



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 2, а  $y$  — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 6xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 25$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 35$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Число A имеет вид:  $1111 \cdot a$  (где  $a$ -цифра от 1 до 9),

$$A = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a$$

$\uparrow$        $\uparrow$   
тривиальное    простое

2)  $A \cdot B \cdot C$  - квадрат числа, т.к.  $A \mid 101 \Rightarrow A \cdot B \cdot C$  делится  
делится на  $101^2$ . Т.к. В А содержится только один  
делитель 101, а  $C < 100 \Rightarrow$  то может делиться на 101  
 $\Rightarrow B \mid 101$ ; В содержит цифру 6  $\Rightarrow$  единственное  
подходящее число  $B = 606$

3) Аналогично т.к.  $A \mid 11 \Rightarrow A \cdot B \cdot C$  делится на  $11^2$ , в А  
также один делитель 11 (т.к. а-цифра от 1 до 9 и  
не делит 11),  $B = 606 \nmid 11 \Rightarrow C$  делится делится на 11;  
С содержит цифру 3 и  $10 \leq C \leq 99 \Rightarrow$  единственное  
подходящее число  $C = 33$

4)  $A \cdot B \cdot C = \underbrace{11 \cdot 101 \cdot a}_{A} \cdot \underbrace{101 \cdot 2 \cdot 3}_{B} \cdot \underbrace{11 \cdot 3}_{C} = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2a$

$\Rightarrow$  т.к.  $A \cdot B \cdot C$  - квадрат числа  $\Rightarrow$  за тоже делится быть каким-то  
квадратом числа, а так как  $1 \leq a \leq 9$ , существует  
только два подходящих значения а:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 = 2 \quad (\text{тогда } 2a = 2 \cdot 2 = 2^2)$$

$$a_2 = 8 \quad (\text{тогда } 2a = 2 \cdot 8 = 16 = 4^2)$$

⇒ находитсѧ существуетъ два подходящихъ числа A:

$$A = 2222 \text{ и } A = 8888.$$

5) Проверимъ, что тройки  $(2222; 606; 33)$  и  $(8888; 606; 33)$

действительно находятъ:

$$2222 \cdot 606 \cdot 33 = 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 3 = (101 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 2)^2$$

$$8888 \cdot 606 \cdot 33 = 11 \cdot 101 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 3 = (101 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 3)^2$$

Отвѣтъ: 1)  $(A_1; B_1; C_1) = (2222; 606; 33)$

2)  $(A_2; B_2; C_2) = (8888; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№2 Из условия: значение K не изменяется при  $x = x-2$  и  $y = y+2$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

Оп: по услов:  $x, y > 0$ ,  $x \neq 2$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{(y+2)+(x-2)+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy + 2x - 2y - 4$$

$$2y - 2x + 4 = 0 \Rightarrow y = x - 2$$

Подставим в  $M = x^3 - y^3 - 6xy$ , что  $y = x - 2$ : ( $\Rightarrow$  оп:  $x > 2$ )

$$M = x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2) = \cancel{x^3} \cancel{-(x-2)^3} \cancel{- 6x(x-2)}$$

$$= x^3 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x = 8$$

Ответ:  $M = 8$  (при  $x > 2$ ,  $y > 0$ )



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

[3] а) Решить  $\bar{A}x = \lambda$ ,  $\bar{A}y = \beta$ :

$$(\sin \lambda + \sin \beta) \sin \lambda = (\cos \lambda - \cos \beta) \cos \lambda$$

$$\sin^2 \lambda + \sin \lambda \sin \beta = \cos^2 \lambda - \cos \lambda \cos \beta$$

$$\cos \lambda \cos \beta + \sin \lambda \sin \beta = \cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda$$

↙ по формуле приведения

$$\cos(\lambda - \beta) = \cos(2\lambda)$$

$\Rightarrow$  2 случая: 1)  $\lambda - \beta = 2\lambda$

2)  $\lambda - \beta = -2\lambda$

Обратные задачи:

1)  $\bar{A}x - \bar{A}y = 2\bar{A}x \Rightarrow y = -x$

2)  $\bar{A}x - \bar{A}y = -2\bar{A}x \Rightarrow y = 3x$

Ответ: 1)  $y = -x$ ; 2)  $y = 3x$

Все пары  $(x; y)$  из этих функций

δ)  $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$

Две первые задачи обратны:

1)  $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{-x}{2} < \pi$

~~$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{-x}{2} < \pi$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin \frac{x}{6} = \begin{cases} \frac{x}{6}, & -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x + 2\pi n \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ \pi - \frac{x}{6} & (\text{где од. } \times) \end{cases}$$

$2\pi n \approx 6,28 n$

$$-1,57 + 2\pi n \leq x + 2\pi n \leq 1,57 + 2\pi n$$

$$\arcsin \frac{-x}{2} = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & -1,57 + 2\pi n \leq x + 2\pi n \leq 1,57 + 2\pi n \\ \pi + \frac{x}{2}, & \text{где од. } \times \end{cases}$$

$\Rightarrow$  где  $x \in [-1,57 + 2\pi n; 1,57 + 2\pi n]$

$$\frac{x}{6} - \frac{x}{2} < \pi \Rightarrow -\frac{1}{3}x < 3,14$$

$$\Rightarrow x > 9,42 - \text{кем } 6 \text{ интервал}$$

2) второй метод:

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{3x}{2} < \pi$$

аналогично где  $x \in [-1,57 + 2\pi n; 1,57 + 2\pi n]$

$$\frac{x}{6} + \frac{3x}{2} < \pi$$

$$\frac{10x}{6} < \pi \Rightarrow x < \frac{3\pi}{5} \approx 1,8 \quad \text{получают 3}$$

корни (1,0 и -1)

Ответ: 3 пары



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

14] Пусть всего  $X$  одноклассников, а в конце месяца было выбрано  $a$  баллов.

1) Вероятность, что Петя и Вова вместе получат  $a$  баллов

$$\text{для } 4 \times \text{баллов} = p_1 = \frac{4}{X} \cdot \frac{3}{X-1}$$

(вер., что Вова получит  $\uparrow$  при условии что Петя тоже получит)

2) Вероятность для  $a$  баллов  $= p_2 = \frac{a}{X} \cdot \frac{a-1}{X-1}$

3) Из условий известно, что  $\frac{p_2}{p_1} = 6 \Rightarrow \frac{a(a-1) \cdot X(X-1)}{X(X-1) \cdot 4 \cdot 3} = 6$

$$\Rightarrow \frac{a(a-1)}{12} = 6$$

$$a^2 - a - 72 = 0$$

т.к. по усло.  $a > 0 \Rightarrow a = 9$  - единственный корень, подходящий по усл.

Ответ: 9 баллов

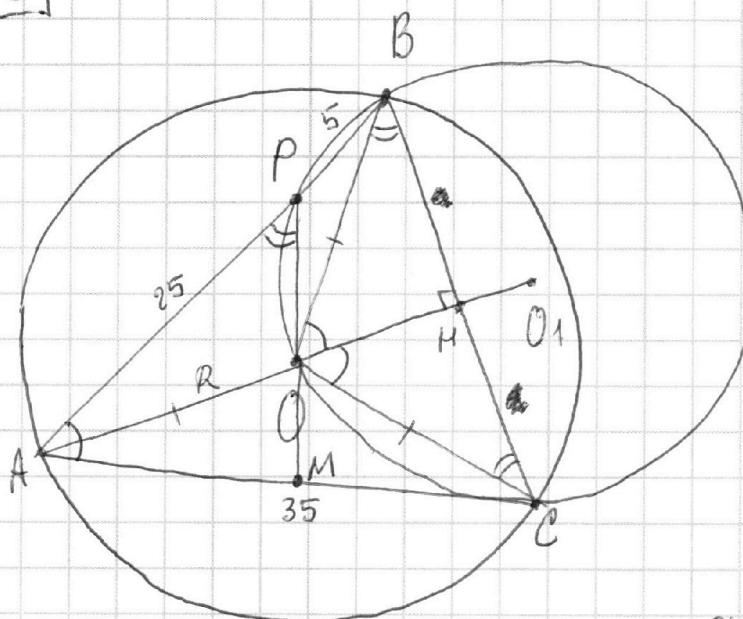
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

5



1) Пусть  $O_1$  - центр  $\omega_2$

$$AO = OB = OC = R$$

$\Rightarrow OBC$  - равноб.

$\Rightarrow OCH$  - сер. перп. к  $BC$ ,  
 $O_1 \in OCH$

2) Пусть  $\angle BAC = \alpha$ ,

$\angle BOC$  - централ.  $\Rightarrow = 2\alpha$

$OM$ -биссектр  $\Rightarrow \angle BOM = \angle COM = \alpha$

3) Пусть  $\angle OCH = \angle OBM = \beta$  (т.к.  $\triangle OBC$  - равноб)

$\angle OHC$  - прям  $\Rightarrow \beta = 90 - \alpha$

4)  $PO(B$ -внек  $\Rightarrow \angle OPB = 180 - \beta \Rightarrow \angle APO = \beta$  - смежное

5) продлили  $PO$ , пусть  $PO \cap AC = M$

6)  $\triangle APM \angle A = \alpha, \angle P = \beta \Rightarrow \angle AMP = 90^\circ$  - прямая угловая.  
 $\Rightarrow PM \perp AC$

6)  $PM \perp AC$ ,  $PM$  содержит  $O$ -центр окруж  $\Rightarrow PM$  - сер. перп. к  $AC$

$$\Rightarrow AM = MC = \frac{35}{2}$$

$$7) \text{по теореме} \sqrt{PM^2 - \left(\frac{35}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{(50+35)(50-35)}}{2} = \frac{5\sqrt{3}\sqrt{17}}{2}$$

$$8) \sin \alpha = \frac{PM}{AP} = \frac{5\sqrt{3}\sqrt{17}}{2 \cdot 25} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1      2      3      4      5      6      7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$9) S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{30 \cdot 35 \cdot \sqrt{51}}{2} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

Ответ:  $S_{ABC} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$



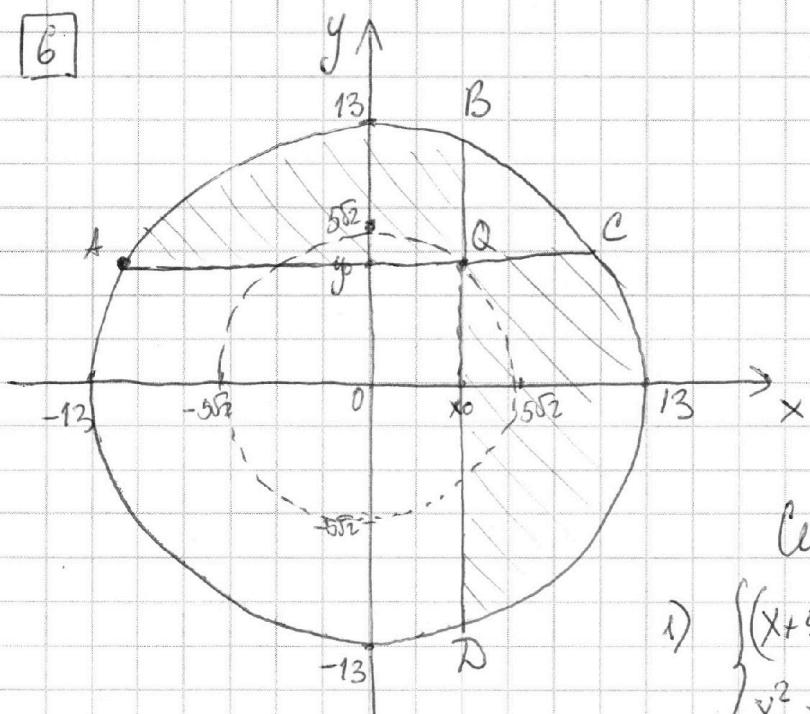
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

[6]



Пусть  $\cos \alpha = n$ ,

$$\text{тогда } \sin \alpha = \pm \sqrt{1-n^2}$$

Ось  $x$ :

$$(x+5\sqrt{2}n)(y \mp 5\sqrt{2}\sqrt{1-n^2}) \leq 0$$

Система:

$$\begin{cases} (x+5\sqrt{2}n)(y \mp 5\sqrt{2}\sqrt{1-n^2}) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

График окружн.  $x^2 + y^2 = 13$

$\Rightarrow$  точки внутри окружн.

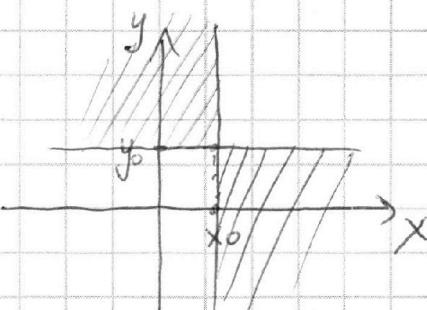
$$2) (x+5\sqrt{2}n)(y \mp 5\sqrt{2}\sqrt{1-n^2}) \leq 0$$

$$x_0 = -5\sqrt{2}n \quad y_0 = \mp 5\sqrt{2}\sqrt{1-n^2}$$

Ограничение имеем для  $n$ :

$$x_0^2 = 50n^2, \quad y_0^2 = 50 - 50n^2$$

$$x_0^2 + y_0^2 = 50 \Rightarrow \text{точки } x_0 \text{ и } y_0 \text{ лежат на окружн. } x^2 + y^2 = 50$$



3) Помогите та график: периметр  $M$  имеет форму

$$\text{равен } \widehat{AB} + \widehat{CD} + \widehat{AC} + \widehat{BD} \rightarrow \max$$

$$\text{т.к. } \angle AQB = 90^\circ = \angle ACD \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{CD} = 180^\circ - \text{бсвра}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

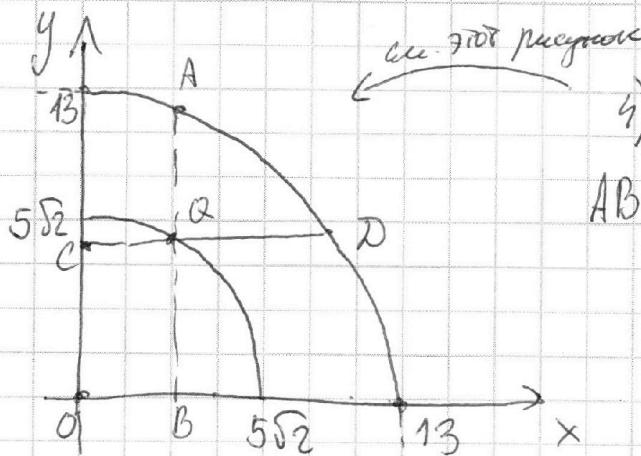
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$  посредство косинусами.  $AC + BD \rightarrow \max$

$$Ay_0 = y_0 C = \frac{1}{2} AC, \quad Bx_0 = x_0 D = \frac{1}{2} BD \Rightarrow y_0 C + x_0 D \rightarrow \max$$

Все 4 четверти (сектора круга) симметричны  $\Rightarrow$  достаточно

найти максима 1 решения в 1 секторе  $\rightarrow$  и плюс решени в 3 симметричных.



$$4) AB + CD \rightarrow \max$$

$$AB + CD = \sqrt{169 - x_0^2} + \sqrt{169 - y_0^2} =$$

$$= \sqrt{169 - x_0^2} + \sqrt{119 + x_0^2} \quad |^2 \uparrow$$

$$169 - x_0^2 + 119 + x_0^2 + \cancel{+ 2\sqrt{(169-x_0^2)(119+x_0^2)}} \rightarrow \max$$

$$+ 2\sqrt{(169-x_0^2)(119+x_0^2)} \rightarrow \max$$

$$169 + 119 + 2\sqrt{(169-x_0^2)(119+x_0^2)} \Rightarrow 169 \cdot 119 + 50x_0^2 - x_0^4 \rightarrow \max$$

Это парab. ветвь. вниз отходит.  $x_0^2$

$\Rightarrow$  вершина в т.кже  $x_0^2 = 25$

$$\Rightarrow x_0 = 5$$

$$\text{При } x_0 = 5 \quad y_0 = \sqrt{50 - 25} = 5$$

$$\Rightarrow AB = CD = \sqrt{169 - 25} = 12$$

$$\Rightarrow \text{перим. } M = 12 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} (2\pi \cdot 13) = 48 + 13\pi$$

(половина длины окружности)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

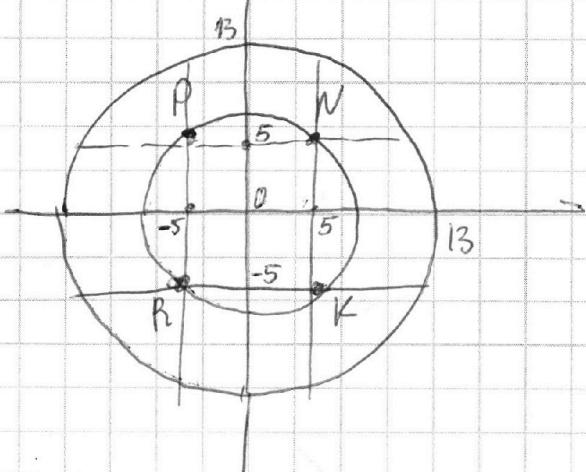
- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Из следующего следует, что точка подходит все такие

точки:  $N, K, R, P$  — подходит



$$6) x_0 = -5\sqrt{2}n \quad \cancel{\text{некорректно}}$$

$$x_0 = -5\sqrt{2}n = \pm 5$$

$$\Rightarrow n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Обратн. замечка

$$\cos \alpha = n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: 1)  $M_{\max} = 48 + 13\pi$

2)  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\pi n, n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

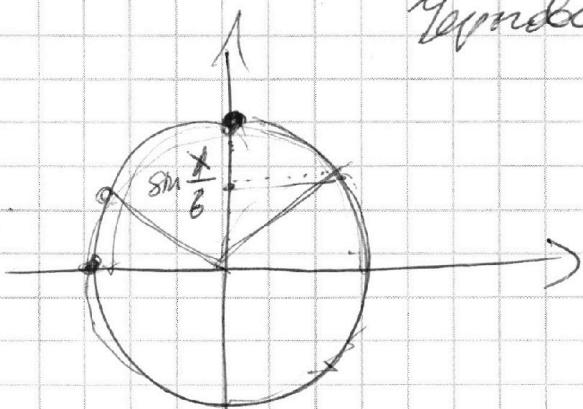
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\pi + \pi =$$

$$\begin{array}{r} -942 \\ -5 \\ \hline 44 \\ -40 \\ \hline 4 \end{array} \quad | \begin{array}{r} 5 \\ 1,8 \end{array}$$

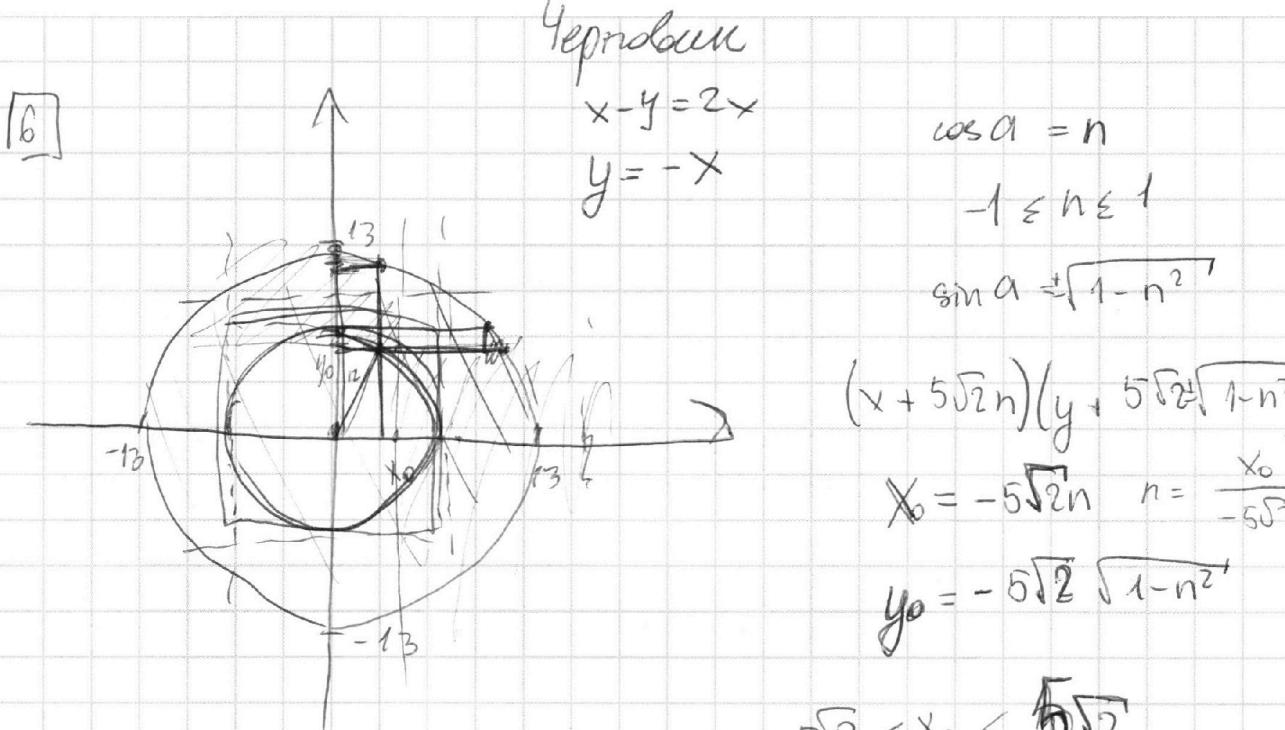


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



~~$25 \cdot 2 + h^2$~~ 

$$h = \sqrt{169 - 50} = \sqrt{119} = \sqrt{7 \cdot 17}$$

$\frac{1,4}{7,4}$

$$y_0 = -5\sqrt{2} \div \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{50}} = -5\sqrt{2} \div \frac{\sqrt{50 - x_0^2}}{5\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{-50 \div \sqrt{50 - x_0^2}}{5\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{169 - 50} = \sqrt{119}$$

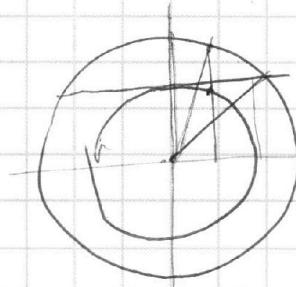
$$y_0^2 = 50(1 - n^2) \quad x_0^2 = 50n^2 \quad P = 13 \div \sqrt{119}$$

$$x_0^2 + y_0^2 =$$

$$P_2 =$$

$$\cos \frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} + \frac{\sqrt{3} \cdot 1}{2 \cdot 2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

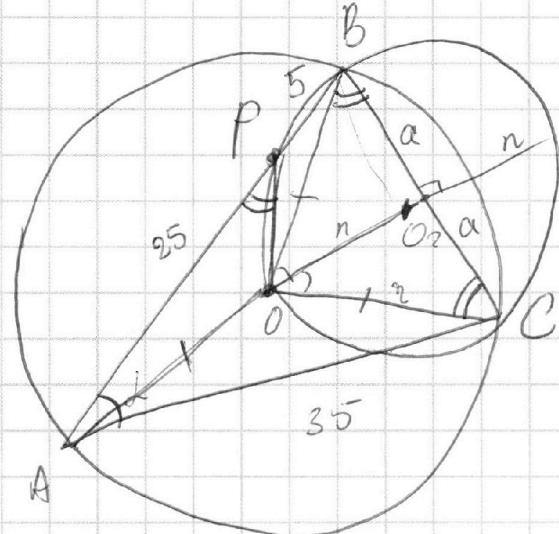
СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



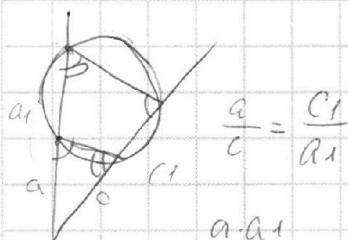
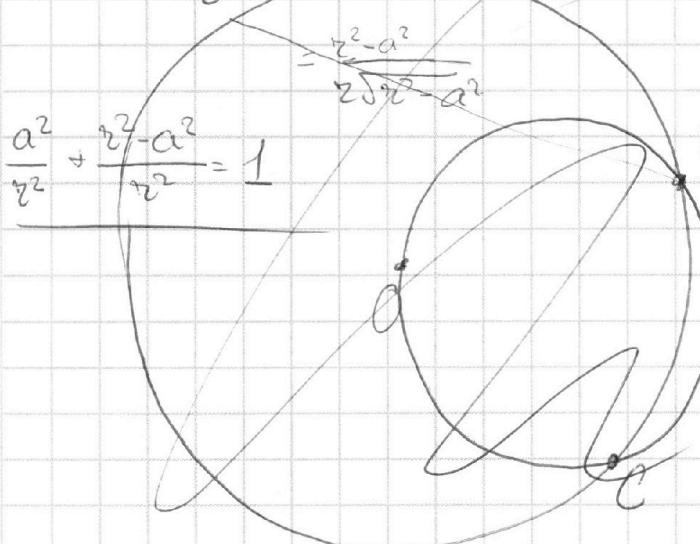
(5)

Черновик



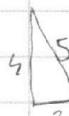
$$c = \sqrt{r^2 - a^2}$$

$$\cos = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r} = \frac{r^2 + r^2 - a^2 - a^2}{2r^2} =$$



$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$\frac{15}{30 \cdot 35} \neq \frac{1}{2}$$



$$S = \frac{12 \cdot 5}{10} = 6$$

$$\frac{2a}{\sin \alpha} = 2r = \frac{a}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$a = 2r^2$$

$$\frac{2a}{\sin 2\alpha} = 2n \Rightarrow n = \frac{a}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$25 \cdot 30 = 2 \left( r + \frac{2a}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \right)$$

$$25 \cdot 30 = 2 \left( r + \frac{2 \alpha \cdot r}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \right)$$

$$\cos \alpha = \frac{30^2 + 35^2 - 4a^2}{2 \cdot 30 \cdot 35} =$$

$$= \frac{30}{\sqrt{35}}$$

$$25 \cdot 30 = r^2 + \frac{(2 \cdot 30 \cdot 35)^2}{60^2 + 35^2 - 4a^2}$$

$$r^2 = \frac{25 \cdot 30}{1 + \frac{2 \cdot 30 \cdot 35}{30^2 + 35^2 - 4a^2}} =$$

$$25 \cdot 30 = \frac{30^2 + 35^2 - 4a^2 + 60 \cdot 35}{30^2 + 35^2 - 4a^2} =$$

$$= \frac{25 \cdot 30}{30^2 + 35^2 - 4a^2} = 15 \cdot 35 \cdot \frac{a}{r^2} = \dots$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

*Упрощение*

(3)  $x, y \in \mathbb{R}$   $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi y$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi y$$

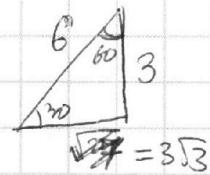
$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos \pi x \cos \pi y - \cos^2 \pi y$$

$$\sin^2 \pi x + \cos^2 \pi y = \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y$$

$$= \cos(\pi x + \pi y)$$

#  $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \cancel{\cos} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta = \cos(\alpha + \beta)$  1)  $\alpha = \beta = \pi$



(4) Пусть основание =  $x$

Бер 1:  $\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$

Бер. 2:  $\frac{a}{x} \cdot \frac{a-1}{x-1}$

$\frac{a(a-1)}{12} = 6$

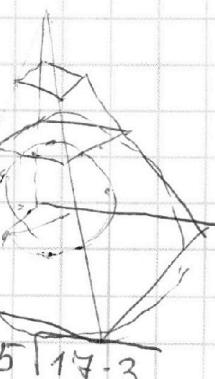
$a^2 - a - 72 = 0$

$D = 1 + 288 = 289 \leftarrow \cancel{17^2}$

$a_1 = \frac{1+17}{2} = 9$

Отв: 9

$\frac{17}{17}$



$$\sqrt{\frac{25^2 \cdot 4 - 35^2}{4}} = \sqrt{\frac{(50+35)(50-35)}{2}} = \sqrt{\frac{85 \cdot 15}{2}} = 5 \cdot 17 / 3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

(1)

$$\begin{array}{r} 2222 \\ \times 11 \\ \hline 22 \\ 22 \\ \hline 2022 \end{array}$$

Черновик

$$A = 11 \cdot \underbrace{a0a}_{\text{из цифр}} = 11 \cdot 101 \cdot a$$

из цифр

22

$$B = a \underline{6} \underline{6}$$

$$C = \underline{1} \underline{d} \underline{3}$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C = x^2$$

$$\Rightarrow B; 101 \Rightarrow B = 606$$

$$11 \cdot a \cdot 6 \cdot C = x^2$$

$$\Rightarrow C; 11 \Rightarrow C = 33$$

$$11 \cdot a \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \Rightarrow a = 2$$

Ответ: 2222, 606, 33

(2)  $x, y > 0$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$= \frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow xy = xy + 2x - 2y - 4$$

$$M = (y+2)^3 - y^3 - 6y(y+2)$$

$$x - y - 2 = 0$$

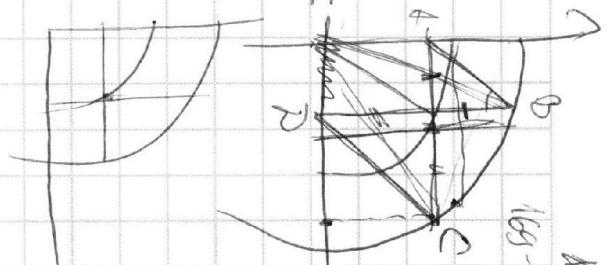
$$x = y + 2$$

$$= x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy$$

$$= x^3 + x^2y + xy^2$$

$$= (y^2 + 4y + 4)(y+2) - y^3 - 6(y^2 + 2y) = y^5 + 2y^4 + 4y^3 + 8y^2 + 4y + 8 - y^5 - 6y^3 - 12y^2$$

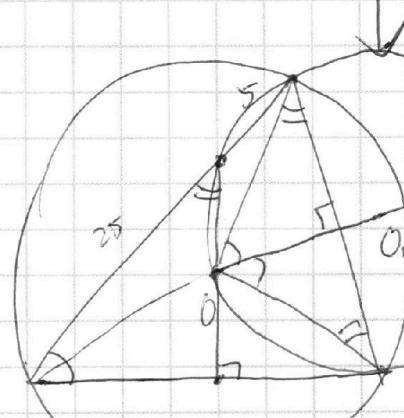
$$= 8$$



$$AB = 144$$

$$AC = \sqrt{169 - 144} + \sqrt{169 - 49} \approx 24$$

169



$$AC = \sqrt{169 - 144} + \sqrt{169 - 49} \approx 24$$

$$x^2 = 50$$

$$x = 5$$

169