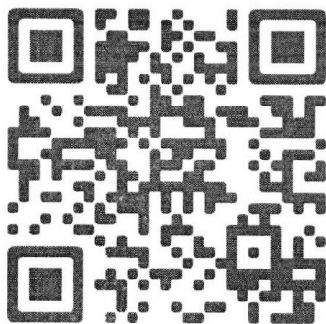




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = 1111a$$

$$a; b; c \in [1; 9]$$

$$B = \overline{bcdb} \quad ; \text{хочу } 1 \text{ цифру} - 1$$

$$c; d; f \in [0; 9]$$

$$C = \overline{ef} \quad \text{хочу } 1 \text{ цифру} - 5$$

$$ABC = m^2 \quad ; m \in \mathbb{N}$$

$$\underbrace{1111a \cdot B \cdot C}_{: 101} = m^2 \quad ; \underbrace{}_{: 101}$$

$$\text{101 - простое число} \Rightarrow \text{или } m : 101 \Rightarrow m^2 : 101^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{1111a \cdot B \cdot C}_{: 101^2} \Rightarrow B = 101k; m \cdot k$$

B содержит единицу
 $\Rightarrow B = 101$

~~$$1111a \cdot B \cdot C =$$~~

$$\underbrace{1111a \cdot 101 \cdot C}_{: 11} = \underbrace{m^2}_{: 11}$$

$$11 - \text{простое число} \Rightarrow \text{или } m : 11 \Rightarrow m^2 : 121 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1111a \cdot 101 \cdot C : 121 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 11n; m \cdot k \cdot C \text{ содем. } 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 55$$

$$1111a \cdot 101 \cdot 55 = m^2$$

$$101^2 \cdot 11^2 \cdot 5 \cdot a = m^2 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow m = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5$$
~~$$= 1111a$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 5555$$

$$B = 101$$

$$C = 55$$

Ответ: $A = 5555$; $B = 101$; $C = 55$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

м.к ABC : ~~121~~ ; A : 11 ; $\Rightarrow$ C : 11, м

C ~~содержит~~ ~~м.к~~ ~~м.к~~ 5 $\Rightarrow$ C = 55 (м.к B ~~11~~ ⁺¹¹)

$$11112 \cdot 101 \cdot 55 = \text{м}^2$$

$$101^2 \cdot 11^2 \cdot 2 \cdot 5 = \text{м}^2$$

Условие для нашей задачи нужно, чтобы $(\text{м.к} A = 5)$

Условие: A = 5555;
B = 101
C = 55

Ответ: 5555; 101; 55

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} ; = \frac{y+x+1}{xy}$$

$$\frac{1}{xy} k = \frac{x-3 + y+3 + 1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + y^2 + xy) - 9xy$$

$$\frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{y+x+1}{xy}$$

$$x^2y + xy^2 + 2xy = (y+x+1)(xy - 3y + 3x - 9)$$

$$x^2y + xy^2 + 2xy = xy^2 - 3y^2 + 3xy - 9y + x^2y - 3y^2 + 3x - 9$$

$$3x^2 - 3y^2 - 12y - 6x - 9 - xy = 0$$

$$3(x^2 - y^2) - 12y - 6x - 9 - xy = 0$$

$$3(x+1)^2 + 3(y+2)^2 - 9 - xy = 0$$

$$\frac{(x+y+1)}{(x-3)(y+3)} = \frac{(y+x+1)}{xy}$$

$$x^2y + y^2x + xy = (y+x+1)(xy - 3y + 3x - 9)$$

$$(y+x+1) \left(\frac{1}{(x-3)(y+3)} - \frac{1}{xy} \right) = 0 \quad (y+x+1 > 0)$$

$$\frac{1}{(x-3)(y+3)} - \frac{1}{xy} = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x/y - x/y - 3x + 3y + y = 0$$

$$y(3-x)$$

$$3(y-x) = 3 \cdot 9$$

$$y-x = -3 \Rightarrow y = x-3 \quad x-y = 3 \Rightarrow x = y+3$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + y^2 + xy) - 9xy = \\ &= 3 \cdot (9 + 3xy) - 9xy = \\ &= 24 + 9xy - 9xy = 24 \end{aligned}$$

Ответ: 24



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ 2k-14 \leq 3x \leq 19+2k \end{cases}$$

Решим. Случаи: $\text{при } x \equiv 1$:

1) $x=4$: 12

$$\begin{cases} 2k-14+3 \leq 0 \\ 2k+19+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \leq 5 \\ k \geq -11 \end{cases} \Rightarrow 6 \text{ цел. нар.}$$

2) $x=-3$

$$\begin{cases} 2k-14+9 \leq 0 \\ 2k+19+9 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \leq 4 \\ k \geq -14 \end{cases} \Rightarrow 19 \text{ цел. нар.}$$

3) ~~$x=-5$~~

$$\begin{cases} \text{~~2k-14+6 \leq 0~~} \\ \text{~~2k+19+6 \geq 0~~} \end{cases} \Rightarrow \text{~~k \leq -5~~}$$

2) $x=-1$

$$\begin{cases} 2k-14+3 \leq 0 \\ 2k+19+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \leq 4 \\ k \geq -11 \end{cases} \Rightarrow 15 \text{ цел. нар.}$$

3) $x=1$

$$\begin{cases} 2k-14+1 \leq 0 \\ 2k+19+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \leq 9 \\ k \geq -9 \end{cases} \Rightarrow 19 \text{ цел. нар.}$$

4) $x=3$:

$$\begin{cases} 2k-14-9 \leq 0 \\ 2k+19-9 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \leq 13 \\ k \geq 5 \end{cases} \Rightarrow 19 \text{ цел. нар.}$$

Итого: $19 \cdot 4 + 16 = 162 \text{ нар.}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Запишем сумму, когда пера выходящих

$$\frac{3x-1-2k}{2} = 1-x+2k;$$

$$x = \frac{3(2k+1)}{5} \Rightarrow 2k \equiv -1 \Rightarrow k \equiv 2$$

Всего ~~на~~ 1 раз не пера концы

поименно 2 раза:

$$162 - 2 - 2 - 2 = 162 - 6 = 156$$

Ответ: 154



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2k-8+4 \leq 0 \\ 2k+10+4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \leq 2 \\ k \geq -4 \end{cases} \Rightarrow \text{целых} \Rightarrow 10 \text{ вар.}$$

$$2) \begin{cases} c = -3 \\ 2k-8+3 \leq 0 \\ 2k+10+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \leq 2,5 \\ k \geq -6,5 \end{cases} \Rightarrow \text{целых} \Rightarrow 9 \text{ вар.}$$

$$3) \begin{cases} c = -2: \\ 2k-8+2 \leq 0 \\ 2k+10+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \leq 3 \\ k \geq -6 \end{cases} \Rightarrow 12 \text{ вар.} \quad 10 \text{ целых вар.}$$

$$4) \begin{cases} c = -1 \\ k \leq 3,5 \\ k \geq -5,5 \end{cases} \Rightarrow 9 \text{ целых вар.}$$

$$5) \begin{cases} c = 0: \\ k \leq 4 \\ k \geq -5 \end{cases} \Rightarrow 10 \text{ целых вар.}$$

$$6) \begin{cases} c = 1 \\ k \leq 4,5 \\ k \geq -4,5 \end{cases} \Rightarrow 9 \text{ целых вар.}$$

$$7) \begin{cases} c = 2: \\ k \leq 5 \\ k \geq -4 \end{cases} \Rightarrow 10 \text{ целых вар.}$$

$$8) \begin{cases} c = 3: \\ k \leq 5,5 \\ k \geq -3,5 \end{cases} \Rightarrow 9 \text{ вар.}$$

$$9) \begin{cases} c = 4 \\ k \leq 6 \\ k \geq -2 \end{cases} \Rightarrow 10 \text{ вар.}$$

$$10 \cdot 5 + 9 \cdot 4 = 50 + 36 = 86 \text{ вар.}$$

$$\text{Итого: } 10 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 9 = 10 \cdot 5 + 9 \cdot 5 = 5 \cdot 19 = 95 \text{ вар.}$$

$$\text{Остаток } 95 \text{ вар.}$$

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

8) $\begin{cases} -4 \leq k \leq 4 \\ -10 \leq k \leq 8 \end{cases} \Rightarrow k \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

Заметим, что $\arccos \frac{k-1}{4} + \arcsin \frac{k-1}{4} \neq 2\pi$,
т.к. $\begin{cases} \frac{k-1}{4} = 1 \Rightarrow k=5 \\ -\frac{k-1}{4} = 1 \Rightarrow k=3 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$.

иногда π

2) $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 1 + 2k - \pi \end{cases}$

$\arccos \frac{x}{4} + \arcsin \frac{(1+2k-\pi)}{9} < 2\pi$
 $\in [0, \pi] \quad \in [0, \pi]$

$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{1+2k-\pi}{9} \leq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq 1+2k-\pi \leq 9 \\ -10-\pi \leq -4 \leq 8-2k \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ 2k-8 \leq k \leq 2k+10 \end{cases}$

~~Решение системы:~~

1) ~~$2k-8 \leq -4 \Rightarrow$~~

~~$2k-8 = -4$~~

~~и $2k-8 \leq 2k+10$~~ ~~Решение системы:~~

1) $2k = -4$:

$\begin{cases} 2k-8 \leq -4 \leq 2k+10 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$2 \cdot \sin \pi \frac{(x+y)}{2} \cdot \sin \pi \frac{(x-y)}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cos \pi \frac{(x+y)}{2} \cdot \cos \pi \frac{(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \frac{(x+y)\pi}{2} \left(\cos \pi \frac{(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x - \sin \pi \frac{(x-y)}{2} \cdot \sin \pi x \right) = 0$$

$$\cos \frac{(x+y)\pi}{2} \cdot \cos \left(\pi \frac{(x-y)}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\cos \frac{(x+y)\pi}{2} \cdot \cos \left(\pi \frac{(x-y)}{2} - \pi y \right) = 0$$

$$\cos \frac{(x+y)\pi}{2} = 0$$

$$\cos \left(\pi \frac{(x-y)}{2} - \pi y \right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{(x+y)\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \cos \left(\pi \frac{(x-y)}{2} - \pi y \right) = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 + 2k \\ 3x - 2y = 1 + 2k \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} y = 1 - x + 2k \end{cases}$$

$$\left(\sin \pi x - \sin \left(\pi - \pi x + 2\pi k \right) \right) \cdot \cos \pi x = (\cos \pi x + \cos (\pi - \pi x + 2\pi k)) \cdot \cos \pi x$$

$$0 \cdot \cos \pi x = 0 \cdot \cos \pi x \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$2) \begin{cases} y = \frac{3x - 1 - 2k}{2} \end{cases}$$

$$\left(\sin \pi x - \sin \left(\frac{3\pi x - \pi - 2\pi k}{2} \right) \right) \cdot \cos \pi x = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~а) $x \in \mathbb{R}$~~

а) $\text{Domain: } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 1 - x + 2k \\ \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{3x - 1 - 2k}{2} \end{cases} \end{cases}$

б) 1) $\begin{cases} y = \frac{3x - 1 - 2k}{2} = \frac{3x - 1}{2} - k; \quad 3x - 1 = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \\ \underbrace{\arccos \frac{x}{4}}_{\in (0; \pi]} + \underbrace{\arccos \frac{y}{9}}_{\in (0; \pi]} < 2\pi \end{cases}$

$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq \frac{3x - 1 - 2k}{2 \cdot 9} \leq 1 \quad \text{①} \end{cases}$

① $-2 \leq \frac{3x - 1 - 2k}{9} \leq 2$

~~$2k - 1 \leq 3x \leq 3 + 2k$~~

~~$\frac{2k - 1}{3} \leq x \leq \frac{3 + 2k}{3}$~~

$-18 \leq 3x - 1 - 2k \leq 18$

$2k - 14 \leq 3x \leq 19 + 2k$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

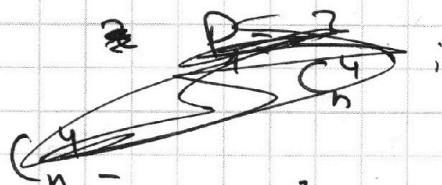
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n - кол-во друзей
4 друга: - в начале месяца.

> 4 друзей: - в конце месяца.

~~Вероятность~~

Вероятность того, что ПЕТА и ВАСЯ
попадут на концерт в начале месяца:



$$P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$$

; где C_{n-2}^2 - кол-во способов
выбрать

2 11-класс,
пошли Петя
и Вера;

C_n^4 - кол-во способов
выбрать
4 друзей
из
всех 11-класс.

Аналогично:

$$P_2 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^m}$$

; m - кол-во друзей в
конце месяца.
 $m > 4$

$$P_1 \cdot \frac{4}{2} = P_2$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \cdot \frac{4}{2} = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^m}$$

$$\frac{4 \cdot n!}{2 \cdot n! \cdot (n-4)!} = \frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{24 \cdot 4}{2} = \frac{m! \cdot (n-m)!}{(n-4)!}$$

$$84 = \frac{m! \cdot (n-m)!}{(n-4)!}, m \geq 4$$

Если $m \leq n-4$:

$$m! \cdot (n-m)! < (n-4)! \Rightarrow \emptyset$$

$$1) \begin{cases} m = n \\ 84 = \frac{n! \cdot (n-0)!}{n-4!} \Rightarrow n(n-1)(n-2)(n-3) = 84 \end{cases}$$

$84 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7$
- не 4 множителя
нельзя
 $\Rightarrow \emptyset$

$$2) \begin{cases} m = n-1 \\ 84 = \frac{(n-1)! \cdot 1!}{n-4!} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-4)!} = 84 \end{cases}$$

$$\frac{(n-1)!}{(n-4)!} = 84 \Rightarrow (n-1)(n-2)(n-3) = 84$$

$84 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7$
Аналогично
нельзя
поделить
на 4
 $\Rightarrow \emptyset$

$$3) \begin{cases} m = n-2 \\ 84 = \frac{(n-2)! \cdot 2!}{(n-4)!} \Rightarrow (n-2)(n-3) = 42 \end{cases}$$

$$42 = 6 \cdot 7 \Rightarrow n = 9; m = 4$$

$$4) \begin{cases} m = n-3 \\ 84 = \frac{(n-3)! \cdot 6}{(n-4)!} \Rightarrow n-3 = 7 \Rightarrow n = 10; m = 4 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) ~~а, б, в, г~~

$$\begin{cases} m = n - 4 \\ A_1 = A_1 \cap \emptyset \end{cases}$$

Итого $m = 4$;

Ответ: 4 элементов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5 (продолжено)

5) $\triangle APO = \triangle CPO$ (по теореме Пифагора)

$$\angle APO = \angle CPO = \alpha;$$

PO - общая

AO = OC (как стороны в обоих треугольниках)

$$\Rightarrow AP = PC = \frac{16}{5}$$

6) Треугольник POH $\perp$ AC, так как $\triangle APC$ - равнобедренный

$$\Rightarrow AH = HC = \frac{AC}{2} = 2$$

$$7) \cos \angle BAC = \frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{2 \cdot 5}{16} = \frac{5}{8};$$

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$8) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{26}{5} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot \sqrt{39}}{5 \cdot 8} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

Ответ: $\frac{13\sqrt{39}}{10}$



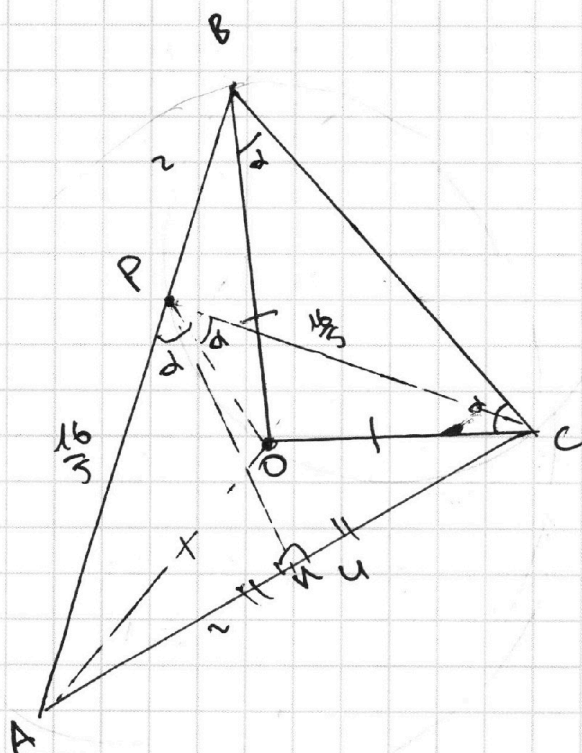
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Доказ:

$\triangle ABC$

$$AP = \frac{16}{3}$$

$$BP = 2$$

$$AC = 4$$

о-уем до
 $\triangle ABC$

Решит:
 $\triangle ABC$

Решено:

- 1) Проведем PO ; $POCB$ - вписанный четырехугольник.
- 2) Пусть $\angle OCB = \alpha$; т.к. O - центр опис. окр. $\triangle ABC$ $\Rightarrow$
 $\Rightarrow OB = OC \Rightarrow \triangle OBC$ - $\triangle$ $\Rightarrow \angle OBC = \alpha$
- 3) $\angle BPO = 180 - \alpha$ (т.к. $POCB$ - вписанный);
 $\angle APO = \alpha$ (кн. верн.)
- 4) $\angle OPC = \angle CBO = \alpha$ (кн. вписанный.)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

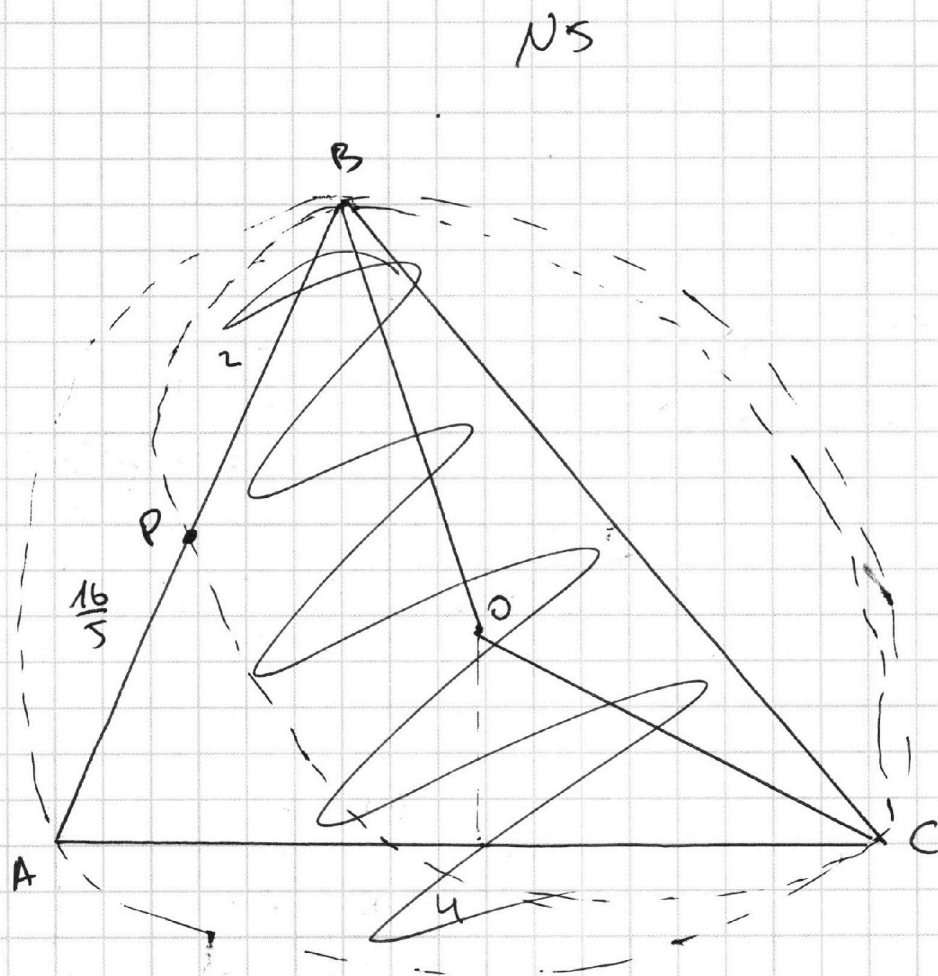
5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

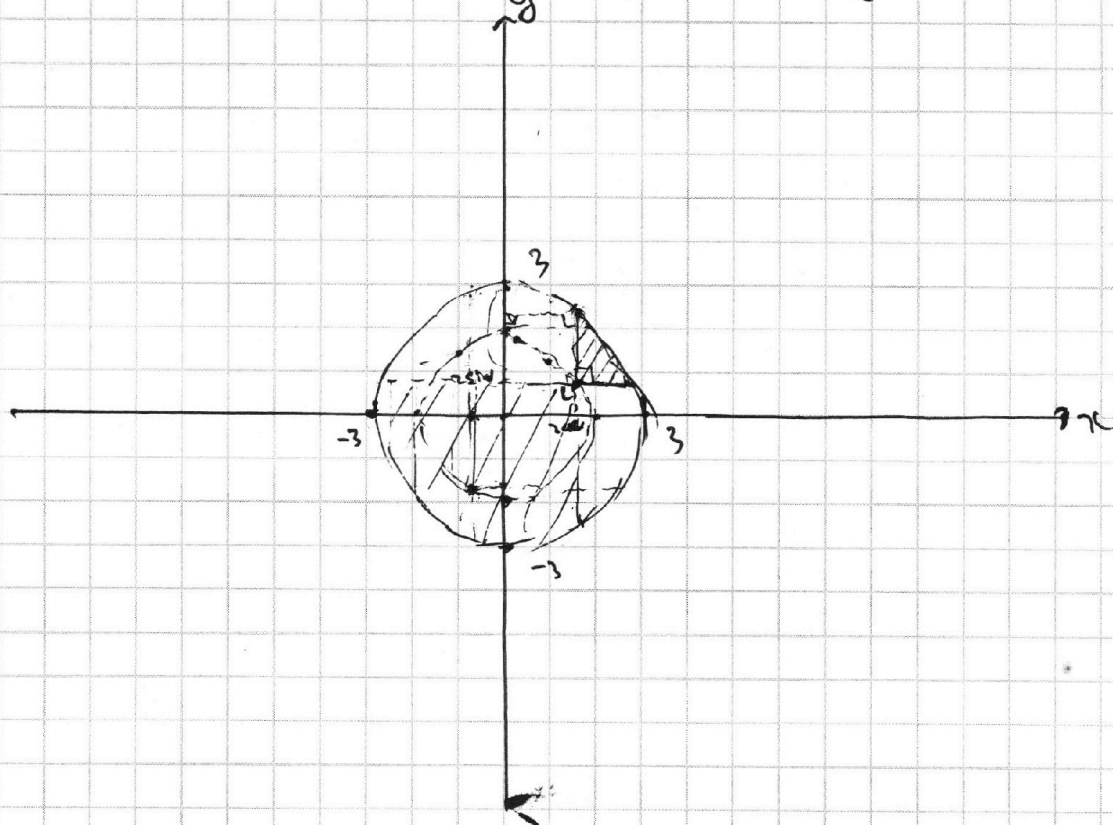
7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 2\sin\alpha \\ x \geq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \end{cases}$$

Получим график

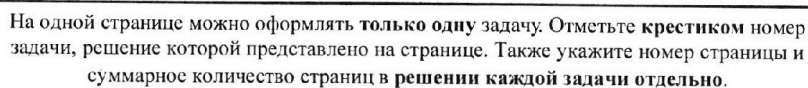


Заметим, что точка $(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$ лежит на окружности радиуса 2, ~~то есть~~

то удовлетворяет функции

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ все значения α будут по кругу функции замкнутой (см. рис)



СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$) CDFR - ~~не~~ вероятностная функция, а
 значение $CF = DR \Rightarrow UCF = UDR$ (мк
 ~~Большая~~
 Большее или
 Определенно не
 меньше
 (или)
 (или))

5) $\text{Analogues } \cup AE = \cup BS$

6) Термический флуор М равен:

$$\begin{aligned} AB+CD+UAD+UCB &= \\ &= \cancel{AB+CD+UAD+UCB+UAE+} \\ &= AB+CD+UCF+USB+UFS+UAD = \\ &= AB+CD+UFS+UCB+UAE+UAD = \\ &= AB+CD+UCB+UFS = AB+CD+\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 6 = \\ &= AB+CD+6\pi \end{aligned}$$

$$f(x) = 2(\sqrt{9-4\sin^2 x} + \sqrt{9-4\cos^2 x}) + 3\pi$$

Beachte: $\sin^2 \vartheta = t$; $t \geq 0$; $t \leq 1$

$$F(t) = 2(\sqrt{9-4t} + \sqrt{5+4t}) + 8\pi$$

$$F'(t) = \frac{x \cdot (-4)}{2\sqrt{9-4t}} + \frac{x \cdot 4}{2\sqrt{9+4t}} \geq 0 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{9-4t}{9+4t} \geq 0 \\ \frac{9+4t}{9-4t} \geq 0 \end{array} \right.$$

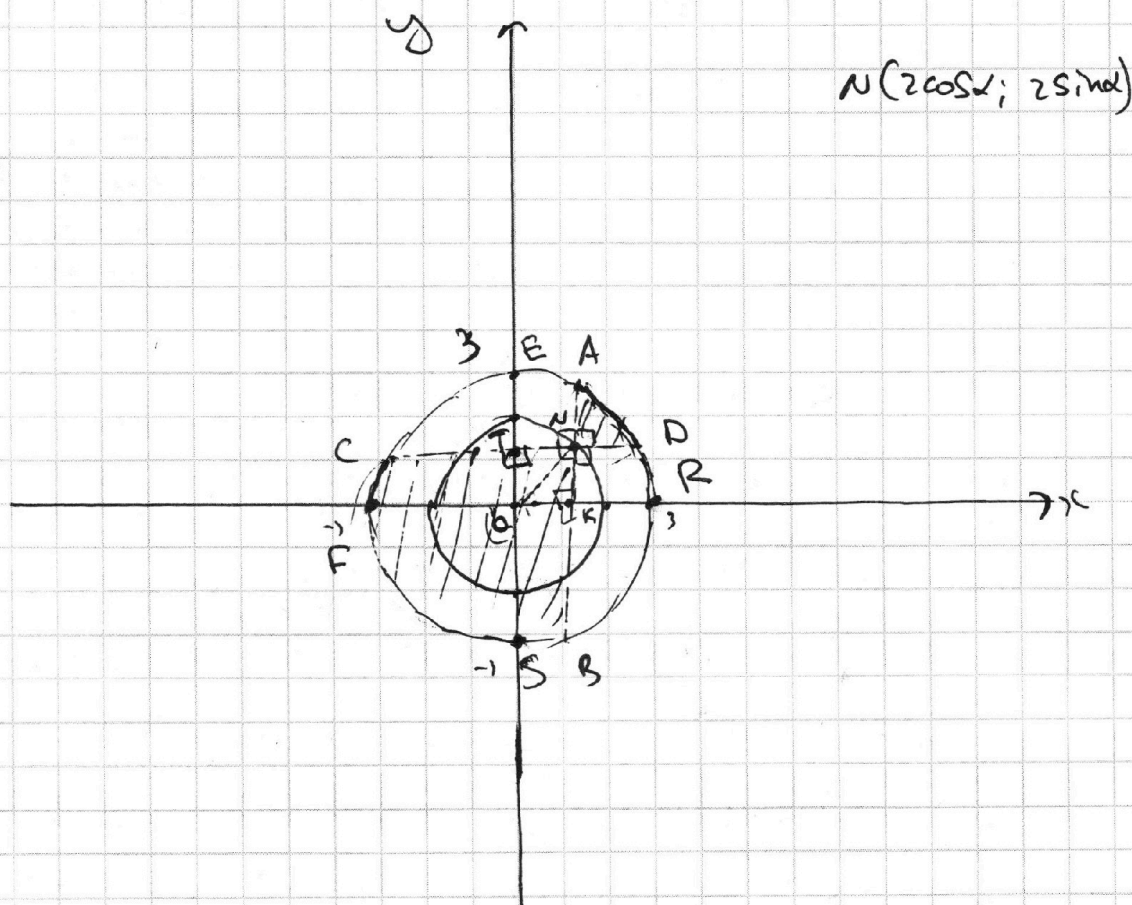


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) $\triangle AOB - \text{н.б.} (m.k. AO = OB = 3); OK = 2 \cos \alpha; NK = 2 \sin \alpha$
(m.k. $N(2 \cos \alpha; 2 \sin \alpha)$)

2) $AK = KB (OK \perp AB)$; По теореме Пифагора:
 $\triangle AOB - \text{н.б.}$

$$AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} \Rightarrow AB = 2AK$$

3) Аналогично $CD = \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} \Rightarrow CD = 2OD$

4) Теорема Пифагора $CD \perp FR$; $CD \perp FR$
- Внимательно читать условие!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

16

~~F(t)~~

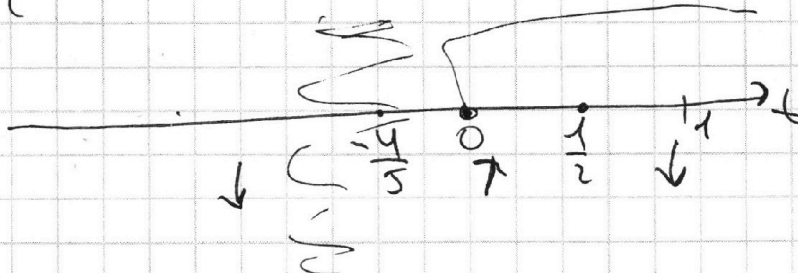
$$\sqrt{9-4t} - \sqrt{5+4t} \geq 0$$

$$\sqrt{9-4t} \geq \sqrt{5+4t}$$

$$\sqrt{9-4t} \geq \sqrt{5+4t}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t \geq -\frac{4}{5} \\ 9-4t \geq 5+4t \Rightarrow 8t \leq 4 \Rightarrow t \leq \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$9-4t \geq 5+4t \Rightarrow 8t \leq 4 \Rightarrow t \leq \frac{1}{2}$$



~~F(t)~~

~~F(t)~~

~~F(t)~~

$$F(t)_{\max} = F\left(\frac{1}{2}\right) = 2(\sqrt{9-2} + \sqrt{5+2}) + 8\pi =$$

$$= 2(\sqrt{4} + \sqrt{4}) + 8\pi = 4\sqrt{4} + 8\pi$$

поиск макс при $\sin t = \frac{1}{2}$; $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$;

$$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k \end{array} \right. \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\star$ Max значение функции: $4\sqrt{4} + 8\pi$;
при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \begin{cases} y = 3) c - 1 - 2k \\ (\sin \pi c - \sin(\pi c - \pi - 2/4k)) \cdot \sin \pi c = \cos \pi c + \cos(\pi c - \pi) \end{cases}$$

$$(\sin \pi c - \sin(\pi c - \pi - 2/4k)) \cdot \sin \pi c (\cos \pi c + \cos(\pi c - \pi - 2/4k)) \cdot \sin \pi c$$

$$2 \cdot \sin \pi c \cdot \sin \pi c = 0 \cdot \cos \pi c$$

$$\sin^2 \pi c = 0$$

$$\pi c = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$c = k, k \in \mathbb{Z}$$

$$6) \text{ Ответ: } \begin{cases} c = k; \\ y = -k - 1; k \in \mathbb{Z} \\ x \in \mathbb{R} \\ y = 1 + 2k - x; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$5) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

$$1) \begin{cases} c = k \\ y = -k - 1 \\ \arccos \frac{k}{4} + \arccos \frac{-k-1}{9} < 2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\in [0, \pi] \in [0, \pi] \Rightarrow$
Необходимые условия для выполнения неравенства:

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{k}{4} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{-k-1}{9} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq k \leq 4 \\ -9 \leq -k-1 \leq 9 \Rightarrow -8 \leq k \leq 8 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\cancel{2} \cdot \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \pi x \neq \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2} \left(\sin \pi x \cdot \sin \frac{\pi(x-y)}{2} - \cos \pi x \cdot \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \right) = 0$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0 \\ \cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad | : \pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k, | : \pi \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x+y = 1+2k \\ \cancel{x-y} = x-y+2x = 1+2k \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x+y = 1+2k \\ 3x-y = 1+2k \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$1) \begin{cases} y = 1+2k-x \\ (\sin \pi x - \sin(\pi+2k-x)) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos(\pi+2k-x)) \cdot \cos \pi x \end{cases}$$

$$0 \cdot \sin \pi x = 0 \cdot \cos \pi x - \text{Верно}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~(A=1)~~

m=4

$$* m = n - 4$$

$$m \leq n - 4$$

$$\frac{m!}{(n-m)!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$m = n - 4$$

$$84 = n$$

$$n = 84$$

$$\frac{n!}{(n-4)!} = 84$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 84$$

$$m = n - 2$$

$$m = n - 1$$

$$\frac{(n-1)!}{(n-4)!} = 84$$

$$(n-1)(n-2)(n-3) = 84$$

$$12 \cdot 4 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4$$

$$(n-1)(n-2) = 84$$

$$m \leq n - 5$$

$$m = n - 3$$

$$\frac{(n-3)!}{(n-4)!} \cdot 3! = 84$$

$$(n-3) \cdot 6 = 84$$

$$n = 15$$

$$\frac{3n-1-2k}{2} = 1-2k$$

$$\frac{3n-1-2k}{2} = 2-2k$$

$$3n-1-2k = 2-2k$$

$$n = 21$$

$$m = 15$$

$$\frac{15! \cdot 6!}{14!} = \frac{6!}{14 \cdot 15} =$$

$$1-3+4 = 2$$

$$4-2+4 = 6$$

$$= \frac{6 \cdot 4}{5} = \frac{24}{5}$$

$$2(3) = 6$$

$$2 \cdot 4 = 8$$

$$\frac{86}{16} = 5.375$$

$$\frac{19}{4} = 4.75$$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f^{(n)} \cdot (n-y)! = n! \cdot (n-y)! \\ \cancel{f^{(n)}} = \cancel{f^{(n)}} \cdot (n-y)! :$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

111111
101

~~ABC~~

$$A = \overline{aaaa} = 1111a$$

$$B = \overline{bcd} ; \text{ т.к. } 100 \cdot 100 \cdot 1$$

$$C = \overline{ef} ; \text{ т.к. } 1000 \cdot 5$$

$$: \overline{abc} = \overline{def} \cdot \overline{gh} \cdot \overline{ij}$$

$$a \in [1; 5]$$

$$b \in [1; 5]$$

$$c \in [1; 5]$$

$$d, e, f \in [0; 9]$$

$$\overline{ABC} = \overline{m^2}$$

$$ABC = m^2$$

$$: 101$$

$$: 11$$

$$1111a \cdot (100b + 10c + d) \cdot (10e + f) = m^2$$

$$1) \overline{f} = 5$$

$$ABC = m^2 \Rightarrow A = 5 (1000 + 100 + 10)$$

$$: 5$$

$$: 15$$

$$f = 5$$

$$d = 0$$

$$ABC = m^2$$

$$: 11$$

$$: 101$$

$$: 121$$

$$: 101^2$$

$$B = 101$$

$$\text{т.к. } 101 - \text{число простое} \Rightarrow m : 101 \Rightarrow m^2 : 101^2$$

$$\text{и это значит: } ABC : 101^2, \text{ т.к. } C - \text{уменьшен}$$

$$\Rightarrow B = 101k, \text{ т.к. } B \text{ состоит из } 1 \text{ и } 0$$

$$\text{значит } B = 101$$