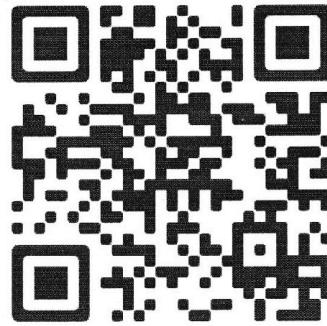


МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.(прод.)

Задачами: 11 однозначное чётное четырёхзначное число.

Ответ: (5555; 101; 55).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1(прод.)

$C = 11$, m.k. $B \geq 11$, m.k. 101 \leq 11, кроме того, $a \neq 11$, m.k. $a < 10$, m.k. a - цифра, начиная с 11 должно входить куда-то еще кроме B , m.k. A-B-C - квадрат нам. числа.

m.k. одна из цифр $C = 5 \Rightarrow a$ вторая тоже, m.k. б двузначных числах, делящихся на 11, где цифры отличаются (11, 22, ..., 99).

Значит $C = 55$.

m.e. $1111 \cdot a \cdot 101 \cdot 55 = x^2$.

5 входит сюда в четной степени $\Rightarrow a \neq 5 \Rightarrow$

$a = 5$, m.k. ~~a~~ $\neq 5$ - это цифра, делящаяся на 5.

x - некое натуральное число

Обозначения: a - 1-я цифра в A ,

b - цифра в разряде сотен в B

c - цифра в разряде десятков в B

d - цифра в разряде единиц в B

e - цифра в разряде десятков в C

f - цифра в разряде единиц в C .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1.

$$A = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + a \cdot 10 + a = a + 1111$$

$$B = b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$$

$$C = c \cdot 10 + f$$

$$1111a \cdot (100b + 10c + d) \cdot (10e + f) = x^2$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

н.к. A·B·C - квадрат нам. числа $\Rightarrow 101$ входит

в A·B·C в чётной степени, причём (-двоичное, тогда $\neq 101$ не входит) в A входит только

один раз ($11a \neq 101, a \neq 101$), н.к. $a \in [0, 9]$, значит

$B \div 101 \Rightarrow C=0$, н.к. + 3-значное число, делящееся

на 101 ($101, 202, \dots, 909$) имеет 0 в разряде

единиц. Ит. замкн для себя из цифр в равен

стве $\Rightarrow B=101$, н.к. ни ~~ни~~ другое прёжнное число,

делящееся на 101, не имеет "1" в качестве цифры

Заключение: 101 - простое число, поэтому оно не

может "не делить" (по некоторым địnhениям) входит в

несколько чисел, а делито числом содержится в B . В чём?

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N 2.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

И.К. $x+y+1 > 0$ ($x>0, y>0$) \Rightarrow можно разделить на $(x+y+1)$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy - 3y + 3x - 9$$

$$3x - 3y - 9 = 0$$

$$x - y - 3 = 0$$

$$x = y + 3$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - 9xy &= (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y = \\ &= y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = 27. \end{aligned}$$

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N³ (прод.) б)

$f(x) = \arccos x : D(f) = [-1; 1], E(f) = [0; \pi] \Rightarrow$
чтобы кр - во не было, надо, чтобы

$$\arccos \frac{x}{y} = \arccos \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = -y, y = -1$, т.е. энд нура как не ног.

Кроме того, $|x| \leq 1, |y| \leq 1 \Rightarrow x \in [-4; 4]$,

$$y \in [-9; 9].$$

Кроме того, из условий в А следует, что либо x , либо y нечетные, но одновременно нечетными они быть не могут. У может принимать ровно 18 значений,

из них 9 - четные, 9 нечетные, для x принимает ровно 10 значений. Для каждого четного x надо выбрать нечетный y (ровно 9 вариантов), для каждого нечетного x надо выбрать четный y (ровно 9 вариантов),

$$\text{значит всего вариантов } 9 \cdot 10 + 9 \cdot 9 = 185$$

Отвем: а) x, y , которые удовл этой совокупности?

$$\begin{cases} x+y=2k+1, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-y=2n+1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

↑
мн. нура
 $(-4; -9)$ нура
не ног

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. 85$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3 (прод.)

$$x+y=2k+1, k \in \mathbb{Z}$$

$$x-y+2x=2n+1, n \in \mathbb{Z}$$

$$x+y=2k+1, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x-y=2n+1, n \in \mathbb{Z}$$

Для того, чтобы уравнение было верным, должно выполняться одно из этих 2 условий.

~~$$\arccos \frac{x}{y} + \arccos \frac{y}{x} < 2\pi$$~~

~~f(x) = \arccos x, E(f) = [0, \pi]~~, значит

~~чтобы доказать первое невозможно, \arccos \frac{x}{y} = \arccos \frac{y}{x} = \pi~~.

~~т.е. \frac{x}{y} = \frac{y}{x} = -1, x = -y, y = -x, все остальные пары кроме (x, y) кроме (-4, -9) нам подходит.~~

Ответ: а) x, y, которые удовл этий ~~свойство~~ совокупности:

$$x+y=2k+1, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x-y=2n+1, n \in \mathbb{Z}$$

~~б) то же, что и в пункте а) кроме (-4, -9).~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N3. a)

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

~~$\sin \pi x$~~

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \sin \pi x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) \cos \pi x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) \sin \pi x - \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) \cos \pi x \right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \left(\frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) - \cos(\pi x) \right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) \cos(\pi x) \right) = 0$$

$$-\frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) - \cos(\pi x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) \cos(\pi x) \right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) \cos(\pi x) \right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) \cos(\pi x) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) + \cos(\pi x) = 0$$

$$\frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2}(x-y) + \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N 4.

Пусть кол-во однажды пойсавших $= n$

тогда вероятность Пети попасть на концерт в начале месяца $\frac{4}{n}$ Васи $-\frac{3}{n-1}$ вместе $-\frac{12}{n(n-1)}$.

Пусть в конце месяца выделили еще x билетов,

тогда вероятность Пети попасть на концерт $-\frac{4+x}{n}$

Васи $\frac{3+x}{n-1}$ вместе $-\frac{(4+x)(3+x)}{n(n-1)}$.

$$\frac{12}{n(n-1)} \cdot \frac{7}{2} = \frac{(4+x)(3+x)}{n(n-1)}$$

$$42 = (4+x)(3+x)$$

$$42 = 12 + 7x + x^2$$

$$x^2 + 7x - 30 = 0$$

Корни: $x=3$, $x=-10$, но $X > 0$, т.к. Это количество выданных билетов (кол-во новых билетов)

т.е. $x=3$

Ответ: 3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5(hypog.)

$$\frac{26^2 + 400 - 1040 \cos 2}{45 \sin^2 2} = \frac{26^2 + 400 - 1040 \cos 2 \left(1 - \frac{165 \sin^2 2}{x^2}\right) \cos 2 - \sqrt{1 - \cos^2 2} \sin 2}{45 \sin^2 2 \cos 2}$$

$$= 16.26$$

$$\frac{26^2 + 400 - 1040 \cos 2}{45 \sin^2 2} = \frac{1076 - 1040 \cos 2 \left(1 - \frac{165 \sin^2 2}{x^2}\right) \cos 2 - \sqrt{1 - \cos^2 2} \sin 2}{45 \sin^2 2 \cos 2}$$

$$= 16.26$$

$$\frac{1076 - 1040 \cos 2}{45 \sin^2 2} = \frac{1076 - 1040 \cos 2 \left(1 - \frac{165 \sin^2 2}{x^2}\right) \cos 2 - \sqrt{1 - \cos^2 2} \sin 2}{45 \sin^2 2 \cos 2} = 16.26$$

$$\frac{1076 - 1040 \cos 2}{45 \sin^2 2} = \frac{1076 - 1040 \cos 2 \left(1 - \frac{165 \sin^2 2}{x^2}\right) \cos 2 - \sqrt{2 - \frac{325 \sin^2 2}{x^2}} \sin 2}{45 \sin^2 2 \cos 2} = 16.26$$

$$\frac{269 - 260 \cos 2}{\sin^2 2} = \frac{269 - 260 \cos 2 \left(1 - \frac{165 \sin^2 2}{x^2}\right) \cos 2 - \sqrt{\frac{2 - 325 \sin^2 2}{x^2} \cdot 9 \sin 2}}{\sin^2 2 \cos 2} =$$

$$= 16.26$$

Недостаток здесь в том что я получал это синус)

Мне скажем найти площадь через $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha$.

I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \text{NS (Чирг.-)} \\
 & \left(\frac{x^2}{4 \sin^2 \alpha} - \frac{2x^2}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} (\cos 2\beta + 2) \right) = AP \cdot AB \\
 & \left\{ \begin{array}{l} x = AC \\ \sin \alpha = \sin \beta \end{array} \right. \\
 & x^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos \alpha \\
 & \left(\frac{x^3}{4 \sin^2 \alpha} - \frac{x^2}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} (\cos 2\beta \cos \alpha - \sin^2 \beta \sin \alpha) \right) = \frac{16 \cdot 25}{25} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{4}{\sin \alpha} \\ \sin \beta = \frac{4 \sin \alpha}{x} \end{array} \right. \\
 & x^2 = 5^2 + 16 - 41,6 \cos \alpha \\
 & \left(\frac{x^3}{4 \sin^2 \alpha} - \frac{x^2}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} ((1 - 2 \sin^2 \beta) \cos \alpha - 2 \sin \beta \cos \beta \sin \alpha) \right) = \frac{16 \cdot 25}{25} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \sin \beta = \frac{4 \sin \alpha}{x} \\ x^2 = 5^2 + 16 - 41,6 \cos \alpha \end{array} \right. \\
 & \frac{5^2 + 16 - 41,6 \cos \alpha}{4 \sin^2 \alpha} - \frac{5^2 + 16 - 41,6 \cos \alpha}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \left(\left(1 - \frac{16 \sin^2 \alpha}{x^2} \right) \cos \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta \right) = \\
 & = \frac{16 \cdot 25}{25} \cdot \frac{1}{25}
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5 (нр. 5)

$$\begin{aligned}
 & (9^2 - 5^2 - 4^2 + 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 2) (5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 2 - 1^2) = \\
 & = 5^2 \cdot 4^2 \cdot 4 (1 - \cos^2 2) \quad | : 4 \\
 & (4^2 - 26^2 - 20^2 + 10 \cdot 26 \cdot 4 \cdot \cos 2) (26^2 + 20^2 - 10 \cdot 26 \cdot 4 \cdot \cos 2 - 6^2) = \\
 & = 26^2 \cdot 20^2 \cdot 4 (1 - \cos^2 2) \quad | : 4 \\
 & (23^2 - 13^2 - 10^2 + 10 \cdot 26 \cdot 4 \cdot \cos 2) (13^2 + 10^2 - 10 \cdot 26 \cdot 4 \cdot \cos 2 - 3^2) = \\
 & = 13^2 \cdot 10^2 \cdot 4 (1 - \cos^2 2) \\
 & (529 - 169 - 100 + 260 \cos 2) (169 + 100 - 260 \cos 2 - 9) = \\
 & = 169 \cdot 400 (1 - \cos^2 2) \\
 & (260 + 260 \cos 2) (260 - 260 \cos 2) = 260^2 (1 - \cos^2 2) (1 + \cos 2)
 \end{aligned}$$

N5 (нр. 5)

$$x^2 = 2r_1^2 - 2r_1 \cos 2\alpha$$

$$x^2 = 2r_1^2 - 2r_1 \cos 2\alpha$$

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$AO^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(2\beta + \alpha), \text{u.k. } \beta < \gamma, \text{u.k. } AB > AC$$

$$AO^2 = r_2^2 + AP^2 = r_2^2 + AP \cdot AB$$

$$r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(2\beta + \alpha) = r_2^2 + AP \cdot AB$$

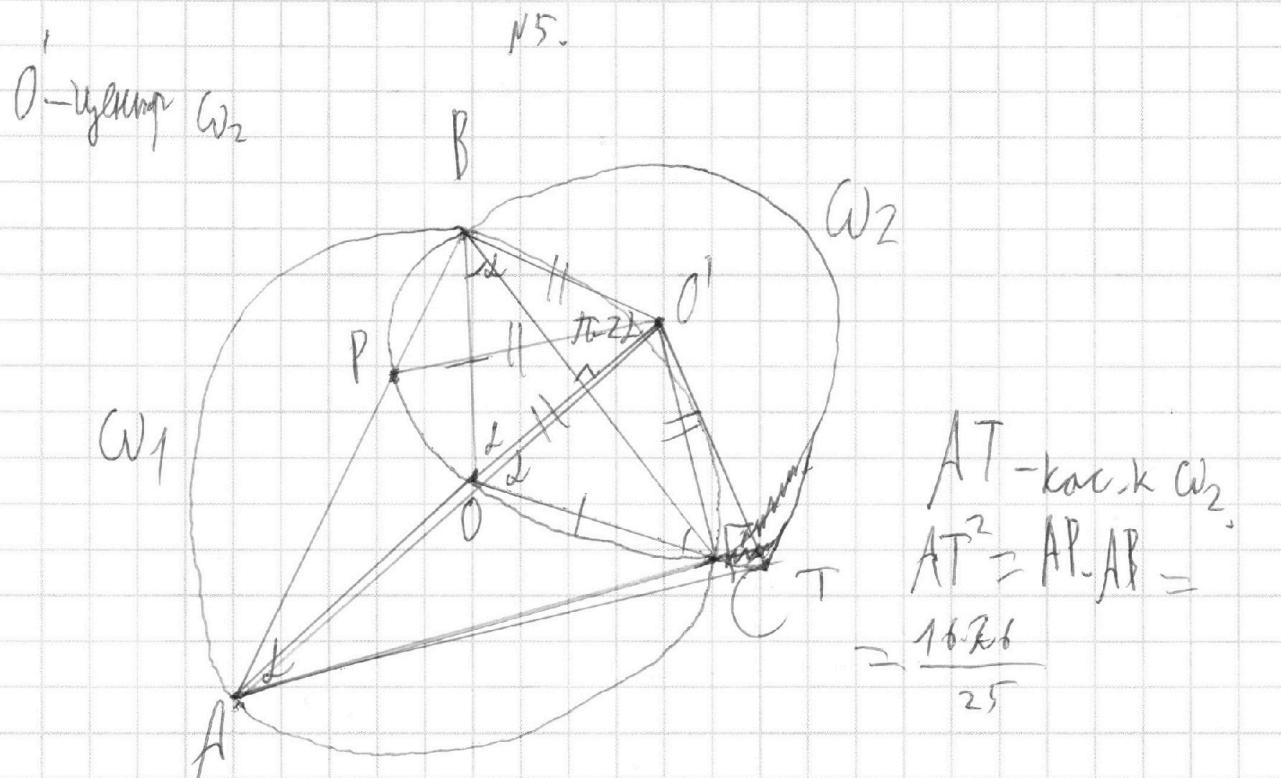


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$AT - \text{кос. к } W_2 \\ AT^2 = AP \cdot AB =$$

$$= \frac{16 \cdot 26}{25}$$

$$AB = AP + PB = \frac{16}{5} + \frac{10}{5} = \frac{26}{5}.$$

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $BC = x$, $R(W_1) = r_1$, $R(W_2) = r_2$.

$$r_1 = \frac{x}{2 \sin \alpha}$$

$$r_2 = \frac{x}{2 \sin \alpha}$$

$$\angle ABC = \beta$$

$$\angle ACB = \gamma$$

$$x^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$\sqrt{\frac{5^2+4+x}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5^2+4-x}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5^2+x-4}{2}} \cdot \sqrt{\frac{-x+4-5^2}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{5^2+4+x}{2} \cdot \frac{5^2+4-x}{2} \cdot \frac{5^2+x-4}{2} \cdot \frac{-x+4-5^2}{2} = \frac{1}{4} \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$(5^2 - x^2)(x^2 - 1^2) = 5^2 \cdot 4^2 \cdot \sin^2 \alpha$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
9 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

аргумента) что и ~~такое~~ тогда максимум величина

этот максимальный периметр равен $4\sqrt{4} + 3\pi$.

Ответ: $4\sqrt{4} + 3\pi = M$ ~~доказательство~~ $k \in \mathbb{Z}$.

$$d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

периметр
помощью
с радиусом 3.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Надо в первичнр $\Phi(\lambda)$ найти дуги ведущие и текущие отрезки с концами $(a; b) \cup (x_1; y_1)$, $(a; b) \cup (x_2; y_2)$,
 $(a; b) \cup (x_3; y_3)$, $(a; b) \cup (x_4; y_4)$, в сумме они равны по длине отрезкам с концами $(x_4; y_4)$ и $(x_2; y_2) \cup (x_1; y_1) \cup (x_3; y_3)$.

Длина этих отрезков равна $2\sqrt{3^2 - (2\sin\lambda)^2}$.

Суммарно $2\sqrt{3^2 - (2\sin\lambda)^2} + 2\sqrt{3^2 - (2\cos\lambda)^2}$.

Надо найти $\max(2\sqrt{9-4\sin^2\lambda} + 2\sqrt{9-4\cos^2\lambda})$.

$$2\sqrt{9-4\sin^2\lambda} + 2\sqrt{9-4(1-\sin^2\lambda)} = 2\sqrt{9-4\sin^2\lambda} + 2\sqrt{5+4\sin^2\lambda} =$$

$$= \sqrt{4(9-4\sin^2\lambda + 5+4\sin^2\lambda) + 2\sqrt{(9-4\sin^2\lambda)(5+4\sin^2\lambda)}} =$$

$$= 2\sqrt{14 + 2\sqrt{45 + 16\sin^2\lambda - 16\sin^4\lambda}}. \text{ Пусть } \sin^2\lambda = t, \text{ тогда}$$

$$2\sqrt{14 + 2\sqrt{45 + 16t - 16t^2}}, \max(45 + 16t - 16t^2) \text{ достигается}$$

в вершине, координата $\frac{d}{dt}$ вершины $-\frac{16}{2+16} = \frac{1}{2}$ убывает $\boxed{\text{Дз}}$
 значение: $45 + 16 \cdot \frac{1}{2} - 16 \cdot \frac{1}{4} = 49. \quad (\boxed{16t + 45 - 16t^2})$

Надо $\max(2\sqrt{14 + 2\sqrt{45 + 16t - 16t^2}}) = 2\sqrt{14 + 2\sqrt{49}} =$

$$= 2\sqrt{28} = \boxed{4\sqrt{7}}. \quad \sin^2\lambda = \frac{1}{2}, \sin\lambda = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}, \lambda = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Приложение: \sqrt{X} - возрастание при $X > 0$, поэтому
 точка максимума внутренней функции не есть точка где

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 (проверка)

~~Конструкция~~

Заметим, что $x_4 < x_3$ при $\pi/2 < \alpha < 2\pi$ ($x_3 > 2$ при $\pi/2 < \alpha < 2\pi$)
 $x_4 > -2$ при $\pi/2 < \alpha < 2\pi$ ($x_2 > x_1$ при $\pi/2 < \alpha < 2\pi$).
П.к. $x_4 = 2 \cos \alpha$, $|\cos \alpha| \leq 1$, $x_3 = \sqrt{3^2 - 2 \sin^2 \alpha} > 2$.

С дуги ~~(x₁, y₁)~~ с концами (x_1, y_1) и $(-3, 0)$ и
 (x_3, y_3) и $(3, 0)$, они равны по длине и одна из
дуг входит в $\Phi(\alpha)$. Аналогично с дугами
с концами (x_3, y_3) и $(3, 0)$ и (x_4, y_4) и $(3, 0)$, единственное
отличие, что не всегда одна из них полностью входит
в $\Phi(\alpha)$, но если учесть ~~две~~ дуги (x_1, y_1) и $(-3, 0)$, которая
равна (x_3, y_3) и $(3, 0)$, то суммарно (или же получим
одну из этих двух дуг) дуга с концами
 (x_1, y_1) и (x_3, y_3) всегда входит в $\Phi(\alpha)$, значит
получаем, что одна фигура включает дуги,
но длины равные $\pi(3, 0) - \pi(-3, 0)$ м.е.
плюсокруглости при $\pi/2$.

Линия $x=2 \cos \alpha$ и $y=2 \sin \alpha$ пересекаются в точке
с координатами (a, b) .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$\begin{cases} 5x \geq 2 \cos 2 \\ y \geq 2 \sin 2 \\ x \leq 2 \cos 2 \\ y \leq 2 \sin 2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 \leq 9$$

$x = 2 \cos 2$ — прямая, параллельная оси OY

$y = 2 \sin 2$ — прямая, параллельная оси OX .

$x^2 + y^2 \leq 9$ — круг с радиусом $\sqrt{9} = 3$.

угол $x = 2 \cos 2$ пересекает окружность с

радиусом 3 в четырех точках в начале координат (она содержит эти точки) круг $x^2 + y^2 \leq 9$ в четырех

(x_2, y_1) , (x_1, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) — соответственно их координаты.

Заметим, что x_1 симметричен x_3 относительно оси

OY т.е. $x_1 = -x_3$, а $x_2 = x_4$, также заметим, что

(x_2, y_2) и (x_4, y_4) симметричны относительно $OX \Rightarrow y_2 = -y_4$.

Получим $x_1 < x_3$, $y_2 < y_4$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



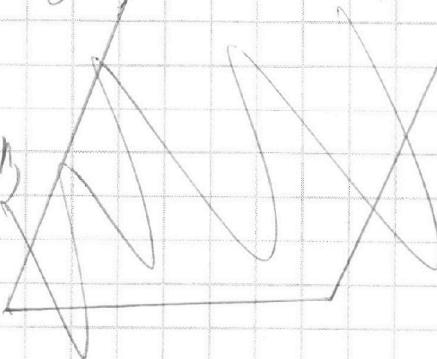
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N^o 7.

Пусть сторона верхнего многоугольника равна b , нижнего — a , тогда по свойству отрезков касающихся боковых сторон усеченного пирамиды равна $a+b$. Пусть катеты



$\frac{2\pi}{n}$. основания и находящийся в центре многоугольника, имеем величину $\frac{2\pi}{n}$. Заметим, что точка касания шара с боковой грани делит её пересечением с её диагональю, т.к. угол из этой точки на сторону верхнего многоугольника равен $\frac{2\pi}{n}$, на сторону нижнего — тоже $\frac{2\pi}{n} \Rightarrow$ они вертикальные.

то есть отрезки касательных в их вершинах и на боковой грани к шару C равны, а сторона образца, параллельная s , равна n сторонам (с образцом стороны и вертикальной в точках касания шара с основанием и боковой грани соответствующими).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

