



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

+ 1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

+ 2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

+ б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

+ 4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

+ 5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

+ 6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7

A - из 4-х одинаковых цифр $\Rightarrow A = 7777 \cdot K$, $K \in [1; 9]$

Второй $7777 = 707 \cdot 77$ ($77, 707$ - простые)

$$A \cdot B \cdot C = h^2 \Rightarrow \left(\text{m.k. } A : 707 \Rightarrow h^2 : 707^2 \right) \Rightarrow \\ \left(A : 77 \Rightarrow h^2 : 77^2 \right)$$

$\begin{cases} B : 707 \\ C : 707 \end{cases}$ ($C < 700 \Rightarrow B : 707 \Rightarrow B$ имеет вид $\bar{x}0\bar{x}$, где $x \in [1; 9]$)

$$\text{М.д.} \Rightarrow X=6 \Rightarrow B=606$$

$C : 77$ (A, B не имеют общих делителей кроме 77 , а A не имеет делителей ни 77^2 м.к. $K < 703$, но $h^2 : 77^2 \Rightarrow A B C : 77^2$)

C имеет вид $\bar{x}\bar{x}$, где $x \in [1; 9]$, но \bar{x} содержит

$$3 \Rightarrow C=33$$

$$A B C = 7777 \cdot K \cdot 606 \cdot 33 = 707^2 \cdot 77^2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot K = h^2$$

$$18K = h^2 \Rightarrow 2K = h^2$$

$$K \in [1; 9] \Rightarrow 2K \in [2; 18]$$

$$2K = \begin{cases} 4 \Rightarrow K=2 \\ 9 \Rightarrow K-\text{нечисло} \Rightarrow \emptyset \\ 16 \Rightarrow K=8 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} A = 2222 \\ B = 606 \\ C = 33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 8888 \\ B = 606 \\ C = 33 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
7 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{(y+2)+(x-2)+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$(x-2)(y+2) = xy \quad (\frac{x>0}{y>0} \Rightarrow x+y+5 \neq 0)$$

$$xy - 2y + 2x - 4 = xy$$

$$x = y+2$$

$$y = x-2$$

$$M = x^3 - (x-2)^3 - 6(x-2)x = x^3 - x^3 + 6x^2 - 72x + 8 - 6x^2 + 72x = 8$$

Пример: $x=4$ $y=2 \rightarrow x_7 = x-2 = 2$, $y_7 = y+2 = 4$

$$K_7 = k_2$$

$$M = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
7 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N³

$$d) x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{aligned} \sin \pi x &= 0 \\ \sin \pi y &= 0 \\ \cos \pi x &= \pm 1 \\ \cos \pi y &= \pm 1 \end{aligned}$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin \pi x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \pi x = 0 \\ \cos \pi x - \cos \pi y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x-y) \vdots 2$$

$$\arcsin \frac{x}{6} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\arcsin \frac{y}{2} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{6} \neq 0 \\ \frac{y}{2} \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{6} \in [-1; 1] \\ \frac{y}{2} \in [-1; 1] \end{cases} \quad x \in [-6; 6]$$

$$1) y = -2:$$

$$x = \{-6; -4 \dots +4; 6\} \quad - 7 \text{ пар}$$

$$2) y = -1$$

$$x = \{-5; -3; \dots +3; +5\} \quad - 6 \text{ пар}$$

$$3) y = 0$$

$$\text{аналогично п. 1} \quad - 7 \text{ пар}$$

$$4) y = 1$$

$$\text{аналогично п. 2} \quad - 6 \text{ пар}$$

$$5) y = 2$$

$$\text{аналогично п. 1 кроме } x=6 \quad - 6 \text{ пар}$$

$$\oplus \rightarrow 32 \text{ пары}$$

Ответ: 32

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№

Поступали вероятность в начале и в конце:

$K = 2C_n^4$ - всего исходов

n - всего учеников

$S_1 = C_n^4$ - всего исходов

$S_2 = C_{n-2}^2$ - подходящие исходы

$$P_1 = \frac{S_2}{S_1}$$

K - первое как-то бывает

$S_3 = C_n^K$ - всего исходов

$S_4 = C_{n-2}^{K-2}$ - подходящие исходы

$$P_2 = \frac{S_4}{S_3}$$

$$6P_1 = P_2 \Rightarrow 6 \cdot \frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!}}{\frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-K)! \cdot (K-2)!}}{\frac{n!}{(n-K)! \cdot K!}}$$

$$6 \cdot 3 \cdot 4 = K \cdot (K-7)$$

$$\text{т.ч. } K^2 - K - 72 = 0$$

$$(K-9)(K+8) = 0$$

$$K=9 \Rightarrow K=9$$

$$K=-8 \quad \text{X}$$

Ответ: 9



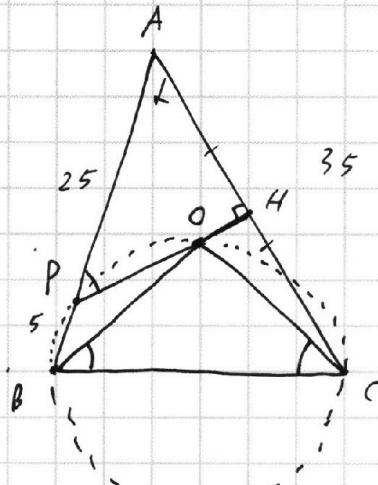
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N 5



O-члены ~~стенки~~ $(ABC) \Rightarrow$

Пусть: $\angle BAC = \alpha$

$$\angle BOC = 2 \angle BAC = 2\alpha$$

$\angle APO = \angle BCO$ (BPOC на одной окружности)

$$\angle OCB = \angle OBC \quad (OB = OC)$$

$$\angle OCH = 90^\circ - \frac{\angle BOC}{2} = 90^\circ - \frac{2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle APO = \angle OCB = 90^\circ - \alpha$$

Пусть $OH \perp CA = H$

$$\angle AHP = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ \Rightarrow OH \perp AC$$

OH - сер. перп. к AC (и.к. $\angle APO = \angle OCB$ и OH -диаметр)

$$AC = 35 \Rightarrow AH = \frac{35}{2}$$

$$AP = 25 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AH}{AP} = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{(25+5)35}{2} \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = \boxed{\frac{705\sqrt{51}}{2}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{705\sqrt{51}}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
7 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

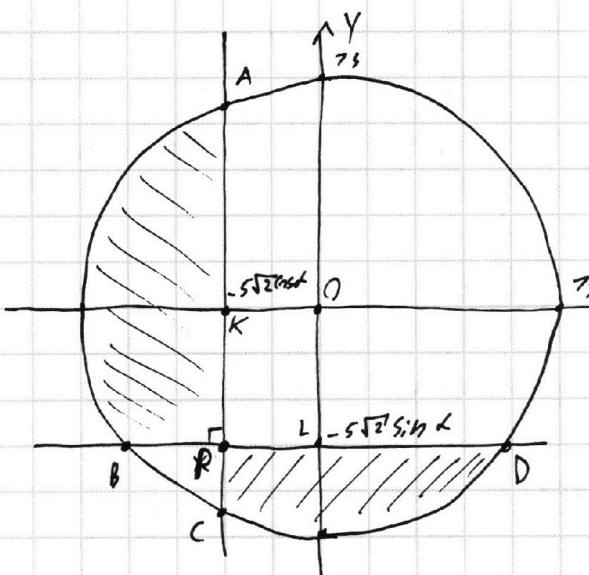
N6

$$(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0$$

$$\begin{cases} x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x = -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y = -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$$

$x^2 + y^2 \leq 769 \Rightarrow (x, y)$ лежат внутри окружности с

$$R = 73 \text{ и } O(0,0)$$



$$OP = \sqrt{(-5\sqrt{2} \cos \alpha)^2 + (-5\sqrt{2} \sin \alpha)^2} = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 5\sqrt{2}$$

$\hat{A} = \hat{AB} + \hat{BD}$

$$M = \hat{AB} + \hat{CD} + \hat{AC} + \hat{BD}$$

$$\angle BPA = \hat{AB} + \hat{CD} \quad (\text{в раздраж.})$$

$$\hat{AB} + \hat{CD} = \frac{\ell_{окр}}{2} = \pi \cdot 73 = \text{const} \quad (\text{не зависит от } \alpha)$$

$$\hat{AC} + \hat{BD} = 2(\hat{AK} + \hat{BL}) = 2\left(\sqrt{73^2 - (5\sqrt{2} \cos \alpha)^2} + \sqrt{73^2 - (5\sqrt{2} \sin \alpha)^2}\right) - \max$$

$$\sqrt{73^2 - (5\sqrt{2} \cos \alpha)^2} + \sqrt{73^2 - (5\sqrt{2} \sin \alpha)^2} - \max \Rightarrow \left(\sqrt{73^2 - 50 \cos^2 \alpha} + \sqrt{73^2 - 50 \sin^2 \alpha}\right)^2 - \max$$

$$2 \cdot 73^2 - 50 \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2\sqrt{(73^2 - 50 \cos^2 \alpha)(73^2 - 50 \sin^2 \alpha)} - \max$$

$$\sqrt{(73^2 - 50 \cos^2 \alpha)(73^2 - 50 \sin^2 \alpha)} - \max$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N6 (продолжение)

$$(73^2 - 50 \cos^2 \alpha) (73^2 - 50 \sin^2 \alpha) - \max$$

$$73^4 - 73^2 \cdot 50 \underbrace{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}_{=1} + 2500 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha - \max$$

$$\cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \max$$

$$\sin^2 2\alpha - \max \\ |\sin 2\alpha| = 7 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = 7 \\ \sin 2\alpha = -7 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow |\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |\sin \alpha| = \left| \frac{7}{\sqrt{2}} \right|$$

$$A(a+b) = 2 \left(\sqrt{73^2 - 25^2} + \sqrt{73^2 - 25^2} \right) = 4 \cdot \sqrt{744} = 4 \cdot 72 = 48$$

$$M = 48 + 73\pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

Ответ: $M = 48 + 73\pi$

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



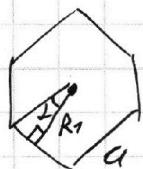
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
7 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7

Пусть основание - n-угольник



Обозначим расстояние от центра до
стороны a и R_1 - к вершине
 R_2 - к центру

a - сторона вершины

b - сторона центра

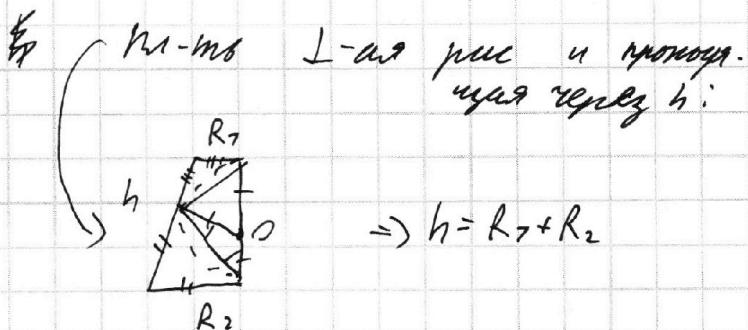
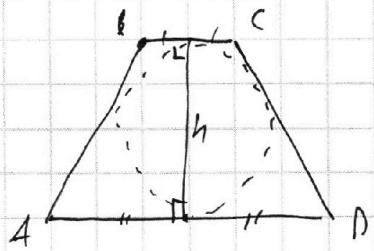
L - угол при вершине

$$a = 2R_1 \tan \frac{L}{2}$$

$$b = 2R_2 \tan \frac{L}{2}$$

$$S_7 = \frac{R_1 \cdot a \cdot n}{2} = R_1^2 \tan \frac{L}{2} \cdot n$$

Боковая сторона - неправильная



$$S_2 = h \cdot \frac{R_1 + R_2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(R_1 + R_2)^2}{2} \cdot h$$

$$AB + CD = b + a \Rightarrow 2CD = a + b$$

$$2\sqrt{h^2 + (R_2 - R_1)^2 + \frac{L^2}{4}} = 2(R_1 + R_2) + L$$

$$(R_1 + R_2)^2 + (R_2 - R_1)^2 + \frac{L^2}{4} = (R_1 + R_2)^2 + \frac{L^2}{4} \Rightarrow L \cancel{\neq} 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7

$$+ \cancel{f} \lambda > 7 \Rightarrow \lambda > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cancel{\#} \quad \frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{4} \Rightarrow h < 4 \Rightarrow h = 3$$

$$+ \cancel{f} \lambda = + \cancel{f} 60 = \sqrt{3}$$

$$3(R_2 - R_7)^2 = 2(R_2 + R_7)^2$$

$$\frac{R_2 - R_7}{R_2 + R_7} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{2R_7}{R_2 + R_7} = 7 - \frac{R_2 - R_7}{R_2 + R_7} = 7 - \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{S_7}{S_2} = \frac{R_7^2 \cdot + \cancel{f} \lambda \cdot h}{(R_7 + R_2)^2 \cdot h} = \left(\frac{2R_7}{R_7 + R_2} \right)^2 \cdot \frac{+ \cancel{f} \lambda}{2} = \left(7 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \left(7 + \frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{\sqrt{3}} - \sqrt{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6}}$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

1

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N3

$$d) \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$6 \cdot \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{n}{k-2}}{\binom{n}{k}}$$

$$6 \cdot \frac{4! \cdot (n-4)!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{k! \cdot (n-k)!}{(k-2)! \cdot (n-k+2)!}$$

$$6 \cdot \frac{3 \cdot 4}{(n-2)(n-3)} = \frac{k(k-1)}{(n-k+2)(n-k+1)}$$

$$72(n-k+2)(n-k+1) = k(k-1)(n-2)(n-3)$$

$$K > 4$$

$$K < 9 \quad (8 \cdot 9 = 72, \quad (n-k+2)(n-k+1) \quad (n-2)(n-3) < (n-2)(n-3)) \\ \Rightarrow K = 5$$

$$72(n-3)(n-4) = 20(n-3)(n-2)$$

$$72(n-4) = 20(n-2)$$

$$13n = 62 \quad n - \text{нечисло} \Rightarrow \text{∅}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{5}3 \\ \times \cancel{3}3 \\ \hline \cancel{9}9 \end{array}$$

7209

$$2) \quad K=6$$

$$72(n-4)(n-5) = 30(n-3)(n-2)$$

$$72(n^2 - 9n + 20) = 5(n^2 - 5n + 6)$$

$$7n^2 - 83n + 270 = 0$$

$$n \neq 28 \quad D = 83^2 - 4 \cdot 7 \cdot 270$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 27 \\ \hline 20 \\ 56 \\ \hline 7280 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 664 \\ \times 24 \\ \hline 6889 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$(x+6) \geq -\sqrt{y}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$x \text{ не может быть } \frac{x}{6} \leq 1$$

$$x \in [-6; 6]$$

$$\frac{y}{2} \leq 1$$

$$y \in [-2; 2]$$

$$(x-y) : 2$$

$$y = -2$$

$$x = -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6$$

$$y = -7$$

$$x = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$y = 0$$

$$-11 -$$

$$y = 7$$

$$-11 -$$

$$y = 2$$

$$x = -6; -4; -2; 0; 2; 4$$

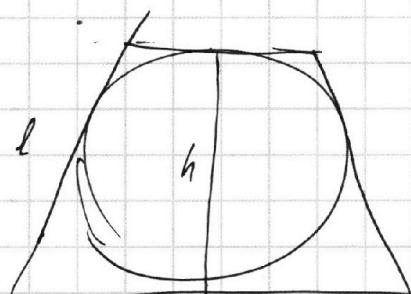
7

6

6

6

$$74 + 14 = 32$$



$$R_1 + R_2 = \ell$$
~~$$\frac{a}{2} + \frac{\ell}{2} = R$$~~

$$R_1 + R_2 = h$$

$$\frac{a}{2} + \frac{\ell}{2} = \ell \sqrt{h^2 + \left(\frac{\ell-a}{2}\right)^2}$$

$$R_1 + R_2 = h$$

$$\frac{a^2}{4} + \ell^2 + 2a\ell = 4h^2 + (\ell-a)^2$$

$$4a\ell = 4h^2$$

$$a^2 + \ell^2 + 2a\ell = 4h^2$$

$$\frac{a^2}{4} + \frac{\ell^2}{4} + \frac{2a\ell}{2} = \frac{4h^2}{4}$$

$$\frac{\frac{a \cdot R_2 \cdot h}{2}}{\frac{4(R_1 + R_2)}{4} \cdot h \cdot h} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)h} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)h} = \frac{R_2^2}{h^2}$$

I-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
7 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

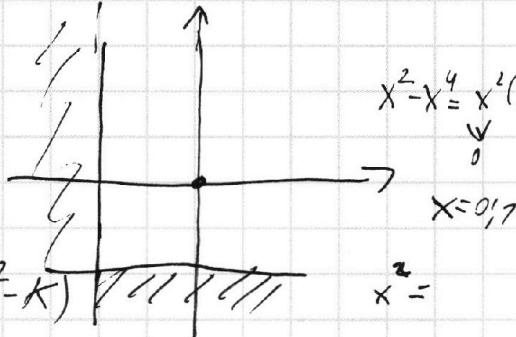
N4

$$6 \frac{C_h^2}{C_h^K} \Leftrightarrow = \frac{C_h^{K-2}}{C_h^K}$$

$$x < -5\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$xy + 5\sqrt{2} y(\cos \alpha + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \geq 0$$

$$+ 25 \sin 2\alpha \leq 0$$



$$x^2 - x^4 = x^2(x^2 - 1) \leq 0$$

$$x = 0, 1$$

$$6 \frac{4! \cdot (h-4)!}{2! \cdot (h-2)!} = \frac{K! \cdot (h-K)!}{(K-2)! \cdot (h-K+2)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{72}{(h-3)(h-2)} = \frac{K \cdot (K-1)}{(h-K+1)(h-K+2)}$$

$$72(h-K+1)(h-K+2) = (h-2)(h-3) \cdot (K^2 - K)$$

$$72 \cdot (h^2 + K^2 + 2 - 2K) = (h^2 - 5h + 6)(K^2 - K)$$

$$\sqrt{h^2 - 2h + \sqrt{9}} \vee \sqrt{h^2 + 2h + \sqrt{3}} \vee 4 \quad f + \sqrt{75} \vee 76$$

$$\frac{f \cdot g}{(h-2)(h-3)} = \frac{K \cdot (K-1)}{(h-K+1)(h-K+2)}$$

$$K < 9$$

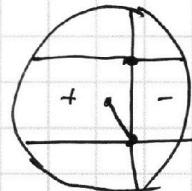
$$K > 4$$

$$K = 5$$

$$\frac{72}{(h-2)(h-3)} = \frac{20}{(h-3)(h-4)}$$

$$72(h-4) = 20(h-2)$$

$$52h = -40 + 20h = 32h \quad \textcircled{D}$$



$$2 \left(\sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{R^2 + x^2 - 7} \right)$$

$$25 - 7, f = -83$$

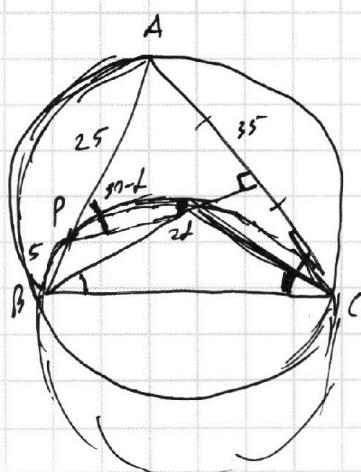
$$2R^2 - 7 + 2\sqrt{R^4 - x^4 + x^2 - R^2}$$

$$K = 6 :$$

$$72(h-4)(h-5) = 30(h-2)(h-3)$$

$$72(h^2 - 9h + 20) = 30(h^2 - 5h + 6)$$

$$42h^2 - 132h + 270 = 0$$



$$\frac{25 \cdot 30}{75} = \frac{750}{7}$$

$$\cos \alpha = \frac{35}{50} = 0,7$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - 0,7^2} = \sqrt{0,57}$$

$$\frac{30 \cdot 35}{2} \sqrt{0,57} = \frac{3 \cdot 35 \sqrt{57}}{2} = \boxed{\frac{705\sqrt{57}}{2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1777·K₁

N3

606

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x =$$

33

$$= (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$7777 = 77 \cdot 707$$

K=8

$$8 \cdot 27 = 8^2 - 27$$

$$\underline{3 \cdot 6 \cdot K} =$$

$$\frac{9}{72} - \frac{7}{86} = \frac{(h-2)(h-3)}{(h-7)(h-6)}$$

$$35 - 777 = 82$$

$$K_1 = 2n^2$$

$$9(h^2 - 73h + 42) = 7(h^2 - 5h + 6)$$

$$\begin{cases} 2222 \\ 606 \\ 33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8888 \\ 606 \\ 33 \end{cases}$$

$$-2h^2 - 82h + 378$$

$$h^2 - 47h + 767$$

N2

$$47^2 - 167 \cdot 4 =$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} =$$

=

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$1100 + 88 + 7 = 1687$$

$$167 \cdot 4$$

$$xy = (x-2)(y+2) = xy - 2y + 2x - 4$$

$$\frac{2}{3}y = x-2$$

$$x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2) = x^3 - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) -$$

$$-6x^2 + 72x = 8$$

$$\dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

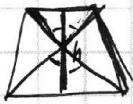
$$4^3 - 2^3 - 6 \cdot 8 = 64 - 8 - 48 = \boxed{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

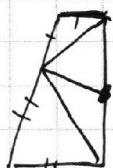


$$a = 2R_1 \cdot \tan \alpha$$



$$S_1 = 4 \cdot R_1 \cdot \frac{2\pi}{2\alpha} = 2R_1^2 \cdot \tan \alpha \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = 2R_2 \cdot \tan \alpha$$



$$R_1 + R_2 = h$$

$$S_2 = h \cdot \frac{R_1 + R_2}{2} = (R_1 + R_2) \cdot (R_1 + R_2) \cdot \tan \alpha$$

$$2 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{R_1 - R_2}{2} = (R_2 - R_1) \cdot \tan \alpha$$

$$2 \sqrt{(R_2 - R_1)(R_1 + R_2) \cdot \tan \alpha} = 2(R_1 + R_2) \cdot \tan \alpha$$

$$R_2 - R_1 = (R_2 + R_1) \cdot \tan \alpha$$

$$\frac{(R_1 + R_2)}{\cos \alpha} = (R_1 + R_2) \cdot \tan \alpha$$

$$\tan \alpha \cdot \cos \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = 1$$

$$\alpha =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4

$$6 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-k}^{k-2}}{C_n^k}$$

$$6 \cdot \frac{4! \cdot (n-4)!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{k! \cdot (n-k)!}{(n-k+2)! \cdot (k-2)!}$$

$$\frac{72}{(n-2)(n-3)} = \frac{k(k-1)}{(n-k+2)(n-k+1)}$$

$$k > 4$$

$$k < 9 (9 \cdot 8 = 72, (n-7)(n-8) < (n-2)(n-3))$$

$$6 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-k}^{k-2}}{C_n^k}$$

$$6 \cdot \frac{(n-4)! \cdot 4!}{(n-4)! \cdot 2!} = \frac{k! \cdot (n-k)!}{(k-2)! \cdot (n-k)!}$$

$$6 \cdot 3 \cdot 4 = k \cdot (k-1)$$

$$72 = k(k-1)$$

$$k = 9$$