МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y =$ $= (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
   $$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
   $$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

1.) A - четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр, следоват.: A может быть равно только одному из следующих 9 чисел: 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999

Любое из этих чисел можно представить в виде:

$A = x \cdot 11 \cdot 101$, где x - цифра, из которой сост. число A (кроме 0)

$1111 : 11 = 101$

2.) C - двузначное число одна из цифр которого 1

=> C может быть равно одному из следующих 18 чисел: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91

3.) $A \cdot B \cdot C = x \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = n^2$, где n - некоторое натуральное число

число 101 - простое

т.к. 101 есть в разложении числа n^2 на множители, то, следовательно $n^2 \vdots 101$

а т.к. n^2 - полный квадрат натурального числа, то, следовательно $n^2 \vdots 101^2$

=> либо x, либо B, либо C кратно 101

т.к. x - цифра, а C - двузначное число, то ни одно из них не может быть кратно 101

=> $B \vdots 101$

т.к. B - трёхзначное число, то, следовательно B можно представить в виде:

$B = y \cdot 101$, где y - цифра (кроме 0)

т.к. хотя бы одна цифра в записи B 7, то => $y = 7$

=> B может равнятся только числу 707

4.) => $A \cdot B \cdot C = x \cdot 101^2 \cdot 11 \cdot 7 \cdot C = n^2$, 11 - простое число

в разложении числа n^2 есть 11 => $n^2 \vdots 11$, а т.к. n^2 - квадрат натурального числа, то => $n^2 \vdots 11^2$

=> либо x, либо C кратно 11

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

4.) т.к. x - цифра (кроме 0), то $\Rightarrow$ x не может быть кратно 11 $\Rightarrow$ $C \vdots 11$

из п. 2.) следует, что C может равняться только числу 11

5.) $A \cdot B \cdot C = x \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7 = n^2$, 7 - простое число

в разложении числа n^2 есть 7 $\Rightarrow$ $n^2 \vdots 7$,

а т.к. n^2 - квадрат натурального числа, то, следовательно $n^2 \vdots 7^2$

$\Rightarrow$ $x \vdots 7$

а т.к. x - цифра (кроме 0), то $\Rightarrow$ $x = 7$

6.) $\Rightarrow$ $A = x \cdot 11 \cdot 101 = 7777$

$B = y \cdot 101 = 707$

$C = 11$

Ответ: (7777; 707; 11)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 2

1.) $k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y\cancel{+4}+x\cancel{-4}+3}{\cancel{xy}(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)} \quad | : (x+y+3) \neq 0$$

т.к. $x>0,\ y>0 \Rightarrow x+y+3>0$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-4)(y+4)} \quad | \cdot (x-4)(y+4)\cdot xy,$$

$x \neq 4$ $\quad$ $x>0,\ y>0 \Rightarrow y+4>0$

$$(x-4)(y+4) = xy$$

$$\cancel{xy} - 4y + 4x - 16 = \cancel{xy} \quad | : 4 \neq 0$$

$$-y + x - 4 = 0$$

$x = y+4$ $\quad$ $y>0 \Rightarrow x \neq 4$ при любом y

2.) $M = x^3 - y^3 - 12xy = (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y =$

$= \cancel{y^3} + \cancel{48y} + \cancel{12y^2} + 16 \cancel{-y^3} - \cancel{12y^2} - \cancel{48y} =$

$= 16$

Ответ: 16

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

а.) $(\sin\pi y - \sin\pi x)\sin\pi y = (\cos\pi y + \cos\pi x)\cdot\cos\pi y$

$$\sin^2\pi y - \sin\pi x\cdot\sin\pi y = \cos^2\pi y + \cos\pi x\cdot\cos\pi y$$

$$\cos^2\pi y - \sin^2\pi y + \cos\pi x\cdot\cos\pi y + \sin\pi x\cdot\sin\pi y = 0$$

$$\cos 2\pi y + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$2\cos\frac{2\pi y + \pi x - \pi y}{2}\cdot\cos\frac{2\pi y - \pi x + \pi y}{2} = 0 \quad |:2\neq 0$$

$$\cos\frac{\pi y + \pi x}{2}\cdot\cos\frac{3\pi y - \pi x}{2} = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\cos\frac{\pi y + \pi x}{2} = 0\\ \cos\frac{3\pi y - \pi x}{2} = 0\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\frac{\pi y + \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\in\mathbb{Z} \quad |:\pi\neq 0\\ \frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\in\mathbb{Z} \quad |:\pi\neq 0\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + n, n\in\mathbb{Z} \quad |\cdot 2\neq 0\\ \frac{3y-x}{2} = \frac{1}{2} + k, k\in\mathbb{Z} \quad |\cdot 2\neq 0\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x+y = 1+2n, n\in\mathbb{Z}\\ -x+3y = 1+2k, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}x = 1-y+2n, n\in\mathbb{Z}\\ x = 3y-1-2k, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

~~Найдём пересечение решений данной совокупности:~~

$$\cancel{1-y+2n = 3y-1-2k}$$

$$\cancel{2n+2k+2 = 4y \quad |:2\neq 0}$$

$$\cancel{n+k+1 = 2y}$$

б.) $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$

Решим сначала неравенство:

$$\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

Замена:

$\arccos\frac{x}{7} = \alpha$

$\alpha\in[0;\pi]$

$\arcsin\frac{y}{4} = \beta$

$\beta\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$$\alpha - \beta > -\frac{\pi}{2}$$

$$(\alpha-\beta)\in[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$$

Огр на x:

$-1\le\frac{x}{7}\le 1$

$-7\le x\le 7$

Огр на y:

$-1\le\frac{y}{4}\le 1$

$-4\le y\le 4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

б.) $\alpha-\beta > -\frac{\pi}{2}$, $(\alpha-\beta)\in[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$

$\Rightarrow$ это неравенство можно прочитать как:

"$\alpha-\beta \neq -\frac{\pi}{2}$"

Найдём когда $\alpha-\beta=-\frac{\pi}{2}$

т.к. $\alpha\in[0;\pi]$, а $\beta\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$,

то $\Rightarrow$ это равенство возможно только, если:

$$\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=\frac{\pi}{2}\end{cases} \overset{\text{обр. замена}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\arccos\frac{x}{7}=0\\ \arcsin\frac{y}{4}=\frac{\pi}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{7}=1\\ \frac{y}{4}=1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=7\\ y=4\end{cases}$$

$\Rightarrow$ исходному неравенству:

$\alpha-\beta > -\frac{\pi}{2}$

удовлетворяют все целые x, такие что: $x=-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;6$

и все целые y такие, что:

$y=-4;-3;-2;-1;0;1;2;3$

теперь вернёмся к совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}x=1-y+2n, n\in\mathbb{Z}\\ x=3y-1-2k, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

1.) при $y=-4$

$$\left[\begin{array}{l}x=5+2n, n\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\text{-нечёт}\\ x=-13-2k, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\text{-нечёт}\end{array}\right.$$

в эту совокупность подходят все x, ~~такие~~ такие, что:

$x=-7;-5;-3;-1;1;3;5$

итого: 7 пар ~~всего 7 пар~~

2.) при $y=-3$

$$\left[\begin{array}{l}x=4+2n, n\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\text{-чёт.}\\ x=-10-2k, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\text{-чёт.}\end{array}\right.$$

в эту совокупность подходят все x, такие, что:

$x=-6;-4;-2;0;2;4;6$

итого: 7 пар

3.) при $y=-2$:

$$\left[\begin{array}{l}x=3+2n, n\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\text{-нечёт}\\ x=-7-2k, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\text{-нечёт}\end{array}\right.$$

в эту совокупность подходят $x=-7;-5;-3;-1;1;3;5$

4) при $y=-1$

$$\left[\begin{array}{l}x=2+2n, n\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\text{-чёт}\\ x=-4-2k, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\text{-чёт.}\end{array}\right.$$

в эту совокупность подходят $x=-6;-4;-2;0;2;4;6$

б.) 5.) при $y=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=1+2n, n\in Z \Rightarrow x\text{-нечёт} \\ x=-1-2k, k\in Z \Rightarrow x\text{-нечёт} \end{array}\right.$$

в эту совокупность подходят $x=-7;-5;-3;-1;1;3;5$

итого: 7 пар

6.) при $y=1$

$$\left[\begin{array}{l} x=2n, n\in Z \Rightarrow x\text{-чёт} \\ x=2-2k, k\in Z \Rightarrow x\text{-чёт} \end{array}\right.$$

в эту совокупность подходят $x=-6;-4;-2;0;2;4;6$

итого: 7 пар

7.) при $y=2$

$$\left[\begin{array}{l} x=-1+2n, n\in Z \Rightarrow x\text{-нечёт} \\ x=5-2k, k\in Z \Rightarrow x\text{-нечёт} \end{array}\right.$$

в эту совокупность подходят $x=-7;-5;-3;-1;1;3;5$

итого: 7 пар

8.) при $y=3$

$$\left[\begin{array}{l} x=-2+2n, n\in Z \Rightarrow x\text{-чёт} \\ x=8-2k, k\in Z \Rightarrow x\text{-чёт} \end{array}\right.$$

в эту совокупность подходят $x=-6;-4;-2;0;2;4;6$

итого: 7 пар

в п. 4.) и 3.) по 7 пар

Итого: $7\times 8=56$ пар чисел $(x;y)$, $x\in Z$, $y\in Z$

Ответ: а.) $(1-y+2n;y)$, $n\in Z$, $y\in R$

$(3y-1-2k;y)$, $k\in Z$, $y\in R$

б.) 56 пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4

Пусть всего было S одиннадцатиклассников, $S \in \mathbb{N}$
В конце месяца выделили x билетов, $x > 4$, $x \in \mathbb{N}$

Вероятность того, что Петя попадёт на концерт в начале месяца была: $\frac{4}{S}$

Вероятность того, что и Петя, и Вася попадут на концерт в начале месяца была:

$$\frac{4}{S} \cdot \frac{3}{S-1} = \frac{12}{S(S-1)}$$

Вероятность того, что и Петя, и Вася попадут на концерт в ~~начале~~ конце месяца стала:

$$\frac{x}{S} \cdot \frac{x-1}{S-1} = \frac{x(x-1)}{S(S-1)}$$ и эта вероятность в 11 раз больше чем $\frac{12}{S(S-1)}$

$$\frac{x(x-1)}{S(S-1)} = \frac{11 \cdot 12}{S(S-1)} \quad \Big| \cdot S(S-1) \neq 0$$

т.к Петя и Вася – это уже два человека, то $S > 1$

$$x^2 - x = 11 \cdot 12$$

$$x^2 - x - 11 \cdot 12 = 0$$

$$D = 1 + 528 = 529$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1+23}{2} = 12 \\ x_2 = \frac{1-23}{2} = -11 \notin \mathbb{N} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} 132 \\ \times \quad 4 \\ \hline 528 \end{array}$$

$\Rightarrow x = 12$ билетов – выделили в конце месяца на концерт

Ответ: 12 билетов

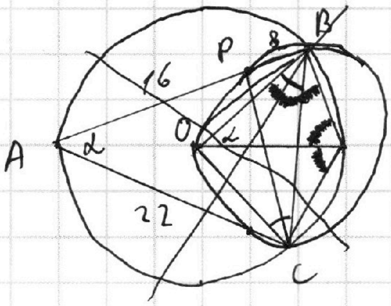
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5



Дано: O – центр окр. W_1

W_1 опис. около остроуг. ΔABC

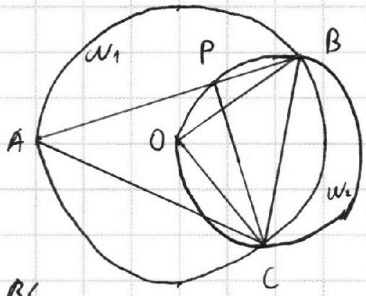
W_2 опис. около ΔBOC

$W_2 \cap AB = P$, $AP = 16$, $PB = 8$

$AC = 22$

Найти: S_{ABC}

Решение:



1) $AB = AP + PB = 24$

OB – радиус W_1

Пусть r – радиус W_2

Тогда по т. синусов:

ΔABC: $\frac{BC}{\sin\angle BAC} = 2OB \Rightarrow OB = \frac{BC}{2\sin\angle BAC}$

ΔBOC: $\frac{BC}{\sin\angle BOC} = 2r \Rightarrow r = \frac{BC}{2\sin\angle BOC}$

$\angle BOC = 2\angle BAC$ (центральный и вписанный в W_1)

$\Rightarrow r = \frac{BC}{4\sin\angle BAC\cdot\cos\angle BAC} \Rightarrow \frac{OB}{r} = \frac{4\sin\angle BAC\cdot\cos\angle BAC}{2\sin\angle BAC} = 2\cos\angle BAC$

$\Rightarrow OB = 2r\cdot\cos\angle BAC$, $BC = 4r\cdot\sin\angle BAC\cdot\cos\angle BAC$

~~Рассмотрим ΔBOC:~~

~~$OB = OC$ – радиусы W_1 $\Rightarrow \Delta BOC$ – равнобедренный~~

~~$\Rightarrow \angle OBC = \angle OCB = \frac{180^\circ - \angle BOC}{2} =$~~

$\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC$ (по т. о сумме углов в треуг.)

$\angle CPB = \angle BOC = 2\angle BAC$ (вписанные, опир. на одну дугу в W_2)

$\Rightarrow \angle PCB = 180^\circ - \angle CPB - \angle ABC = 180^\circ - 2\angle BAC - \angle ABC = \angle ACB - \angle BAC$

по т. синусов: ΔABC: $\frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{24}{\sin\angle ACB} = 2OB = 4r\cos\angle BAC$

ΔCPB: $\frac{PB}{\sin\angle PCB} = 2r = \frac{8}{\sin(\angle ACB - \angle BAC)}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5

=> с одной стороны:

$$6 = 4\cdot\sin\angle ACB\cdot\cos\angle BAC \Rightarrow \sin\angle ACB = \frac{6}{4\cdot\cos\angle BAC}$$

А с другой:

$$4\cdot\sin(\angle ACB-\angle BAC)=4 \Rightarrow 4\cdot\sin\angle ACB\cdot\cos\angle BAC -$$

$$-4\cdot\sin\angle BAC\cdot\cos\angle ACB = 4$$

$$\Rightarrow 6-4\cdot\sin\angle BAC\cdot\cos\angle ACB=4$$

$$\Rightarrow 4\cdot\sin\angle BAC\cdot\cos\angle ACB=2$$

по т. косинусов в $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2+AC^2-2\cos\angle BAC\cdot AC\cdot AB$$

$576 + 484 = 1060$ $\qquad$ $24 \times 44 = 1056$ $\qquad$ $48+48=528$

$$16\,4^2\cdot\sin^2\angle BAC\cdot\cos^2\angle BAC = 576+484-1056\cdot\cos\angle BAC$$

$\Rightarrow$

$$16\,4^2\cdot\sin^2\angle BAC\cdot\cos^2\angle BAC = 1060-1056\cdot\cos\angle BAC$$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin\angle ACB = \dfrac{6}{4\cdot\cos\angle BAC} \\ 4\cdot\sin\angle BAC\cdot\sqrt{1-\sin^2\angle ACB} = 2 \quad (1) \\ 16\,4^2\cdot\sin^2\angle BAC\cdot\cos^2\angle BAC = 1060-1056\cdot\cos\angle BAC \quad (2) \end{cases}$$

Т.к. $\triangle ABC$ – остроуг $\Rightarrow \angle ACB\in(0^\circ;90^\circ) \Rightarrow \cos\angle ACB>0$; $\angle BAC\in(0^\circ;90^\circ) \Rightarrow \cos\angle BAC>0$

(1) подставим $\sin\angle ACB = \frac{6}{4\cdot\cos\angle BAC}$ в ур-е (1)

$$4\cdot\sin\angle BAC\cdot\sqrt{\frac{4^2\cdot\cos^2\angle BAC-36}{4^2\cdot\cos^2\angle BAC}}=2$$

$$\mathrm{tg}\angle BAC\cdot\sqrt{4^2\cdot\cos^2\angle BAC-36}=2$$

$576 - 64 = 512$

$$4^2\cdot\cos^2\angle BAC-36=\frac{4\cos^2\angle BAC}{\sin^2\angle BAC}$$

$$4^2=\frac{4\cos^2\angle BAC+36\sin^2\angle BAC}{\cos^2\angle BAC\cdot\sin^2\angle BAC}$$

Теперь подставим это в ур-е (2)

(2) $$64\cos^2\angle BAC+576\cdot\sin^2\angle BAC = 1060-1056\cdot\cos\angle BAC$$

$$576-512\cos^2\angle BAC = 1060-1056\cdot\cos\angle BAC$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$1060 - 576 = 484$

$512 \cdot \cos^2\angle BAC - 1056 \cdot \cos\angle BAC + 484 = 0 \quad | : 4$

$128 \cos^2\angle BAC - 264 \cdot \cos\angle BAC + 121 = 0$

$\cos\angle BAC = t, \quad t \in (0;1)$ т.к. $\angle BAC \in (0°; 90°)$

$\Rightarrow$ ур-е примет вид:

$128t^2 - 264t + 121 = 0$

$D = \cancel{\ldots} = 121 \cdot 64$

$121 \cdot 64 \cdot 9 - 121 \cdot 64 \cdot 8$

$264 : 4 = 66$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{264+88}{256} > 1 \text{ противор. усл. } t \in (0;1) \\ t_2 = \dfrac{264-88}{256} = \dfrac{176}{256} = \dfrac{11}{16} \end{array} \right.$

$264 - 88 = 176$

$176 + 88 = 264$

$16 \cdot 11 = 176$

$256 - 121 = 135$

Обр. замена

$\Rightarrow \cos\angle BAC = \dfrac{11}{16}, \quad \angle BAC \in (0°; 90°) \Rightarrow \sin\angle BAC > 0$

$\Rightarrow$ по осн. триг. тожд.:

$\sin\angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2\angle BAC} = \sqrt{\dfrac{256-121}{256}} =$

$= \dfrac{\sqrt{9 \cdot 15}}{16} = \dfrac{3\sqrt{15}}{16}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \sin\angle BAC \cdot AB \cdot AC = 22 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 24 \cdot \dfrac{3\sqrt{15}}{16} =$

$= 11 \cdot 3 \cdot \dfrac{3\sqrt{15}}{2} = \dfrac{99\sqrt{15}}{2}$

Ответ: $\dfrac{99\sqrt{15}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases}(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0\\ x^2+y^2\le 36\end{cases}$$

1. случай:

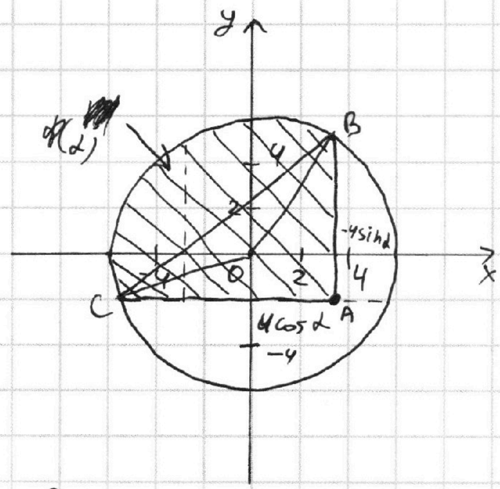
$$\begin{cases}x+4\sin\alpha\le 0\\ y-4\cos\alpha\ge 0\\ x^2+y^2\le 36\end{cases} \Leftrightarrow$$

$x^2+y^2\le 36$ – это окружность с центром в т. $O(0;0)$, радиусом $R=6$ и область внутри неё

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le -4\sin\alpha\\ y\ge 4\cos\alpha\\ x^2+y^2\le 36\end{cases}$$

$-1\le\sin\alpha\le 1$ $\quad -1\le\cos\alpha\le 1$

$-4\le -4\sin\alpha\le 4$ $\quad -4\le 4\cos\alpha\le 4$



Очевидно, что чтобы периметр фигуры M был наибольшим, нужно, чтобы $4\cos\alpha$ было как можно меньше, а $-4\sin\alpha$ как можно больше $\Rightarrow \cos\alpha<0,\ \sin\alpha<0$ $\Rightarrow \alpha$ – угол в $\boxed{\text{IV}}$ четверти

2. случай:

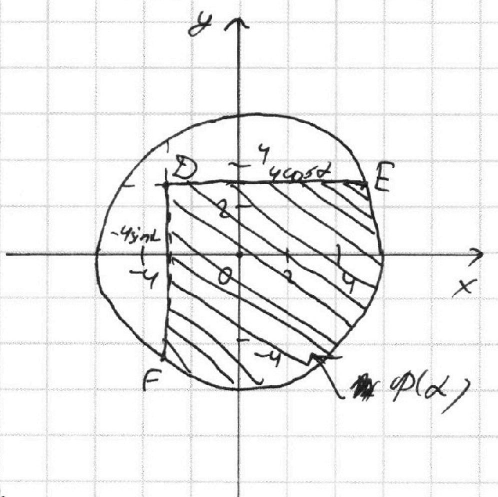
$$\begin{cases}x+4\sin\alpha\ge 0\\ y-4\cos\alpha\le 0\\ x^2+y^2\le 36\end{cases} \Leftrightarrow$$

$x^2+y^2\le 36$ – это окружность с центром в точке $O(0;0)$, радиусом $R=6$ и область внутри неё

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -4\sin\alpha\\ y\le 4\cos\alpha\\ x^2+y^2\le 36\end{cases}$$

$-1\le\sin\alpha\le 1$ $\quad -1\le\cos\alpha\le 1$

$-4\le -4\sin\alpha\le 4$ $\quad -4\le 4\cos\alpha\le 4$



Очевидно, что чтобы периметр фигуры M был наибольшим, нужно, чтобы $4\cos\alpha$ было как можно больше, а $-4\sin\alpha$ как можно меньше $\Rightarrow \cos\alpha>0,\ \sin\alpha>0$ $\Rightarrow \alpha$ – угол в I четверти

№6

1. случай:

α в IV четверти

$\Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ по основному триг. тождеству

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x \le -4\sin\alpha \\ y \ge -4\sqrt{1-\sin^2\alpha} \\ x^2+y^2 \le 36 \end{cases}$$

Тогда точки A, B и C, лежащие на границе фигуры $\Phi(\alpha)$ имеют координаты:

$A(-4\sin\alpha; -4\sqrt{1-\sin^2\alpha})$

$B(-4\sin\alpha; 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha})$

$C(-2\sqrt{5+4\sin^2\alpha}; -4\sqrt{1-\sin^2\alpha})$

$\Rightarrow AC = -4\sin\alpha + 2\sqrt{5+4\sin^2\alpha}$

$BA = 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha} + 4\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$BC^2 = (-4\sin\alpha + 2\sqrt{5+4\sin^2\alpha})^2 + (2\sqrt{9-4\sin^2\alpha} + 4\sqrt{1-\sin^2\alpha})^2$

$OC = OB = 6$ – радиусы окружности

$M = AC + AB + l_{BC}$, где l_{BC} – длина дуги BC

$\Rightarrow$ по т. косинусов $\triangle BOC$:

$BC^2 = OC^2 + OB^2 - 2\cos\angle BOC \cdot OB \cdot OC$

$16\sin^2\alpha + 20 + 16\sin^2\alpha - 16\sin\alpha\sqrt{5+4\sin^2\alpha} + 36 - 16\sin^2\alpha + 4 - 16\sin^2\alpha + 16\sqrt{1-\sin^2\alpha}\sqrt{9-4\sin^2\alpha} = 36 + 36 - 72\cos\angle BOC$

$\Rightarrow \cos\angle BOC = \dfrac{72 + 16\sin\alpha\sqrt{5+4\sin^2\alpha} - 16\sqrt{1-\sin^2\alpha}\sqrt{9-4\sin^2\alpha}}{72} = \dfrac{9 + 2\sin\alpha\sqrt{5+4\sin^2\alpha} - 2\sqrt{1-\sin^2\alpha}\sqrt{9-4\sin^2\alpha}}{9}$

2. случай:

α в I четверти

$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ по основному триг. тождеству

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x \ge -4\sin\alpha \\ y \le 4\cos\alpha \\ x^2+y^2 \le 36 \end{cases}$$

Тогда точки D, E и F, лежащие на границе фигуры $\Phi(\alpha)$ имеют координаты:

$D(-4\sin\alpha; 4\sqrt{1-\sin^2\alpha})$

$E(2\sqrt{5+4\sin^2\alpha}; 4\sqrt{1-\sin^2\alpha})$

$F(-4\sin\alpha; -2\sqrt{9-4\sin^2\alpha})$

$\Rightarrow DE = 2\sqrt{5+4\sin^2\alpha} + 4\sin\alpha$

$DF = 4\sqrt{1-\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha}$

$EF^2 = (2\sqrt{5+4\sin^2\alpha} + 4\sin\alpha)^2 + (4\sqrt{1-\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha})^2$

$OE = OF = 6$ – радиусы окруж.

$M = DE + DF + l_{EF}$, где l_{EF} – длина дуги EF