO = \beta$

3) Тогда заметим, что $\angle PAC = \angle PAO + \angle OAC = \beta + \delta =$

$$= \angle PCA + \angle OCA = \angle PCA \text{ т.е. } \triangle PAC: PA = PC = \frac{15}{2}$$

4) $\triangle PAC:$



PH - медиана и высота т.к. $\triangle PAC$ -равн.

$$AH = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\sin \delta = \frac{PH}{AP} = \frac{\sqrt{AP^2 - AH^2}}{AP} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{15^2 - 9^2}}{15} = \frac{4}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Треугольник $\triangle ABC$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right) \cdot 9 = \\ = \frac{2}{5} \cdot \frac{15+10}{2} \cdot 9 = (3+2) \cdot 9 = 45$$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 45$



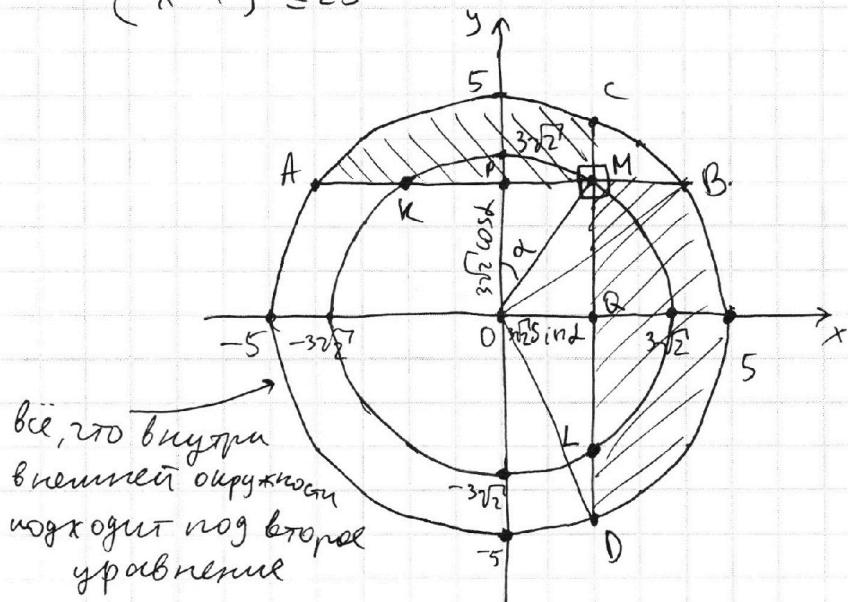
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha) (y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$



Все, что внутри внешней окружности подходит под второе уравнение

Заштрихованная область — то, что подходит по условию для произвольного α . Мне удобнее будем откладывать угол, равный α от оси OY по часовой стрелке.

Заметим, что так как угол $\angle CMB = \angle BMD = \angle DMA = \angle AMC = 90^\circ$, то $\overset{\text{arc}}{AC} + \overset{\text{arc}}{BD} = \overset{\text{arc}}{CB} + \overset{\text{arc}}{AD} = 5\pi = \text{const}$ (половина длины окружности, радиусом 5)

Тогда, чтобы найти максимальное значение

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

периметра всей заштрихованной части,
нужно найти максимальное выражение

$$AM + CM + BM + DM = AB + CD$$

Заметим, что $AK = MB$, из симметрии, и $CM = DL$

$$KM = 2 \cdot 3\sqrt{2} \sin \angle = 6\sqrt{2} \sin \angle$$

$$\Rightarrow ML = 2 \cdot 3\sqrt{2} \cos \angle = 6\sqrt{2} \cos \angle$$

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (3\sqrt{2} \cos \angle)^2 = 25 \quad \text{из } \triangle OPB \quad P - \text{середина } AB$$

$$\left(\frac{CD}{2}\right)^2 + (3\sqrt{2} \sin \angle)^2 = 25 \quad \text{из } \triangle OQD \quad Q - \text{середина } CD$$

$$\frac{AB^2}{4} + 18 \cos^2 \angle = 25$$

) можно!
 $\frac{CD^2}{4} + 18 \sin^2 \angle = 25$

$$\frac{AB^2 + CD^2}{4} + 18 = 50$$

$$AB^2 + CD^2 = 50 \quad 9 \cdot (50 - 18) = 9 \cdot 32 = 128$$

$$(AB + CD)^2 = AB^2 + CD^2 + 2AB \cdot CD$$

$$(AB + CD)^2 = 128 + 2AB \cdot CD$$

$AB \cdot CD$ - макс при $AB = CD$ ($\text{при } AB^2 + CD^2 = \text{const}$)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Полусумм

$$2AB^2 = 128$$

$$AB^2 = 64$$

$$AB = 8$$

$$\frac{AB}{2} = 4$$

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (3\sqrt{2} \cos \alpha)^2 = 25$$

$$16 + 18 \cos^2 \alpha = 25$$

$$18 \cos^2 \alpha = 9$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \text{ при } k \in \mathbb{Z}$$

Ответ

Тогда макс. периметр равен

$$M = 5\pi + 2AB = 5\pi + 16$$

и достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $M = 5\pi + 16$, при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$



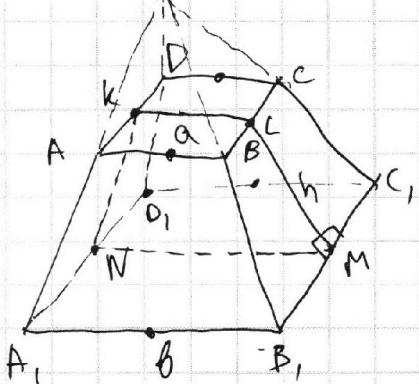
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 7



Пак как усеченная пирамида правильна,
то шар Ω касание всех её рёбер в их серединах,
~~и касание всех её граней в их серединах~~

Пак $A, B, \parallel C, D, \parallel C D \parallel A B$

$B C \parallel A D \parallel A, D, \parallel B, C,$

$M N \parallel K L \parallel A B$

$K L = A B \quad M N = A, B$

$N K \parallel L M = S$ - вершина

пирамиды, которую отсекли

$K L M N$ - трапеция, причем вписанная

и описанная

$\square A B B, A, = \square B, B C C, B, = \square C D D, C, = \square D A A, D, -$

Все они равнобокие трапеции с высотой

$h = L M = K N$ и основаниями $a = A B = B C = C D = A D$

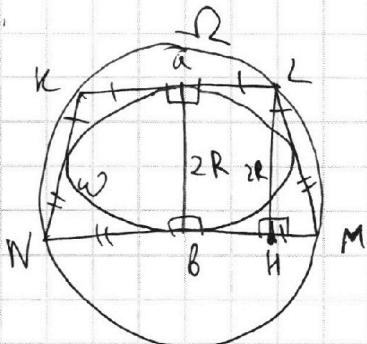
и $b = A, B, = B, C, = C, D, = D, A,$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что т.к. $KL \parallel MN$ — описанная ^{трапеция} т.к. $KL + MN = KN + LM$ т.е.

$$a+b=2h$$

$$h = \frac{a+b}{2}$$

$$S_{ABCD} = a^2$$

$$S_{A,B,C,D} = b^2$$

$$S_{\text{док}} = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h = 4 \cdot \frac{(a+b)^2}{4} = (a+b)^2$$

$$\frac{S_{\text{док}}}{S_{A,B,C,D}} = \left(\frac{a+b}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b} + 1\right)^2$$

(a — проекция верхней стороны KL на MN)

$$LH^2 + MH^2 = LM^2$$

R — радиус вписанного ^{треугольника}

$$(2R)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \quad | \cdot 4$$

$$16R^2 + (b-a)^2 = (b+a)^2$$

$$16R^2 - 2ba = 2ba$$

$$4R^2 = ab$$

Предположительно $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, но не знаю, как доказать и вообще правда ли это

Тогда

$$\frac{S_{\text{док}}}{S_{A,B,C,D}} = \left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 = \frac{9}{4}$$



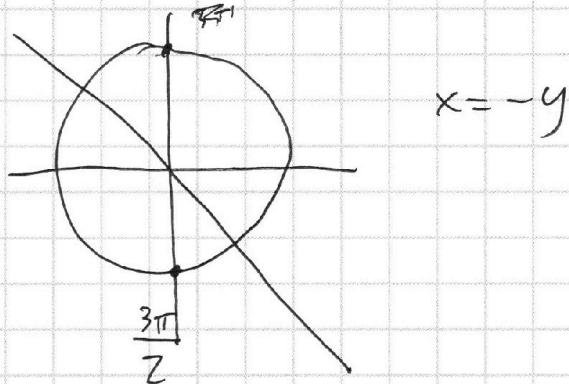
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

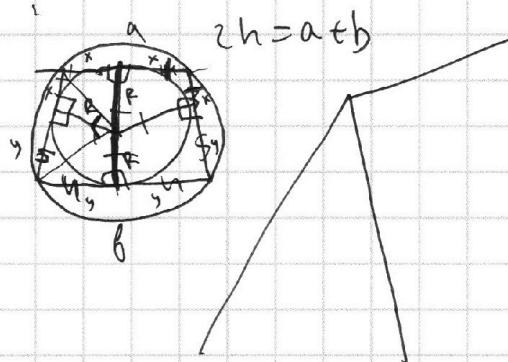
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$



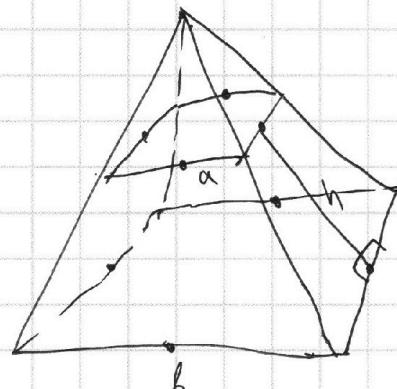
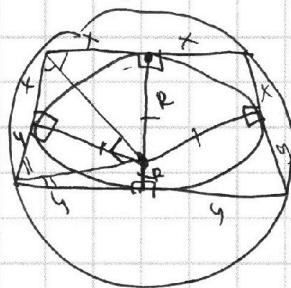
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{-x}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

~~х>0~~



$$ab = 2x \cdot 2y = 4xy$$

$$h^2 = x^2 + 2xy + y^2 = \\ = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{ab}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$



$$S_{\text{бок}} = a^2 + b^2$$

$$S_{\text{полн}} = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h = 2h(a+b) = \\ = (a+b)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$1 \text{ P записано} \quad A = \overline{aaaa}$$

2 P

3

$$3 \text{ из } 3 \text{ записано} \quad A \cdot B \cdot C = x^2$$

4 P

3

$$5 P \quad A : 1111$$

6

3

7 ~~P~~

3

$$A : 1111$$

$$B = \frac{1}{\overline{1,622}}$$

$$C = \frac{3}{\overline{2,3}}$$

$$1111 = 11 \cdot (101) = 1100 + 11 = 1111$$

101 - простое

$$A = a \cdot 11 \cdot 101 \quad A \nmid 101^2 \quad A \nmid 11^2$$

$$x^2 : 101^2$$

$$x^2 : 11^2$$

т.к. 101 и 11 простые

и

$$C \nmid 101 \quad \text{т.к. } C < 101 \Rightarrow B : 101 \Rightarrow B \in \{1 \cdot 101, \dots, 9 \cdot 101\}$$

$$\text{ББ лсгб 2} \Rightarrow B = 202$$

$$A = a \cdot 11 \cdot 101$$

$$B = 2 \cdot 101$$

$$C = 3 \cdot 11$$

$$B \nmid 11 \Rightarrow C : 11 \quad C \in \{1 \cdot 11, \dots, 9 \cdot 11\}$$

$$\text{БС сиб 3} \Rightarrow C = 33$$

и т.к. $A \cdot B \cdot C = x^2$

$$a \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 101^2 = x^2$$

$$a \cdot 2 \cdot 3 = \beta^2 \Rightarrow a = 2 \cdot 3 \cdot \beta^2$$

$$\text{если } \beta = 1, \text{ то } a = 6$$

$$\text{если } \beta = 4, \text{ то } a = 24 - \text{нечисло}$$

Единств. вариант

$$A = 6666$$

$$B = 202$$

$$C = 33$$

N2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(y+1)} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{xy+x-y-1}$$

$$y(x-1)(y+1) + x(x-1)(y+1) + 2(x-1)(y+1) = xy(y+1) + xy(x-1) +$$

$$+ 2xy$$

$$y(xy+x-y-1) + x(xy+x-y-1) + 2(xy+x-y-1) = xy(y+1+x-1+2) =$$

$$= xy(y+x+2)$$

$$(y+x+2)(xy+x-y-1) = xy(y+x+2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ xy+x-y-1=xy \\ x+y=-2 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$x^3 - y^3 - 3xy \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy$$

$$g \wedge x-y=1$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 =$$

$$x^3 - y^3 - 3xy =$$

$$= x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$$

$$= x^3 - y^3 - 3xy(x-y) =$$

$$\cancel{x^3} \cancel{- y^3} \cancel{- 3xy(x-y)}$$

$$= (x-y)^3 = 1$$

$$y = -2-x$$

$$y = x-1$$

$$x-1 = -2-x$$

$$2x = -1 \quad x \neq -\frac{1}{2}$$

$$x^3 - (-2-x)^3 - 3(-2-x)x =$$

$$= x^3 + (2+x)^3 + 3(2+x)x =$$

$$= x^3 + x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 4 + 8 + 6x + 3x^2 = 2x^3 + 9x^2 + 18x + 8$$

$$x \neq -2$$

$$x \neq 0 \quad x \neq 1$$

$$g \wedge x > 0$$

$$M > 8$$

$$x \neq -\frac{1}{2} \text{ - нестрочно i.n. } x > 0$$

$$M \neq 2+9+18+8 = 37$$

$$M \neq 2 \cdot -\frac{1}{8} + 9 \cdot \frac{1}{4} - 18 \cdot \frac{1}{2} + 8 =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{9}{4} - 9 + 8 =$$

$$= \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

№3

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\tan \pi x = \frac{\cos \pi x + \cos \pi y}{\sin \pi x + \sin \pi y}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1

$$\cos \pi x = \sin \pi x + \ell$$

2

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

4

$$\tan \pi x = \frac{\cos \pi x + \cos \pi y}{\sin \pi x + \sin \pi y}$$

5

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\sin \pi x + \ell + \cos \pi y) (\sin \pi x + \ell) \cos \pi x = -\cos \pi y$$

3

$$\tan \pi x = \frac{\frac{\tan \pi x}{\cos \pi y} + \frac{\tan \pi y}{\cos \pi x}}{\cos \pi y + \cos \pi x} \quad \pi x = -\pi y$$

7

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \sin^2 \pi x + 2 \sin \pi x + \ell^2 + \sin \pi x \cos \pi y + \ell \cos \pi y \quad x = -y$$

$$\tan \pi x \cdot \left(\frac{\tan \pi x}{\cos \pi y} + \frac{\tan \pi y}{\cos \pi x} \right) = \frac{1}{\cos \pi y} + \frac{1}{\cos \pi x}$$

$$\frac{\tan^2 \pi x}{\cos \pi y} + \frac{\tan \pi x \tan \pi y}{\cos \pi x} + \frac{1}{\cos \pi y} + \frac{1}{\cos \pi x}$$

$$a_1 < a_2$$

$$B_1 < B_2$$

$$\frac{\tan \pi x \tan \pi y - 1}{\cos \pi x} = \frac{1 - \tan^2 \pi x}{\cos \pi y}$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 > a_2 b_1 + a_1 b_2$$

$$\cos \pi y \tan \pi x \tan \pi y - \cos \pi y = \cos \pi x - \cos \pi x \tan^2 \pi x$$

$$(a_2 - a_1)b_2 - (a_2 - a_1)b_1 \quad \sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$a_2 - a_1 < 0$$

Чебышёва?

$$\sin \pi x \sin \pi y - \cos \pi x \cos \pi y = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \cos 2\pi x$$

$$\tan \pi x (\sin \pi y + \sin \pi x) = \cos \pi x + \cos \pi y$$

$$\sin \pi x \sin \pi y = \cos \pi x + \cos \pi y$$



$$\sin \pi x \sin \pi y - \cos \pi x \cos \pi y = \cos 2\pi x$$

? не решение?

$$\cos \pi y = -\cos \pi x \quad \sin \pi y = -\sin \pi x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 Ч балета

$n \in \mathbb{N}$

$$\pi x = a \quad \pi y = b$$

$$\sin^2 a (\sin a + \sin b)^2 = \cos^2 a (\cos a + \cos b)^2$$

$$2,5 P_1 = P_2$$

$$\sin^4 a + 2 \sin^3 a \sin b + \sin^2 a \sin^2 b =$$

$$\underbrace{n}_{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)}} \cdot \underbrace{\sin^4 a + 2 \sin^3 a \sin b + \sin^2 a \sin^2 b - \sin^2 a \cos^2 a - 2 \sin^2 a \cos a \cos b - \sin^2 a \cos^2 b}_{=}$$

$$\text{Решение } P_1 = \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)} = \frac{\cancel{(n-2)} \cdot 2 \cdot 1!}{n(n-1)} = \frac{2 \cdot 1!}{n^2 - n}$$

$$P_k = \frac{\frac{48}{n(n-1)} \cdot \frac{(n-2)(n-3) \cdots (n-k+1)}{(k-2)!}}{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots (n-k+1)} =$$

$k!$

$$\frac{4!}{n(n-1)}$$

$$P_1 = \frac{4!}{2 \cdot n(n-1)}$$

$$P_2 = \frac{k!}{(k-2)! \cdot n(n-1)} =$$

$$2,5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$\frac{5}{2} \cdot 12 = k(k-1)$$

$$2,5 \cdot 12 = k(k-1)$$

$$5 \cdot 6 = k(k-1) \quad (k=6)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

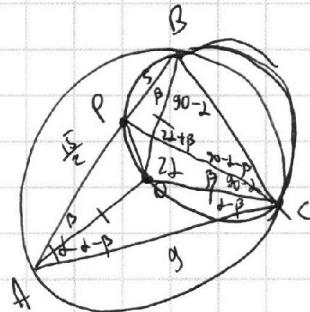
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№5

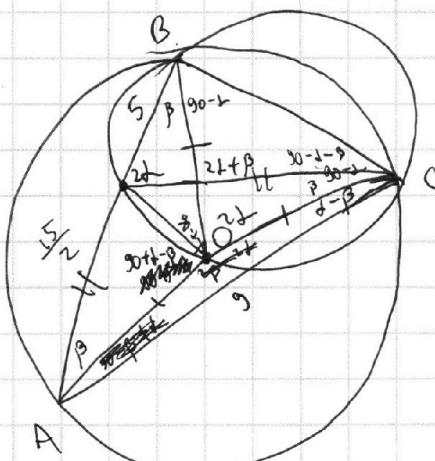
1
2
5



$$\begin{aligned} 90 - \gamma + \beta + 2\beta = \\ = 90 - \gamma + \beta \\ 90 + \gamma - \beta \end{aligned}$$

$$180 - \gamma + 2\beta + 2\gamma + 180 - 2\beta$$

$$90 - \gamma + \beta$$

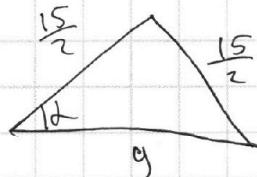


$$\begin{aligned} 180 - \gamma + 2\beta \\ 180 - 2\beta + 2\gamma \\ 180 - 2\beta + 2\gamma \\ 90 - \beta + \gamma \end{aligned}$$

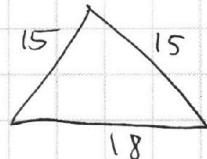
2

$$90 - \beta$$

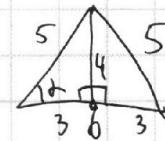
$$\frac{\sin(90 - \beta)}{\frac{15}{2} + 5} = \frac{\sin(90 - \gamma - \beta)}{9}$$



\Rightarrow



\Rightarrow



$$S = \frac{1}{2} \sin \gamma \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right) \cdot 9 = \sin \gamma = \frac{4}{5}$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{15 + 10}{2} \cdot 9 = 9 \cdot (3 + 2) = 9 \cdot 5 = 45$$

($S = 45$)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

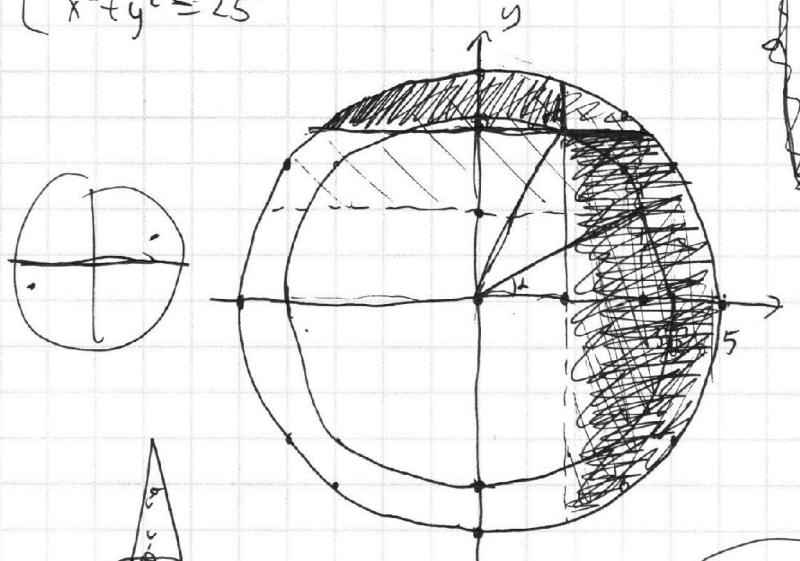
6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

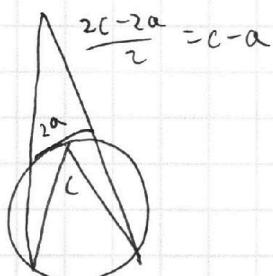
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin t)(y - 3\sqrt{2} \cos t) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y \geq 3\sqrt{2} \cos t \\ x \geq 3\sqrt{2} \sin t \end{cases}$$

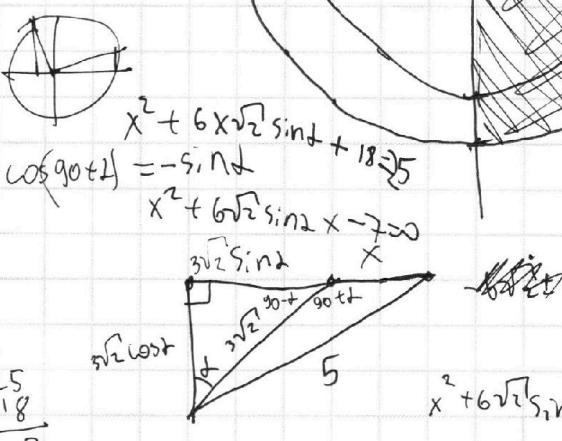
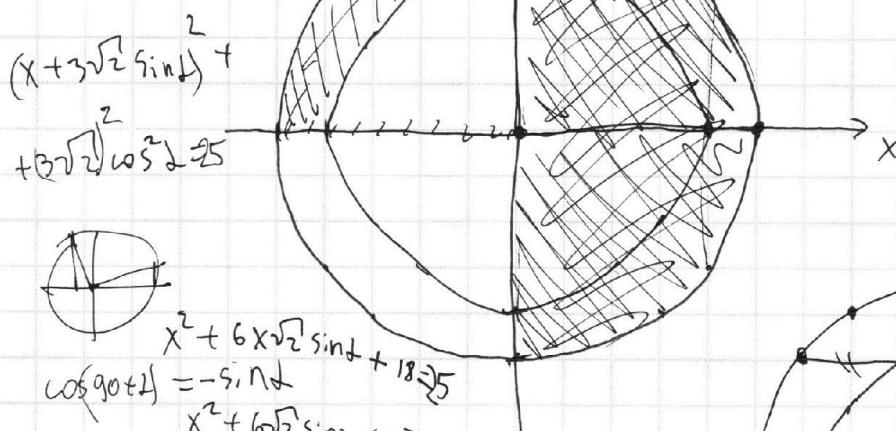
$$\begin{cases} y \leq 3\sqrt{2} \cos t \\ x \geq 3\sqrt{2} \sin t \end{cases}$$



но оказалось что $l = \pi \cdot 5 = 5\pi$
 $P = 10 + \pi \cdot 5 + 6 \text{ шага}$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2$$

P_{\max}



$$25 = 9 \cdot 2 + x^2 + 2 \cdot 3\sqrt{2} x \sin t$$

