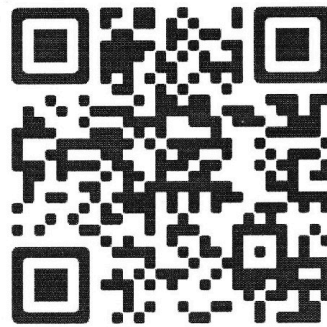




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. (прод.)

Замечание: 11 обязательно должно содержаться
в А, В или С, т.к. 11 — простое число.

Ответ: (5555; 101; 55).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 (прод.)

$C = 11$, т.к. $B \neq 11$, т.к. $101 \neq 11$, кроме того, $a \neq 11$, т.к. $a < 10$, т.к. a — цифра, причём 11 должно входить куда-то ещё кроме B , т.к. $A \cdot B \cdot C$ — квадрат nat. числа.

Т.к. одна из цифр $C = 5 \Rightarrow$ а вторая тоже, т.к. в двузначных числах, делящихся на 11, обе цифры одинаковы (11, 22, ..., 99).

Значит $C = 55$.

Т.е. $1111 \cdot a \cdot 101 \cdot 55 = x^2$.

5 входит сюда в четной степени $\Rightarrow a \neq 5 \Rightarrow$

$a \neq 5$, т.к. a — цифра, делящаяся на 5.

5. x — некое натуральное число

Ответ обозначения: a — 4 цифра в A ,

b — цифра в разряде сотен в B

c — цифра в разряде десятков в B

d — цифра в разряде единиц в B

e — цифра в разряде десятков в C

f — цифра в разряде единиц в C .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1.

$$A = a \cdot 10^3 + \underline{4} a \cdot 10^2 + a \cdot 10 + a = a + 1111$$

$$B = b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$$

$$C = e \cdot 10 + f$$

$$1111a \cdot (100b + 10c + d) \cdot (10e + f) = x^2$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

т.к. $A \cdot B \cdot C$ — квадрат кат. числа $\Rightarrow 101$ входит в $A \cdot B \cdot C$ в четной степени, причём C — двузначное, туда $\nexists 101$ не входит, в A входит только один раз ($11a \neq 101, a \neq 101$), т.к. $a \in (0; 9]$, значит $B \div 101 \Rightarrow C=0$, т.к. $\forall$ 3-значное число, делящееся на 101 ($101, 202, \dots, 909$) имеет 0 в разряде десятков. Т.к. хотя бы одна из цифр B равна 1 $\Rightarrow B=101$, т.к. ни ~~одного~~ одно другое трёхзначное число, делящееся на 101 , не имеет "1" в качестве цифры.
Замечание: 101 — простое число, поэтому оно не может "по частям" (по некоторым делителям) входить в несколько чисел, а должно целиком содержаться в A, B или C .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

т.к. $x+y+1 > 0$ ($x > 0, y > 0$) $\Rightarrow$ можно разделить на $(x+y+1)$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy - 3y + 3x - 9$$

$$3x - 3y - 9 = 0$$

$$x - y - 3 = 0$$

$$x = y + 3$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y =$$

$$= y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = 27.$$

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3 (прод.) б)

$$f(x) = \arccos x : D(f) = [-1; 1], E(f) = [0; \pi] \Rightarrow$$

чтобы пер-во не выполнялось, надо, чтобы

$$\arccos \frac{x}{4} = \arccos \frac{y}{9} = \pi \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{9} = -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = -4, y = -9$, т.е. зад пара как не подх.

Кроме того, $|\frac{x}{4}| \leq 1, |\frac{y}{9}| \leq 1 \Rightarrow x \in [-4; 4],$

$y \in [-9; 9].$

Кроме того, из условия в А следует, что либо x , либо y нечётный, но одновременно нечётными они быть не могут. y может принимать ровно 10 значений,

из них 5 — чётные, 5 — нечётные. x принимает ровно 9 значений. Для каждого чётного x надо выбрать нечётный y (ровно 5 вариантов), для каждого нечётного x надо выбрать чётный y (ровно 4 варианта), значит всего вариантов $5 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 45$

ответ: а) x, y , которые удовлетворяют этой совокупности:

$$\begin{cases} x+y=2k+1, k \in \mathbb{Z} \\ 3x-y=2n+1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=2k+1, k \in \mathbb{Z} \\ 3x-y=2n+1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) 45

т.к. пара $(-4; -9)$ нам не подх



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3 (прод.)

$$\begin{cases} x+y=2k+1, k \in \mathbb{Z} \\ x-y+2x=2n+1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=2k+1, k \in \mathbb{Z} \\ 3x-y=2n+1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Для того, чтобы уравнение было верным, должно выполняться одно из этих 2 условий.

$$\text{*) } \arccos \frac{x}{y} + \arccos \frac{y}{x} < 2\pi$$

$$\text{*) } f(x) = \arccos x: E(f) = [0; \pi], \text{ значит}$$

чтобы данное кер-во не выполнялось, $\arccos \frac{x}{y} = \arccos \frac{y}{x} = \pi$.

т.е. $\frac{x}{y} = \frac{y}{x} = -1, x = -y, y = -x$, все остальные пары ~~или~~ (x, y) кроме $(-y, -x)$ нам подходят.

Ответ: а) x, y , которые удовлетворяют этой системе совокупности:

$$\begin{cases} x+y=2k+1, k \in \mathbb{Z} \\ 3x-y=2n+1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) те же, что и в пункте а) кроме $(-y, -x)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3. а)

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{2} (x-y) \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} (x+y) \right) \sin \pi x = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} (x+y) \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) \right) \cos \pi x$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} (x+y) \right) \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} (x-y) \right) \sin \pi x - \cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) \right) \cos \pi x \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} (x+y) \right) \left(\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) - \pi x \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) + \pi x \right) \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) - \pi x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) + \pi x \right) \right) \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} (x+y) \right) \left(-\cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) + \pi x \right) \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} (x+y) \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) + \pi x \right) = 0$$

$$\left[\cos \left(\frac{\pi}{2} (x+y) \right) = 0 \right.$$

$$\left. \cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) + \pi x \right) = 0 \right]$$

$$\left[\frac{\pi}{2} (x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. \frac{\pi}{2} (x-y) + \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

НЧ.

пусть кол-во одинадзатиклассников $= n$,
тогда вероятность Тети попасть на концерт в
начале месяца $\frac{4}{n}$, Васи $\frac{3}{n-1}$, вместе $\frac{12}{n(n-1)}$.

Пусть в конце месяца выданы ещё x билетов,
тогда вероятность Тети попасть на концерт $\frac{4+x}{n}$,
Васи $\frac{3+x}{n-1}$, вместе $\frac{(4+x)(3+x)}{n(n-1)}$.

$$\frac{12}{n(n-1)} \cdot \frac{7}{2} = \frac{(4+x)(3+x)}{n(n-1)}$$

$$42 = (4+x)(3+x)$$

$$42 = 12 + 7x + x^2$$

$$x^2 + 7x - 30 = 0$$

Корни: $x=3$, $x=-10$, но $x>0$, и.к. Это отрицательная
величина (кол-во новых билетов)

Ит.е. $x=3$

Ответ: 3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5 (прод.)

$$\frac{26^2 + 400 - 1040 \cos 2}{4 \sin^2 2} - \frac{26^2 + 400 - 1040 \cos 2}{4 \sin^2 2 \cos 2} \left(1 - \frac{16 \sin^2 2}{x^2} \right) \cos 2 - \frac{16 \sin^2 2}{x^2} \sin 2 =$$
$$= 16.26$$

$$\frac{26^2 + 400 - 1040 \cos 2}{4 \sin^2 2} - \frac{1046 - 1040 \cos 2}{4 \sin^2 2 \cos 2} \left(1 - \frac{16 \sin^2 2}{x^2} \right) \cos 2 - \sqrt{1 - \cos^2 2} \sin 2 =$$
$$= 16.26$$

$$\frac{1046 - 1040 \cos 2}{4 \sin^2 2} - \frac{1046 - 1040 \cos 2}{4 \sin^2 2 \cos 2} \left(1 - \frac{16 \sin^2 2}{x^2} \right) \cos 2 - \sqrt{1 - 2 \sin^2 2} \sin 2 = 16.26$$

$$\frac{1046 - 1040 \cos 2}{4 \sin^2 2} - \frac{1046 - 1040 \cos 2}{4 \sin^2 2 \cos 2} \left(1 - \frac{16 \sin^2 2}{x^2} \right) \cos 2 - \sqrt{2 - \frac{32 \sin^2 2}{x^2}} \sin 2 = 16.26$$

$$\frac{269 - 260 \cos 2}{\sin^2 2} - \frac{269 - 260 \cos 2}{\sin^2 2 \cos 2} \left(1 - \frac{16 \sin^2 2}{\sin^2 2 + 16 - 416 \cos 2} \right) \cos 2 - \sqrt{\frac{2 - 32 \sin^2 2}{\sin^2 2 + 16 - 416 \cos 2}} \sin 2 =$$
$$= 16.26$$

найдя зная угол 2 и посчитав его синус,
мы сможем найти площадь через $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS (Wing.)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{4 \sin^2 \alpha} - \frac{2x^2}{4 \sin \alpha \sin 2\alpha} \cos(2\beta + 2) = AP \cdot AB \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \beta} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 = 5,2^2 + 4^2 - 8 \cdot 5,2 \cos 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{4 \sin^2 \alpha} - \frac{x^2}{4 \sin^2 \alpha \cos \alpha} (\cos 2\beta \cos 2 - \sin 2\beta \sin 2) = \frac{16 \cdot 26}{25} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin 2\beta} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 = 5,2^2 + 16 - 41,6 \cos 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{4 \sin^2 \alpha} - \frac{x^2}{4 \sin^2 \alpha \cos \alpha} ((1 - 2 \sin^2 \beta) \cos 2 - 2 \sin \beta \cos \beta \sin 2) = \frac{16 \cdot 26}{25} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \beta = \frac{4 \sin \alpha}{x} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 = 5,2^2 + 16 - 41,6 \cos 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} & \frac{5,2^2 + 16 - 41,6 \cos 2}{4 \sin^2 \alpha} - \frac{5,2^2 + 16 - 41,6 \cos 2}{4 \sin^2 \alpha \cos \alpha} \left(\left(1 - \frac{16 \sin^2 \alpha}{x^2} \right) \cos 2 \sin 2 \right) = \\ & = \frac{16 \cdot 26}{25} \cdot 25 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5 (прод.)

$$(9^2 - 5^2 - 4^2 + 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 2) (5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 2 - 1^2) =$$
$$= 5^2 \cdot 4^2 \cdot 4 (1 - \cos^2 2) \quad | : 5^4$$

$$(46^2 - 26^2 - 20^2 + 10 \cdot 26 \cdot 4 \cdot \cos 2) (26^2 + 20^2 - 10 \cdot 26 \cdot 4 \cdot \cos 2 - 6^2) =$$
$$= 26^2 \cdot 20^2 \cdot 4 (1 - \cos^2 2) \quad | : 4$$

$$(23^2 - 13^2 - 10^2 + 10 \cdot 26 \cdot \cos 2) (13^2 + 10^2 - 10 \cdot 26 \cdot \cos 2 - 3^2) =$$
$$= 13^2 \cdot 10^2 \cdot 4 (1 - \cos^2 2)$$

$$(529 - 169 - 100 + 260 \cos 2) (169 + 100 - 260 \cos 2 - 9) =$$
$$= 169 \cdot 400 (1 - \cos^2 2)$$

$$(260 + 260 \cos 2) (260 - 260 \cos 2) = 260^2 (1 - \cos 2) (1 + \cos 2)$$

N5 (прод.)

$$X^2 = 2r_1^2 - 2r_1^2 \cos 2\alpha$$

$$X^2 = 2 \frac{r_1^2}{25 \sin^2 2} - 2 \frac{X^2}{2^2 5 \sin^2 2} \cos 2\alpha$$

$$2 \sin^2 2 = 1 - \cos 2\alpha$$

$$AO^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(2\beta + 2), \text{ т.к. } \beta < \alpha, \text{ т.к. } AB > AC$$

$$AO^2 = r_2^2 + AT^2 = r_2^2 + AP \cdot AB$$

$$r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(2\beta + 2) = r_2^2 + AP \cdot AB$$

$$(y^2 - x^2)(x^2 - y^2) = y^2 \cdot y^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

аргумент, что и ~~каждой~~ точка максимума всей функции.

Значит максимальный периметр равен $4\sqrt{4} + 3\pi$.

Ответ: $4\sqrt{4} + 3\pi = M; I = \frac{\pi k}{4} \mid k \in \mathbb{Z}$.

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z}.$$

↑
периметр
полукруга
с радиусом 3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда в периметр $P(L)$ нам надо еще ввести и ~~еще~~ отрезки с концами (a,b) и (x_1, y_1) , (a,b) и (x_3, y_3) , (a,b) и (x_4, y_4) , в сумме они равны по длине отрезкам с концами (x_4, y_4) и (x_2, y_2) + (x_1, y_1) и (x_3, y_3) .
Длина этих отрезков равна $2\sqrt{3^2 - (2\cos 2)^2}$.

суммарно $2\sqrt{3^2 - (2\sin 2)^2} + 2\sqrt{3^2 - (2\cos 2)^2}$.

Нужно найти $\max(2\sqrt{9 - 4\sin^2 2} + 2\sqrt{9 - 4\cos^2 2})$.

$$2\sqrt{9 - 4\sin^2 2} + 2\sqrt{9 - 4(1 - \sin^2 2)} = 2\sqrt{9 - 4\sin^2 2} + 2\sqrt{5 + 4\sin^2 2} =$$

$$= \sqrt{4(9 - 4\sin^2 2 + 5 + 4\sin^2 2 + 2\sqrt{(9 - 4\sin^2 2)(5 + 4\sin^2 2)})} =$$

$$= 2\sqrt{14 + 2\sqrt{45 + 16\sin^2 2 - 16\sin^4 2}}. \text{ Пусть } \sin^2 2 = t, \text{ тогда:}$$

$$2\sqrt{14 + 2\sqrt{45 + 16t - 16t^2}}, \max(45 + 16t - 16t^2) \text{ достижим}$$

$$\text{в вершине, координата } \frac{1}{2} \text{ вершины: } -\frac{16}{2 \cdot 16} = -\frac{1}{2}, \text{ тогда } t \in [0, 1]$$

$$\text{значения: } 45 + 16 \cdot \frac{1}{2} - 16 \cdot \frac{1}{4} = 49.$$

$$\text{Тогда } \max(2\sqrt{14 + 2\sqrt{45 + 16t - 16t^2}}) = 2\sqrt{14 + 2\sqrt{49}} =$$

$$= 2\sqrt{28} = 4\sqrt{7}. \quad \sin^2 2 = \frac{1}{2}, \sin 2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Примечание: $\sqrt{x}$ — возрастающая функция, поэтому точка максимума внутренней функции имеет место же



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6 (прод.)

~~Заметим, что~~
Заметим, что $x_4 < x_3$ при $\forall \angle (x_3 > 2 \text{ при } \angle x_4 \leq 2 \text{ при } \angle)$ при этом $x_4 \geq -2$ при $\angle \Rightarrow x_2 > x_1$ при $\angle$.
(П.к. $x_4 = 2 \cos \angle, |\cos \angle| \leq 1, x_3 = \sqrt{3 - 2 \sin^2 \angle} > 2$.
с дугой ~~(x_1, y_1)~~ с концами (x_1, y_1) и $(-3, 0)$ и (x_3, y_3) и $(3, 0)$, они равны по длине и одна из дуг входит в $\Phi(\angle)$. Аналогично с дугой с концами (x_3, y_3) и $(3, 0)$ и (x_1, y_1) и $(3, 0)$, единственное отличие, что не всегда одна из них полностью входит в $\Phi(\angle)$, но если учесть дугу ~~с концами~~ (x_1, y_1) и $(-3, 0)$, которая равна (x_3, y_3) и $(3, 0)$, то суммарно с ней мы получим одну из этих двух дуг. Дуга с концами (x_1, y_1) и (x_3, y_3) всегда входит в $\Phi(\angle)$, значит получаем, что наша фигура отсекает дугу, по длине равные дуге $(-3, 0)$ и $(3, 0)$, т.е. по окружности при $\angle$.
Пусть $x = 2 \cos \angle$ и $y = 2 \sin \angle$ пересекаются в точке с координатами (a, b) .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6,

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 2 \cos 2 \\ y \geq 2 \sin 2 \\ x \leq 2 \cos 2 \\ y \leq 2 \sin 2 \end{cases} \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$x = 2 \cos 2$ — прямая, параллельная оси OY

$y = 2 \sin 2$ — прямая, параллельная оси OX .

$x^2 + y^2 \leq 9$ — круг с радиусом $\sqrt{9} = 3$.

Пусть $x = 2 \cos 2$ пересекает окружность с радиусом 3 и центром в начале координат (она является границей круга $x^2 + y^2 \leq 9$ в точках

x_2 и x_4 , а $y = 2 \sin 2$ в x_1 и x_3 ; x_1, x_2, x_3, x_4 — абсциссы этих точек, а y_1, y_2, y_3, y_4 — соответственно их ординаты.

Заметим, что x_1 симметрично x_3 относительно оси OY , т.е. $x_1 = -x_3$, а $x_2 = x_4$, также заметим, что

(x_2, y_2) и (x_4, y_4) симметричны относительно $OX \Rightarrow y_2 = -y_4$.

Пусть $x_1 < x_3$, $y_2 < y_4$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

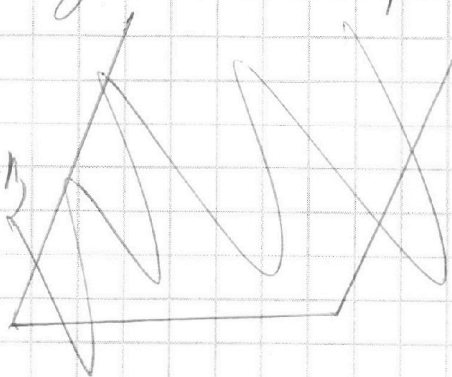
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.

Пусть сторона верхнего многоугольника равна b ,
нижнего — a , тогда по свойству отрезков касатель-
ных боковой сторона усеченной пирамиды равна
 $\frac{a+b}{2}$. Пусть кол-во



сторон в основании — n ,
тогда угол, опираю-
щийся на сторону

основания и находящийся в центре многоугольника,
имеет величину $\frac{2\pi}{n}$. Заметим, что точка
касания шара ω боковой грани является пересече-
нием ее диагоналей, т.к. угол из этой точки
на сторону верхнего многоугольника равен $\frac{\pi}{n}$, на
сторону нижнего — тоже $\frac{\pi}{n} \Rightarrow$ они вертикальные.

т.к. отрезки касательные в основании и на боковой
грани к шару ω равны, а сторона общая, получаем
 Δ , равные по 3 сторонам (с общей стороной и вертикаль-
ными в точках касания шара ω основанием и боковой грани соответственно).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

