



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.

По усл. число A состоит из одинаковых цифр, значит, его можно представить в виде $A = 1111 \cdot a$, где $a \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
 $A = 11 \cdot 101 \cdot a$

Т.к. по условию $A \cdot B \cdot C$ - квадрат ~~натурального~~ натурального числа, значит, что $B \cdot C$ кратно четной степени 101 и четной степени 11 .

Числа 101 и 11 - простые и по усл. B - трехзначное, C - двузначное, значит возможен только один случай: B - точно кратно 101 , следовательно, оно представимо в виде $B = 101b$, где b может быть только цифрой (кроме нуля), т.к. иначе не будет выполняться условие его трехзначности. По условию число B содержит хотя бы одну цифру семь и из всех возможных вариантов для B ($101, 202, 303, \dots, 909$) подходит только 707 , то есть $B = 7 \cdot 101$

Число B определено однозначно и оно не кратно 11 , значит число C : 11 и оно представимо в виде $C = 11c$, где c - цифра (кроме нуля). По условию содержит хотя бы одну единицу и из всех вариантов ($11, 22, 33, \dots, 88, 99$) подходит только 11 , значит, $C = 11$ однозначно.

Для того, чтобы выполнялось условие квадрата натур. числа, a определяется как 7 однозначно. и $A = 7777 = 7 \cdot 101 \cdot 11$
В результате, возможна одна пара.

Ответ: $(7777; 707; 11)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2.

По условию: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow \frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)}$$

Возможны два случая: 1) числители равны нулю, знаменатели не равны нулю.

2) числители не равны нулю, знаменатели равны друг другу и не равны нулю.

1) Заметим, что $y+x+3 > 0$ - всегда, т.к. по условию $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.
 Значит, первый случай не дает корней при положительных x и y .

2) Числители точно не равны нулю, значит просто проверяем равенство знаменателей (и чх не равенство нулю).

$$\begin{aligned} xy &= (x-4)(y+4) \\ xy &= xy + 4x - 4y - 16 \\ 4x &= 4y + 16 \end{aligned}$$

$$x = y + 4$$

Подставим в выражение M:

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 12xy = (y+4)^3 - y^3 - 12y(y+4) = \\ &= y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y = 64 \end{aligned}$$

Выражение M при положительных x и y может принимать только значение 64.

Ответ: 64.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

а) $\sin^2(\pi y) - \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y) = \cos^2(\pi y) + \cos(\pi x) \cdot \cos(\pi y)$
 $\underbrace{\cos^2(\pi y) - \sin^2(\pi y)}_{\text{косинус двойного угла}} + \underbrace{\cos(\pi x) \cdot \cos(\pi y) + \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y)}_{\text{косинус разности}} = 0$

$$\cos(2\pi y) + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

по формуле суммы косинусов: $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$$2 \cos \left(\frac{2\pi y + \pi x - \pi y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi y - \pi x + \pi y}{2} \right) = 0$$

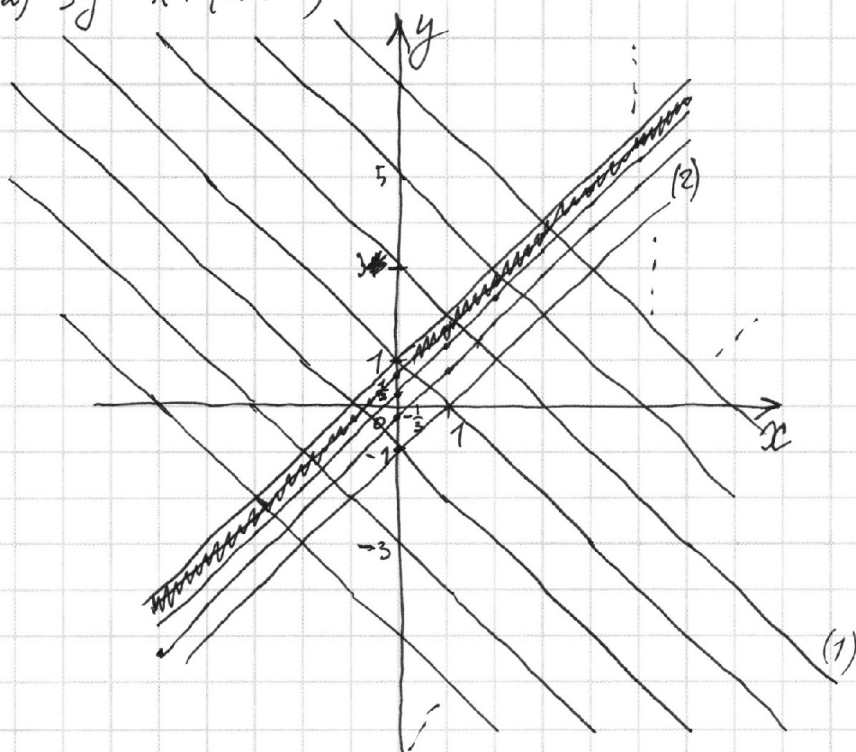
$$\cos \left(\frac{\pi y + \pi x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{3\pi y - \pi x}{2} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi y + \pi x}{2} \right) = 0 \\ \cos \left(\frac{3\pi y - \pi x}{2} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi y + \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 + 2n \quad (1) \\ 3y - x = 1 + 2n \quad (2) \end{cases} n \in \mathbb{Z}$$

$2n+1$ — нечетное число, все $(x; y)$ удобно представить на графике xOy в виде множества прямых:

1) $y = -x + (2n+1)$

2) $3y = x + (2n+1)$ — прямая $y = x + (2n+1)$, параллельная по Oy в 3 раза.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

$$\delta) \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

Пусть $\alpha = \arccos \frac{x}{7} \Rightarrow \alpha \in [0; \pi]$

" $\beta = \arcsin \frac{y}{4} \Rightarrow \beta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Заметим, что минимальное значение $(\alpha - \beta)$ достигается ^{только} при $\min(\alpha) = 0$ и $\max(\beta) = \frac{\pi}{2}$ и равняется $-\frac{\pi}{2}$, значит, неравенство $\alpha - \beta > -\frac{\pi}{2}$ эквивалентно:

$$\begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \beta \neq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{7} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 7 \\ y \neq 4 \end{cases}$$

При этом есть ограничения:

$$\begin{cases} \frac{x}{7} \in [-1; 1] \\ \frac{y}{4} \in [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \end{cases}$$

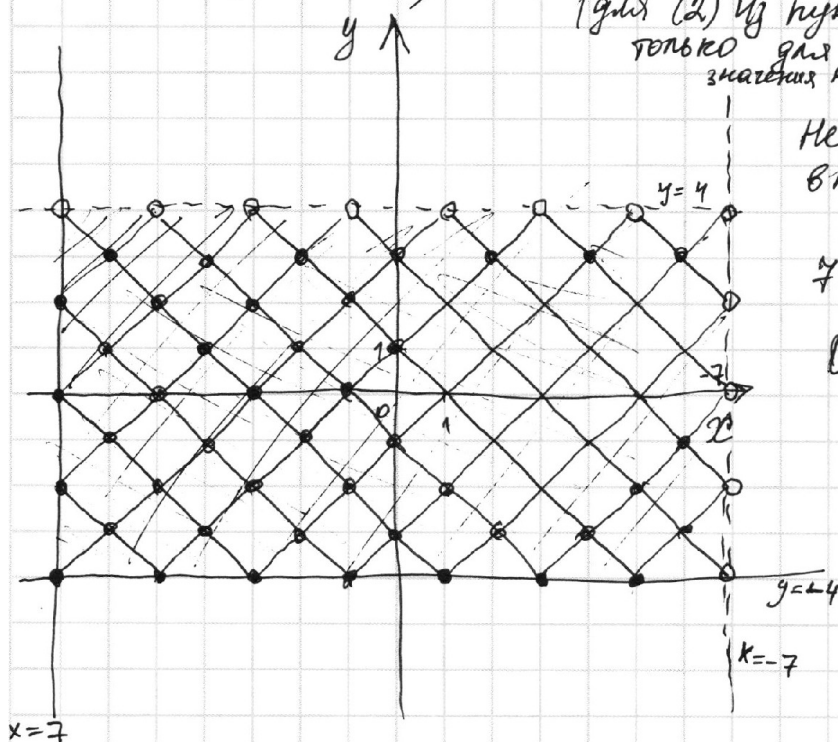
$$\Rightarrow \begin{cases} x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \end{cases}$$

Обозначим эти области на графике ранее и посчитаем количество целых $(x; y)$ (для (2) из пункта а) будем рисовать только для $2n+1; 3$, т.к. иные будут значения не целые)

Не выколотых точек внутри зоны $\begin{cases} x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \end{cases}$

$$7 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 56$$

Ответ: а) $\begin{cases} x+y=2n+1, n \in \mathbb{Z} \\ 3y-x=2n+1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$
б) 56.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Пусть всего в классе N учеников (включая Петю и Васю)
и пусть x — столько билетов добавили к концу месяца, $N \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{N}$

Тогда вероятность в начале месяца для Пети и Васи:

C_N^4 — всего способов раздать четыре билета

C_{N-2}^2 — способов раздать два билета ученикам (кроме Васи и Пети, поэтому из $N-2$)
и два билета оставить Пете и Васе

$$P_1 = \frac{C_{N-2}^2}{C_N^4} = \frac{(N-2)(N-3)}{2} \cdot \frac{2}{N(N-1)(N-2)(N-3)} = \frac{12}{N(N-1)} \quad \text{вероятность в начале месяца.}$$

В конце месяца билетов стало $x+4$:

C_N^{x+4} — всего способов раздать $x+4$ билета

C_{N-2}^{x+2} — оставляем 2 билета Пете и Васе, остальные раздаем $(N-2)$ ученикам (кроме Пети и Васи)

$$P_2 = \frac{C_{N-2}^{x+2}}{C_N^{x+4}} = \frac{(N-2)(N-3) \dots (N-x-3)}{2 \cdot 3 \dots (x+1)(x+2)} \cdot \frac{2 \cdot 3 \dots (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{N(N-1)(N-2)(N-3) \dots (N-x-3)} = \frac{(x+3)(x+4)}{N(N-1)} \quad \text{вероятность в конце месяца}$$

По условию: $P_2 = 11P_1$. Тогда:

$$\frac{(x+3)(x+4)}{N(N-1)} = \frac{11 \cdot 12}{N(N-1)} \quad \left| \begin{array}{l} \text{можем сократить на } N(N-1), \\ \text{т.к. } N \in \mathbb{N} \text{ и } N \geq 2 \text{ (т.к. минимум Вася и Петья в классе)} \end{array} \right.$$

$$(x+3)(x+4) = 11 \cdot 12$$

Два последовательных натуральных числа ($x \in \mathbb{N}$)
~~132~~ представим в виде произведения равно двух
последовательных чисел единственным
образом $\Rightarrow \begin{cases} x+3=11 \\ x+4=12 \end{cases} \Rightarrow x=8 \Rightarrow$ в конце месяца
выдали $x+4=8+4=12$ билетов

Ответ: 12.



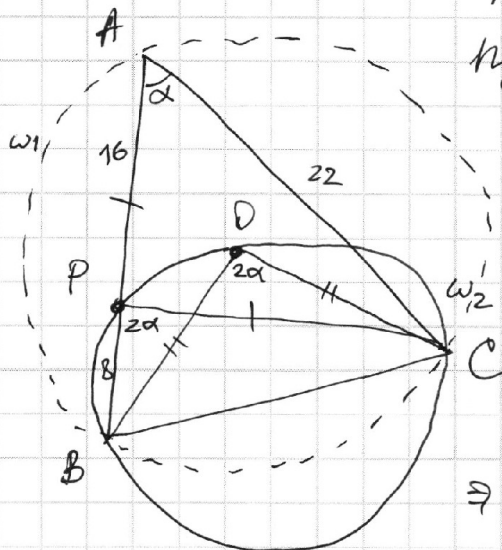
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.



Пусть $\angle BAC = \alpha$

Тогда $\angle BOC$ - центральный дм $\angle BAC$ в окружности $\omega_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BOC = 2\alpha$$

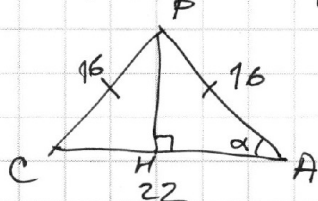
Проведем PC ; $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$, т.к. опираются на одну дугу в ω_1 .

$\angle BPC$ - внешний дм $\triangle APC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BPC = \angle PAC + \angle ACP \Rightarrow \angle ACP = \alpha \Rightarrow 2\alpha = \alpha + \angle ACP \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle APC$ рб и $AP = PC = 16$.

в $\triangle APC$ опустим высоту из P :



она же и высота, и медиана, и биссектриса $\Rightarrow CH = AH = \frac{AC}{2} = 11$

Тогда из прямоугольного $\triangle PAH$:

$$\cos \alpha = \frac{AH}{AP} = \frac{11}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{256 - 121}{256}} = \frac{\sqrt{135}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

по основному тригонометрическому тождеству $\sin \alpha > 0$, т.к. по условию $\triangle ABC$ - остроугольный.

$$\begin{aligned} \text{Тогда: } S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \\ &= 24 \cdot 11 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{6 \cdot 11 \cdot 3\sqrt{15}}{4} = \frac{3 \cdot 11 \cdot 3\sqrt{15}}{2} = \frac{99\sqrt{15}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } S_{\triangle ABC} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

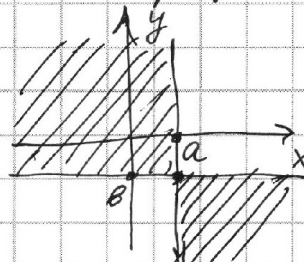
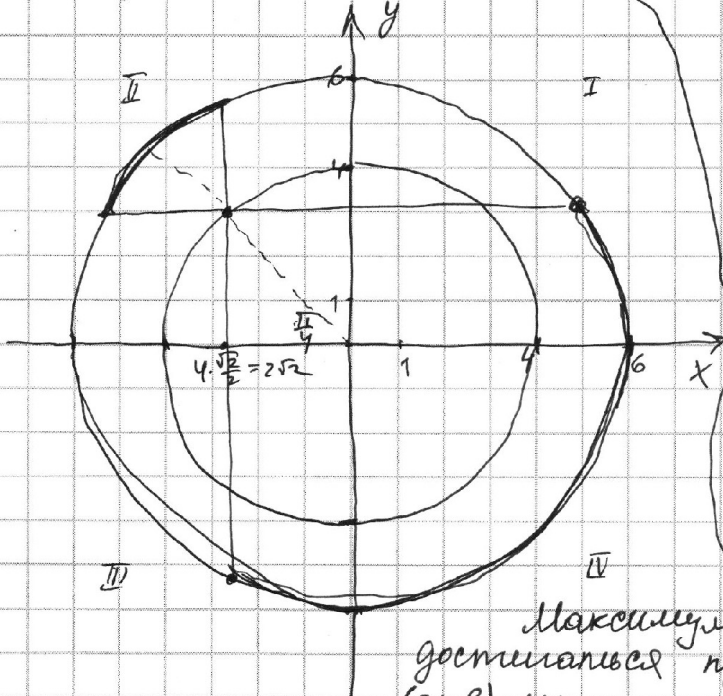
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 & \text{NG. (1)} \\ x^2+y^2 \leq 36 & \text{— круг радиусом 6 с центром (0;0)} \end{cases}$$

(1): Сделаем замену: $\begin{cases} a = -4\sin\alpha \\ b = 4\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (x-a)(y-b) \leq 0 \\ a^2+b^2=16 \end{cases}$ — этому неравенству соответствует область на графике:



(независимо от знака a и b)

Точка их пересечения $(a; b)$ будет в будущей фигуре Φ задавать общую точку двух секторов, то есть эта точка будет лежать на окружности $x^2+y^2=16$ с $R=4$.

Максимум значения M будет достигаться при условии, что точка $(a; b)$ лежит на пересечении окружности $x^2+y^2=16$ и биссектрисы II и IV четвертей на плоскости, то есть

при $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Посчитаем это значение периметра:

$(a; b) = (2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$

$$P = 2 \cdot 4\sqrt{6} + \frac{\pi}{2} \sqrt{2(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2} + \frac{\pi}{2} \sqrt{2(2\sqrt{6}+2\sqrt{2})^2} = M.$$

Сумма длин дуг у фигуры Φ посчитана, т.к. в окр-ти с $R=4$ угол 90° всегда соответствует половине окр-ти, а радиус всегда будет высекал равные дуги на большей окр-ти.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

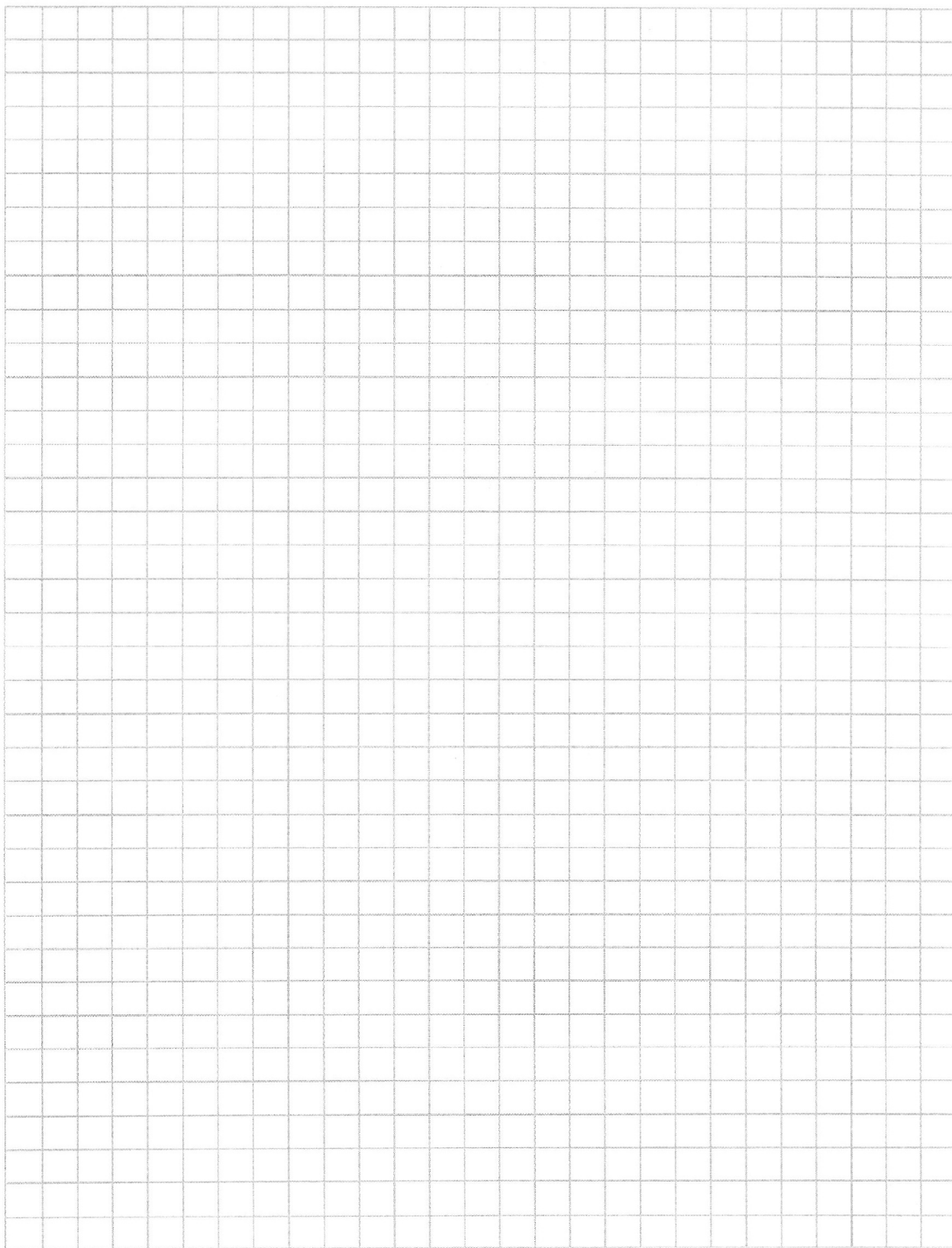
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha - \beta > -\frac{\pi}{2} \quad \text{чертовик} \quad \alpha \in [0; \pi]$$

просто условие:

$$\begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \beta \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\beta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \quad \text{минимальная разность при } \alpha \text{ или } \beta \text{ макс.}$$



$$\cos \alpha \neq \frac{x}{7} \Rightarrow x \neq 7$$

$$\sin \beta = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{y}{4} \neq 0$$

$$\frac{x}{7} \in [-1; 1] \Rightarrow x \in [-7; 7]$$

$$\frac{y}{4} \in [-1; 1] \Rightarrow y \in [-4; 4]$$

$$l = \sqrt{2(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$x^2 + y^2 = 36 \quad x = -2\sqrt{2} \quad x^2 = 8 \quad y = \pm\sqrt{24} \quad 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6}$$

№. Пусть было N ординарных свечников и в конце число свечей увеличилось на x .

всего способов: C_N^4

Петя и Васька: C_N^2

$$P_1 = \frac{C_N^2}{C_N^4} = \frac{N(N-1)}{2}$$

$$= \frac{12}{(N-2)(N-3)} = P_1$$

Всего св.: C_N^{4+x}

Петя и Васька: C_N^{2+x}

$$P_2 = \frac{C_N^{2+x}}{C_N^{4+x}} = \frac{N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-x-1)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (x+1)(x+2)}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)!}{k!}$$

$$= \frac{(N-x-2)(N-x-1)(x+3)(x+4)}{(N-x-2)(N-x-3)} = \frac{132}{(N-2)(N-3)}$$

$$\frac{(x+3)(x+4)}{(S_1-x)(S_2-x+1)} = \frac{11 \cdot 12}{S_1(S_1+1)}$$

$$N-2-x+1 = N-x-1 \quad N-4-x+1 = N-x-3$$

$$132 = 12 \cdot 11$$

$$\text{пусть } N-2 = S_1 = S+1$$

$$N-3 = S_2 = S$$

$$\frac{x(x+3)(x+4)}{k(S-x)(S+1-x)} = \frac{11 \cdot 12}{S(S+1)}$$

8/22

$$\begin{aligned} 1) & 11 \cdot 3 \cdot 4 \\ 2) & 12 \cdot 11 \cdot 1 \end{aligned}$$

$$11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

н1. $A \cdot B \cdot C = N^2$

$A = 1111 \cdot a =$

$= 101 \cdot 11 \cdot a$ - цифра

~~$B = 101 \cdot b$~~

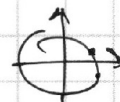
С не может быть: $101 \Rightarrow B: 101 = 2 \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{(\alpha+\beta)}{2}) \cos(\frac{\beta-\alpha}{2})$

B - трехзначное $\Rightarrow B = 101 \cdot b$, где $b \in [1; 9]$

по условию должна быть семерка $\Rightarrow$ (иначе будет не трехзнач.)

$\Rightarrow B = 707$

B не: $11 \Rightarrow C: 11 \Rightarrow C = 11C$



$B = 101 \cdot 7$

$A = 101 \cdot 11 \cdot a$

$C = 11$

$[1; 9]$

$a = 7$

$A = 7777$

$M = x^3 - y^3 - 12xy$

н2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x+4+3}{(x-4)(y+4)}$

$\Rightarrow$ равно при $y+x+3=0$ или при $y+x+3 \neq 0$

$\{x, y > 0\}$

a) $y = -x - 3 \notin \mathbb{N}$ с условием

$3 \cdot 16$

$(x-4)(y+4) = xy$

b) $xy + 4x - 4y - 16 = xy$

$4x = 4y + 16$

$x = y + 4$

$(y+4)^3 - y^3 - 12y(y+4) =$

$y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y =$

64

н3. $\sin^2(\pi y) - \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y) = \cos^2(\pi y) + \cos(\pi x) \cdot \cos(\pi y)$

~~$\cos^2(\pi y) - \sin^2(\pi y) + \cos(\pi x) \cdot \cos(\pi y) + \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y) = 0$~~

$\cos(2\pi y) + \cos(\pi x - \pi y) = 0$

$\cos(\frac{\pi y + \pi x}{2}) \cdot \cos(\frac{3\pi y - \pi x}{2}) = 0$

$\frac{\pi y + \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + m\pi$

$x + y = 1 + 2k$

$3y - x = 1 + 2m$

$4y = 2 + 2(n+k)$

$2y = 1 + (n+k)$

$y = \frac{n+1}{2}$

$z \in \mathbb{Z}$

комбинируем раскрываем

$\frac{2\pi y + \pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi y + \pi x}{2}$

$\frac{2\pi y - \pi x + \pi y}{2}$



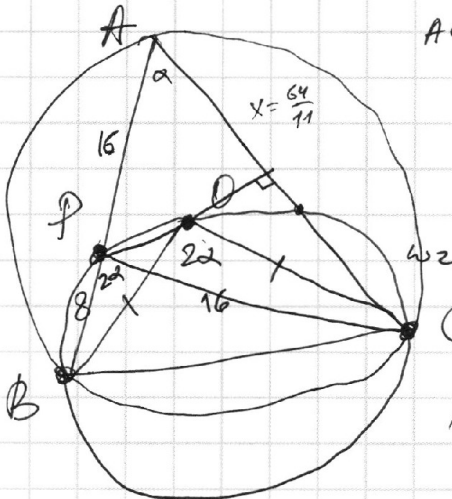
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.



$$AC = 22$$

$$16 \cdot 8 = x \cdot 22$$

$$8 \cdot 8 = x \cdot 11 \quad x = \frac{64}{11}$$

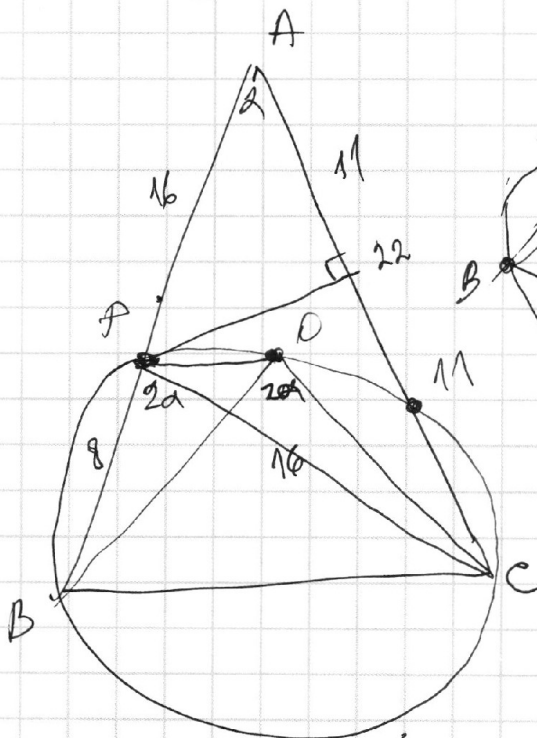
$$\begin{array}{r} 242 \\ - 64 \\ \hline 178 \end{array}$$

$$\frac{242 - 64}{11} = \frac{178}{11}$$

$$24 \cdot 8 = 160 + 32$$

$$16 \cdot 24 = 22 \cdot x$$
$$8 \cdot 24 = 11 \cdot x$$

$$\frac{192}{11} \quad \frac{242}{11}$$



$$\cos \alpha = \frac{11}{16}$$

$$\frac{121}{256}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ + 16 \\ \hline 256 \\ - 121 \\ \hline 135 \end{array}$$
$$160 + 96$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 15} \\ - 10 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 5$$
$$3\sqrt{15}$$

$$\frac{6 \cdot 11 \cdot 3\sqrt{15}}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

НЧ. всего учеников N , добавили билетов x . 42 N
 $P_1 = \frac{C_{N-2}^2}{C_N^4} = \frac{(N-2)(N-3)}{12} \cdot \frac{12}{N(N-1)}$

$P_2 = \frac{C_{N-2}^{x+2}}{C_N^{x+4}} = \frac{(N-2)(N-3)(N-x-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (x+1)(x+2)}$
 $N-2-x-2+1 = N-x-3$
 $N-x-4+1 = N-x-3$
 $a^2 + b^2 = 16$
 $b^2 = 16 - a^2$

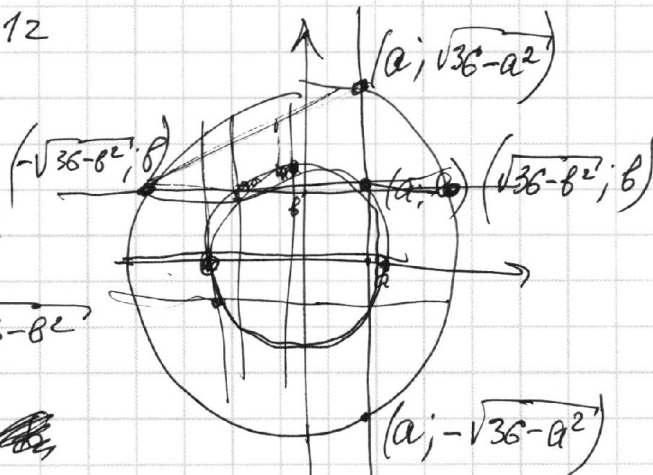
$11 \cdot 3 \cdot 4$

$11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$

$2\sqrt{20+a^2}$

$2\sqrt{36-b^2}$

$2\sqrt{36-a^2}$



длина хорды:

$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{l}{d} \Rightarrow \alpha = \frac{l}{d} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R$
 $\alpha R = \frac{l}{d} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R$
 $L = \frac{l}{d} \cdot \pi R$

$\sqrt{(a+\sqrt{36-b^2})^2 + (b+\sqrt{36-a^2})^2}$

- длина

πR

длина дуги

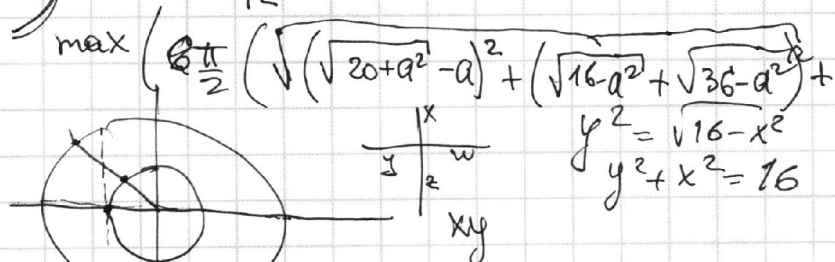
$(a, \sqrt{16-a^2})$

$x \sqrt{16-x^2}$

$16-a^2 \geq 0$

$a^2 \leq 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in [-4; 4]$





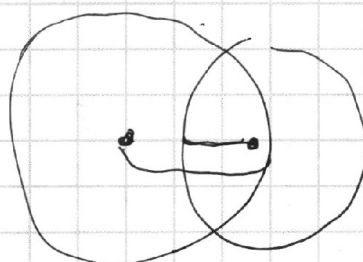
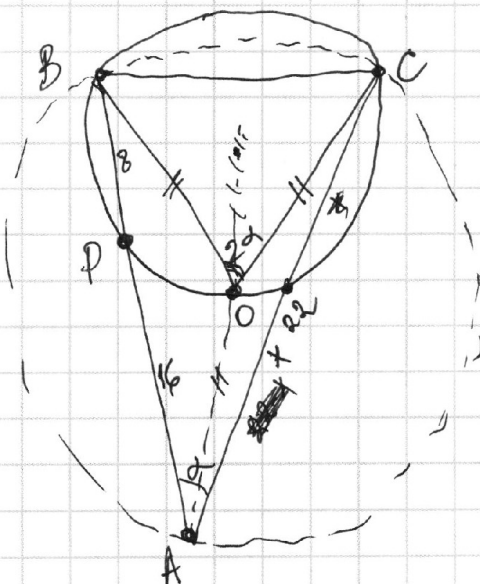
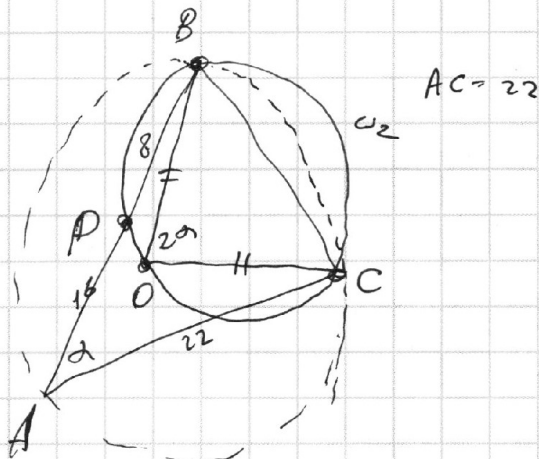
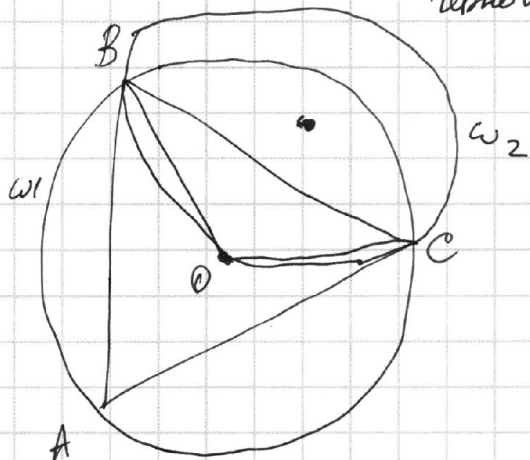
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5. черновик.



$$\frac{BC}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = R$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = R$$

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2 \cos 2\alpha}$$



$$\cos \alpha = \frac{R/2}{r}$$

$$2 \cos \alpha = \frac{R}{r}$$

$$R < 2r$$

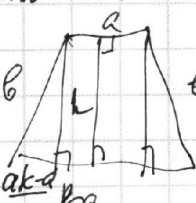
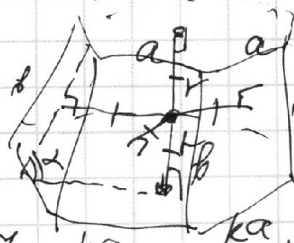
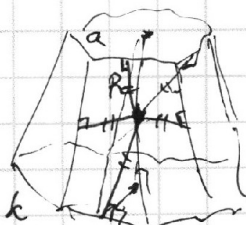
$$\frac{16}{22} = \frac{2}{3}$$

60+

$$(22-x) \cdot x = 16 \cdot 24 = 22 \cdot x$$

$$8 \cdot 16 \cdot 12 = 11 \cdot x \Rightarrow x = \frac{16 \cdot 12}{11}$$

$$\frac{x}{22} = \frac{16 \cdot 12}{11 \cdot 22} = \frac{16 \cdot 6}{121} = \frac{96}{121}$$

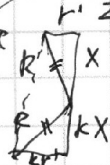


$$h = \sqrt{B^2 + \frac{a^2}{4}(k-1)^2}$$



$$r = \frac{h}{a}$$

центр окр.
демит высоты
в отношении $\frac{1}{k}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

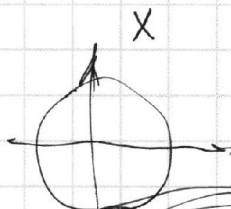
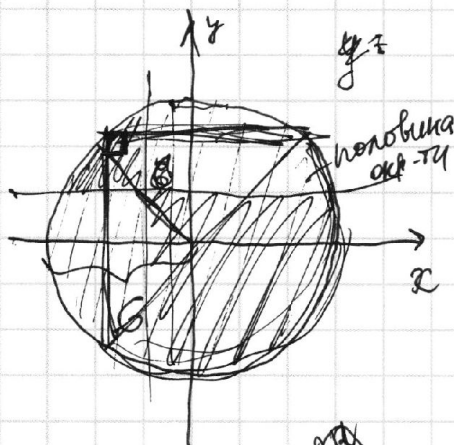
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

Черновик

$$(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0$$



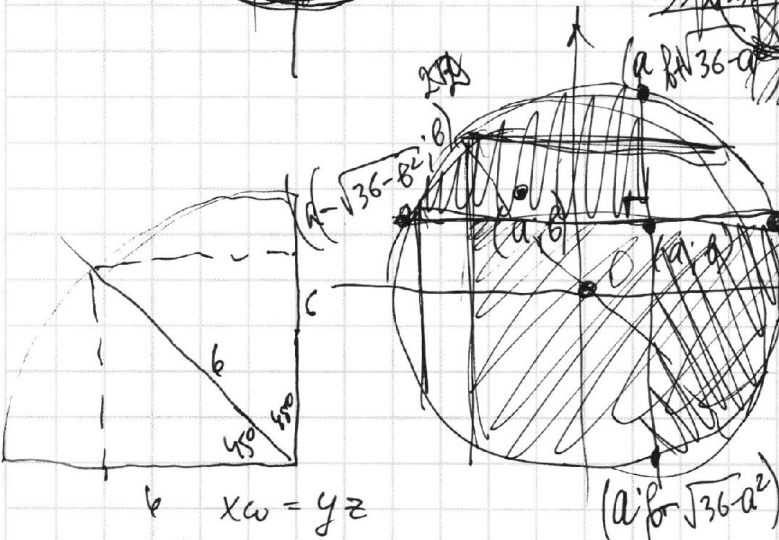
$$(x+a)(y+b) \leq 0$$

$$x = -a$$

$$y = -b$$

$$a^2 + b^2 = 16$$

$$a = \sqrt{16-b^2}$$



$$xw = yz$$

$$S = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}zw$$

$$\max(xy + zw) \text{ при } xw = yz$$

$$x = \frac{zy}{w}$$

$$\frac{zy^2}{w} + zw$$

$$\sqrt{16-16} \cdot 4 \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$(x-a)(y-b) \leq 0$$

$$a^2 + b^2 = 16$$

$$x^2 + y^2 = 36$$

$$a^2 \quad y = \pm \sqrt{36-a^2}$$

