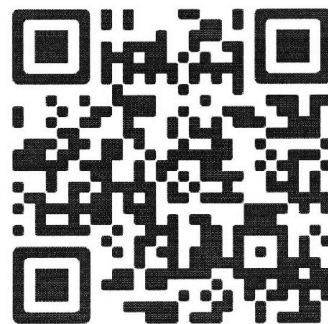




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н 1

1.) A - четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр, ^{с добавлением} A может быть равно ^{только} одному из следующих чисел: 1111; 2222; 3333; 4444; 5555; 6666; 7777; 8888; 9999

любое из этих чисел можно представить в виде:

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 1111} \\ \underline{11} \\ 011 \\ \underline{011} \\ 0 \end{array} \quad A = x \cdot 11 \cdot 101, \text{ где } x - \text{цифра, из которой сост. число } A \text{ (кроме 0)}$$

2.) C - двузначное число одна из цифр которого 1

$\Rightarrow C$ может быть равно одному из следующих 18 чисел: 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 21; 31; 41; 51; 61; 71; 81; 91

3.) $A \cdot B \cdot C = x \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = n^2$, где n - некоторое натуральное число

число 101 - простое

т.к. 101 есть в разложении числа n^2 на множители, то, следовательно $n^2 : 101$
а т.к. n^2 - полный квадрат натурального числа, то, следовательно $n^2 : 101^2$

$\Rightarrow$ либо x , либо B , либо C ~~число~~ кратно 101

т.к. x - цифра, а C - двузначное число, то ни одно из них не может быть кратно 101
 $\Rightarrow B : 101$

т.к. B - трёхзначное число, то, следовательно B можно представить в виде:

$$B = y \cdot 101, \text{ где } y - \text{цифра (кроме 0)}$$

т.к. хотя бы одна цифра в записи B 7, то $\Rightarrow y = 7$
 $\Rightarrow B$ может равняться только числу 707

4.) $\Rightarrow A \cdot B \cdot C = x \cdot 101^2 \cdot 11 \cdot 7 \cdot C = n^2$, 11 - простое число
в разложении числа n^2 есть 11 $\Rightarrow n^2 : 11$, а т.к. n^2 - квадрат натурального числа, то $\Rightarrow n^2 : 11^2$
 $\Rightarrow$ либо x , либо C кратно 11



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

21

4.) Т.к. x -цифра (кроме 0), то $\Rightarrow x$ не может
быть кратно 11 $\Rightarrow C:11$
из п. 2.) следует, что C может равняться только
числу 11

5.) $A \cdot B \cdot C = x \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7 = n^2$, 7 - простое число
В разложении числа n^2 есть $7 \Rightarrow n^2:7$,
А т.к. n^2 - квадрат натурального числа, то,
следовательно $n^2:7^2$
 $\Rightarrow x:7$
А т.к. x -цифра (кроме 0), то $\Rightarrow x=7$

6.) $\Rightarrow A = x \cdot 11 \cdot 101 = 7777$
 $B = y \cdot 101 = 707$
 $C = 11$

Ответ: (7777; 707; 11)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$1.) k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)} \quad | : (x+y+3) \neq 0$$

$$\text{Т.к. } x > 0, y > 0 \Rightarrow x+y+3 > 0$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-4)(y+4)} \quad | \cdot (x-4)(y+4) \cdot xy,$$

$$(x-4)(y+4) = xy$$

$$x \neq y \quad x > 0, y > 0 \Rightarrow y+4 > 0$$

$$xy - 4y + 4x - 16 = xy \quad | : 4 \neq 0$$

$$-y + x - 4 = 0$$

$$x = y + 4$$

$$y > 0 \Rightarrow x \neq y \quad \text{при любых } y$$

$$2.) M = x^3 - y^3 - 12xy = (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y =$$

$$= y^3 + 48y + 12y^2 + 16 - y^3 - 12y^2 - 48y =$$

$$= 16$$

Ответ: 16



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

13

$$a.) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cdot \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = 0$$

$$\cos 2\pi y + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$2 \cos \frac{2\pi y + \pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \frac{2\pi y - \pi x + \pi y}{2} = 0 \quad | : 2 \neq 0$$

$$\cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \cdot \cos \frac{3\pi y - \pi x}{2} = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} = 0 \\ \cos \frac{3\pi y - \pi x}{2} = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} \frac{\pi y + \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad | : \pi \neq 0 \\ \frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad | : \pi \neq 0 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z} \quad | : 2 \neq 0 \\ \frac{3y-x}{2} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \quad | : 2 \neq 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} x+y = 1+2n, n \in \mathbb{Z} \\ -x+3y = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} x = 1-y+2n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 3y-1-2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Найдем пересечение решений данной системы:

$$\begin{aligned} 1-y+2n &= 3y-1-2k \\ 2n+2k+2 &= 4y \quad | : 2 \neq 0 \\ n+k+1 &= 2y \end{aligned}$$

или

$$b.) x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$$

РЕШИМ СНАЧАЛА НЕРАВЕНСТВО:

ЗАМЕНА:

$$\arccos \frac{x}{7} = \alpha$$

$$\alpha \in [0; \pi]$$

$$\arcsin \frac{y}{7} = \beta$$

$$\beta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{7} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha - \beta > -\frac{\pi}{2}$$

$$(\alpha - \beta) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$$

ОГР НА X:

$$-1 \leq \frac{x}{7} \leq 1$$

$$-7 \leq x \leq 7$$

ОГР НА Y:

$$-1 \leq \frac{y}{7} \leq 1$$

$$-7 \leq y \leq 7$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

б.)

$$\alpha - \beta > -\frac{\pi}{2}, \quad (\alpha - \beta) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$\Rightarrow$ это неравенство можно прочитать как:

$$|\alpha - \beta| \leq \frac{\pi}{2}$$

найдем когда $\alpha - \beta = -\frac{\pi}{2}$

$$\text{т.к. } \alpha \in [0; \pi], \text{ а } \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],$$

то $\Rightarrow$ это равенство возможно только, если:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \stackrel{\text{обр. значения}}{=} \begin{cases} \arccos \frac{x}{7} = 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{7} = 1 \\ \frac{y}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ исходному неравенству:

$$\alpha - \beta > -\frac{\pi}{2}$$

удовлетворяют все целые x , такие

что: $x = -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$

и все целые y такие, что:

$$y = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$$

теперь вернёмся к совокупности:

$$\begin{cases} x = 1 - y + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 3y - 1 - 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

1.) при $y = -4$

$$\begin{cases} x = 5 + 2n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ нечёт} \\ x = -13 - 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ нечёт} \end{cases}$$

в эту совокупность
подходят все
 x , такие, такие, что:

$$x = -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

итого: 7 пар

3.) при $y = -2$:

$$\begin{cases} x = 3 + 2n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ нечёт} \\ x = -7 - 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ нечёт} \end{cases}$$

в эту совокупность

$$\text{подходят } x = -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

2.) при $y = -3$

$$\begin{cases} x = 4 + 2n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ чёт} \\ x = -10 - 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ чёт} \end{cases}$$

в эту совокупность
подходят все x , такие, что:

$$x = -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6$$

итого: 7 пар

4.) при $y = -1$

$$\begin{cases} x = 2 + 2n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ чёт} \\ x = -4 - 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ чёт} \end{cases}$$

в эту совокупность

$$\text{подходят } x = -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

б.) 5.) при $y=0$

$$\begin{cases} x=1+2n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ нечет} \\ x=-1-2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ нечет} \end{cases}$$

В эту совокупность

подходят $x = -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5$
итого: 7 пар

7.) при $y=2$

$$\begin{cases} x=-1+2n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ нечет} \\ x=5-2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ нечет} \end{cases}$$

В эту совокупность

подходят $x = -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5$
итого: 7 пар

В п. 4.) и 3.) по 7 пар

с.) при $y=1$

$$\begin{cases} x=2n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ чет} \\ x=2-2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ чет} \end{cases}$$

В эту совокупность

подходят $x = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$
итого: 7 пар

8.) при $y=3$

$$\begin{cases} x=-2+2n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ чет} \\ x=8-2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ чет} \end{cases}$$

В эту совокупность

подходят $x = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$
итого: 7 пар

Итого: $7 \times 8 = 56$ пар чисел $(x, y), x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$

Ответ: а.) $(1-y+2n, y), n \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}$
 $(3y-1-2k, y), k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}$

б.) 56 пар



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н 4

Пусть всего было S одиннадцатиклассников, $S \in \mathbb{N}$
в конце месяца выделили x билетов, $x > 4$, $x \in \mathbb{N}$

Вероятность того, что Петя попадет на концерт в
начале месяца была: $\frac{4}{S}$

Вероятность того, что и Петя, и Вася попадут на
концерт в начале месяца была:

$$\frac{4}{S} \cdot \frac{3}{S-1} = \frac{12}{S(S-1)}$$

Вероятность того, что и Петя, и Вася попадут на
концерт в ~~начале~~ конце месяца стала:

$$\frac{x}{S} \cdot \frac{x-1}{S-1} = \frac{x(x-1)}{S(S-1)} \text{ и эта вероятность в 11}$$

раз больше чем $\frac{12}{S(S-1)}$

$$\frac{x(x-1)}{S(S-1)} = \frac{11 \cdot 12}{S(S-1)} \quad | \cdot S(S-1) \neq 0$$

$$x^2 - x = 11 \cdot 12$$

$$x^2 - x - 11 \cdot 12 = 0$$

$$D = 1 + 528 = 529$$

$$x_1 = \frac{1+23}{2} = 12$$

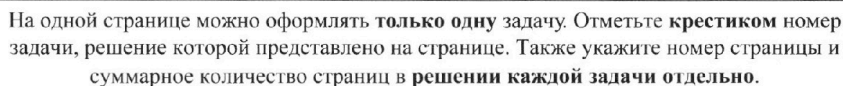
$$x_2 = \frac{1-23}{2} = -11 \notin \mathbb{N}$$

$\Rightarrow x = 12$ билетов - выделили в

Ответ: 12 билетов

конце месяца
на концерт

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times 4 \\ \hline 528 \end{array}$$



СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Замечание: О-центр окр. W_1
 W_1 окр. окр. около отрезка ΔABC

W_2 оптич. околно ΔBOC

$$W_2 \cap AB = P, AP = 16, PB = 8$$
$$AC = 22$$

HAUTH: SABC

Решение:

$$\text{Juz} \quad AB = AP + PB = 24$$

ОВ-РАНИХС W1

НУ (ТБ 4-РАДНУС W2

ТОГДА КО Т. ЧИНЫСОВ:

$$\triangle ABC: \frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2OB \Rightarrow OB = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC}$$

$$\Delta BOC: \frac{BC}{\sin \angle BOC} = 2r \Rightarrow r = \frac{BC}{2 \sin \angle BOC}$$

$\angle BOC = 2\angle BAC$ (центральный и вписанный в ω_1)

$$\Rightarrow \frac{BC}{4 \sin \angle BAC \cdot \cos \angle BAC} \Rightarrow \frac{OB}{4} = \frac{4 \sin \angle BAC \cdot \cos \angle BAC}{2 \sin \angle BAC} = 2 \cos \angle BAC$$

$$\Rightarrow OA = 24 \cdot \cos \angle BAC, \quad BC = 44 \cdot \sin \angle BAC \cdot \cos \angle BAC$$

РАСЧЕТЫ В БДС:

$OB = OC$ - радиусы $\Rightarrow \triangle BOC$ - равнобедренный
 $\Rightarrow \angle OBC = \angle OCB = \frac{180^\circ - \angle BOC}{2} =$

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC \text{ (по г. о (сумма углов в тревг.)}$$

$\angle OPB = \angle BOC = 2\angle BAC$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу в ω_2)

$$\Rightarrow \angle PCB = 180^\circ - \angle CPB - \angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \angle ACB - \angle BAC$$

По Т. Синусов: $\triangle ABC: \frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{BC}{\sin \angle A} = 2R$

$$\Delta CPD: \frac{PB}{\sin PCB} = 29 = \frac{8}{\sin(LACB - LBAL)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

⇒ с одной стороны:

$$6 = 4 \cdot \sin \angle ACB \cdot \cos \angle BAC \Rightarrow \sin \angle ACB = \frac{6}{4 \cdot \cos \angle BAC}$$

А с другой:

$$4 \cdot \sin(\angle ACB - \angle BAC) = 4 \Rightarrow 4 \cdot \sin \angle ACB \cdot \cos \angle BAC - 4 \cdot \sin \angle BAC \cdot \cos \angle ACB = 4$$

$$\Rightarrow 6 - 4 \cdot \sin \angle BAC \cdot \cos \angle ACB = 4$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \sin \angle BAC \cdot \cos \angle ACB = 2$$

по т. косинусов в $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos \angle BAC \cdot AC \cdot AB$$

$$\begin{array}{r} 1576 \\ + 484 \\ \hline 1060 \end{array}$$

$$164^2 \cdot \sin^2 \angle BAC \cdot \cos^2 \angle BAC = 576 + 484 - 1056 \cdot \cos \angle BAC$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 42 \\ \hline 96 \\ + 48 \\ \hline 528 \end{array}$$

⇒

$$164^2 \cdot \sin^2 \angle BAC \cdot \cos^2 \angle BAC = 1060 - 1056 \cdot \cos \angle BAC$$

составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin \angle ACB = \frac{6}{4 \cdot \cos \angle BAC} \\ 4 \cdot \sin \angle BAC \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \angle ACB} = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{т.к. } \triangle ABC - \text{остроуг} \\ \Rightarrow \angle ACB \in (0^\circ; 90^\circ) \\ \Rightarrow \cos \angle ACB > 0 \\ \angle BAC \in (0^\circ; 90^\circ) \\ \Rightarrow \cos \angle BAC > 0 \end{array}$$

$$164^2 \cdot \sin^2 \angle BAC \cdot \cos^2 \angle BAC = 1060 - 1056 \cdot \cos \angle BAC \quad (2)$$

подставим $\sin \angle ACB = \frac{6}{4 \cdot \cos \angle BAC}$ в ур-е (1)

$$(1) \quad 4 \cdot \sin \angle BAC \cdot \sqrt{1 - \frac{9}{4 \cos^2 \angle BAC}} = 2$$

$$4 \cos \angle BAC \cdot \sqrt{4 \cos^2 \angle BAC - 9} = 2$$

$$4^2 \cos^2 \angle BAC - 36 = \frac{4 \cos^2 \angle BAC}{\sin^2 \angle BAC}$$

$$4^2 = \frac{4 \cos^2 \angle BAC + 36 \sin^2 \angle BAC}{\cos^2 \angle BAC \cdot \sin^2 \angle BAC}$$

теперь подставим это в ур-е (2)

$$(2) \quad 64 \cos^2 \angle BAC + 576 \cdot \sin^2 \angle BAC = 1060 - 1056 \cdot \cos \angle BAC$$

$$576 - 512 \cos^2 \angle BAC = 1060 - 1056 \cdot \cos \angle BAC$$

$$\begin{array}{r} 576 \\ - 64 \\ \hline 512 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 1060 \\ -576 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$512 \cdot \cos^2 \angle BAC - 1056 \cdot \cos \angle BAC + 484 = 0 \quad | : 4$$

$$128 \cos^2 \angle BAC - 264 \cdot \cos \angle BAC + 121 = 0$$

$$\cos \angle BAC = t, \quad t \in (0; 1) \quad \text{т.к. } \angle BAC \in (0^\circ; 90^\circ)$$

$\Rightarrow$ ур-е примет вид:

$$128t^2 - 264t + 121 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 42^2 - 4 \cdot 121 \cdot 9 = 121 \cdot 64 \\ &= 121 \cdot 64 \cdot 9 - 121 \cdot 64 \cdot 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{264 + 88}{256} > 1 \quad \text{прот. доп. усл.} \\ t_2 = \frac{264 - 88}{256} = \frac{176}{256} = \frac{11}{16} \end{cases} \end{aligned}$$

ОБР. замена

$$\Rightarrow \cos \angle BAC = \frac{11}{16}, \quad \angle BAC \in (0^\circ; 90^\circ)$$

$\Rightarrow$ по оск. триг. тожд:

$$\begin{aligned} \sin \angle BAC &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} = \sqrt{\frac{256 - 121}{256}} = \\ &= \frac{\sqrt{9 \cdot 15}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin \angle BAC \cdot AB \cdot AC = 22 \cdot \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} =$$

$$= 11 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 264 \cdot 11 \\ \times 11 \\ \hline 2884 \\ 2884 \\ \hline 2884 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 126 \\ \times 11 \\ \hline 1386 \\ 1386 \\ \hline 1386 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 176 \\ \times 11 \\ \hline 1936 \\ 1936 \\ \hline 1936 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

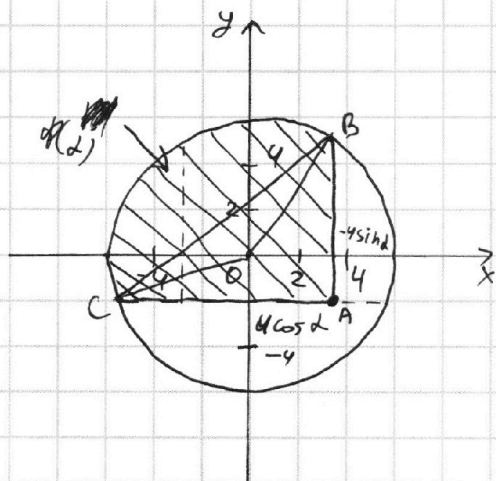
$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

1. СЛУЧАЙ:

$$\begin{cases} x+4\sin\alpha \leq 0 \\ y-4\cos\alpha \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4\sin\alpha \\ y \geq 4\cos\alpha \end{cases}$$

$x^2+y^2 \leq 36$ — ЭТО ОКРУЖНОСТЬ
С ЦЕНТРОМ
В Т. $O(0;0)$, РАДИУСОМ
 $R=6$
И ОБЛАСТЬ
ВНЕШНЕЕ

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin\alpha \leq 1 \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1 \\ -4 \leq -4\sin\alpha \leq 4 \quad -4 \leq 4\cos\alpha \leq 4 \end{aligned}$$



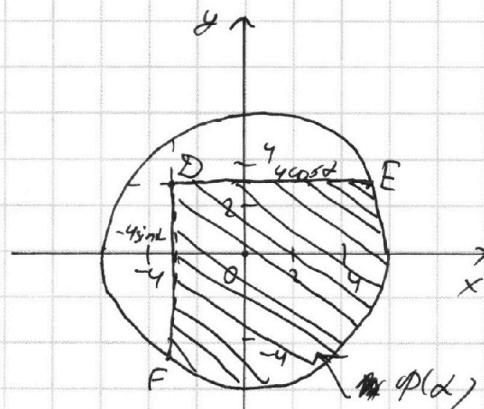
Очевидно, что чтобы периметр фигуры M был наибольшим, нужно, чтобы $4\cos\alpha$ было как можно меньше, а $-4\sin\alpha$ как можно больше
 $\Rightarrow \cos\alpha < 0, \sin\alpha < 0$
 $\Rightarrow \alpha$ — угол в III четверти

2. СЛУЧАЙ:

$$\begin{cases} x+4\sin\alpha \geq 0 \\ y-4\cos\alpha \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4\sin\alpha \\ y \leq 4\cos\alpha \end{cases}$$

$x^2+y^2 \leq 36$ — ЭТО ОКРУЖНОСТЬ
С ЦЕНТРОМ
В Т. $O(0;0)$, РАДИУСОМ $R=6$
И ОБЛАСТЬ
ВНЕШНЕЕ

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin\alpha \leq 1 \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1 \\ -4 \leq -4\sin\alpha \leq 4 \quad -4 \leq 4\cos\alpha \leq 4 \end{aligned}$$



Очевидно, что чтобы периметр фигуры M был наибольшим, нужно, чтобы $4\cos\alpha$ было как можно больше, а $-4\sin\alpha$ как можно меньше
 $\Rightarrow \cos\alpha > 0, \sin\alpha > 0$
 $\Rightarrow \alpha$ — угол в I четверти



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

1. СЛУЧАЙ:

α в IV четверти

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

по основному
триг. тождеству

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x \leq -4 \sin \alpha \\ y \geq -4 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

Тогда точки A, B и C, лежащие на границе фигуры $\Phi(\alpha)$ имеют координаты:

$$A(-4 \sin \alpha; -4 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha})$$

$$B(-4 \sin \alpha; 2 \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha})$$

$$C(2 \sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha}; 4 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha})$$

$$\Rightarrow AC = -4 \sin \alpha + 2 \sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha}$$

$$BA = 2 \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} + 4 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$BC^2 = (-4 \sin \alpha + 2 \sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha})^2 + (2 \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} + 4 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha})^2$$

$OC = OB = 6$ — радиусы окружности
 $M = AC + AB + BC$, где BC — длина дуги BC
 $\Rightarrow$ по т. кос. катетов в $\triangle BOC$

$$BC^2 = OC^2 + OB^2 - 2 \cos \angle BOC \cdot OC \cdot OB$$

$$16 \sin^2 \alpha + 20 + 16 \sin^2 \alpha - 16 \sin \alpha \sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha} +$$

$$+ 36 - 16 \sin^2 \alpha + 4 - 16 \sin^2 \alpha = 36 + 36 - 2 \cos \angle BOC$$

$$+ 16 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} = 36 + 36 - 72 \cos \angle BOC$$

$$\Rightarrow \cos \angle BOC = \frac{72 + 16 \sin \alpha \sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha} - 16 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}}{72}$$

$$= \frac{9 + 2 \sin \alpha \sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha} - 2 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}}{9}$$

2. СЛУЧАЙ:

α в I четверти

$$\Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

по основному
триг. тождеству

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x \geq -4 \sin \alpha \\ y \leq 4 \cos \alpha \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

Тогда точки D, E и F, лежащие на границе фигуры $\Phi(\alpha)$ имеют координаты:

$$D(-4 \sin \alpha; 4 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha})$$

$$E(2 \sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha}; 4 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha})$$

$$F(-4 \sin \alpha; 2 \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha})$$

$$\Rightarrow DE = 2 \sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha} + 4 \sin \alpha$$

$$DF = 4 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} + 2 \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$

$$EF^2 = (2 \sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha} + 4 \sin \alpha)^2 + (4 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} + 2 \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha})^2$$

$OE = OF = 6$ — радиусы окруж.

$M = DE + DF + EF$, где EF — длина дуги EF