



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 4, а  $y$  — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 12xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 16$ ,  $BP = 8$ ,  $AC = 22$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$A = \overline{aaaa}$ , где  $a = \text{число от 1 до 9}$

$$\Rightarrow A = 1111 \cdot a = 101 \cdot 11 \cdot a$$

$A \cdot B - C = n^2 \Rightarrow$  Простые множители 101 и 11

должны быть в чётной степени в произведении.

$a < 11 \Rightarrow$  Множители 101 и 11 должны быть в чётной степени в произведении.  $C < 100$  (ограничение по усл.)

$\Rightarrow C$  не дел. на 11

Пусть  $C$  не дел. на 11, тогда  $B : 11$ ,  $B : 101$

~~$B : 101 / (101; 11) = 111 \Rightarrow B \neq 1000$~~  (против. по усл.,  
~~но если  $B$  не делится~~  
делится на 101 и 11 одновременно ??!

$\Rightarrow C : 11$  ~~одна из цифр  $C$  - "1"~~, но  
она подходит только  $C = 11$

$\Rightarrow B : 101$ , но м.д. <sup>хотя бы</sup> одна из цифр  $B$  - "7", но  $B = 101$   
и  $B$ -простое.

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 707 \cdot 11 = n^2 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot a \cdot 7$$

$$a \Rightarrow \boxed{a = 7} \Rightarrow \boxed{A = 7777}$$

$1 \leq a \leq 9, a \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$  единственная правильная ~~правильная~~  $(A; B; C)$   
 $- (7777; 707; 11)$

Ответ:  $(7777; 707; 11)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$x, y > 0, \quad k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow x+y+3 \left( \frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-4)(y+4)} \right) = 0$$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y+3=0 & -\text{не выт}, \text{ т.к. } x, y > 0 \Rightarrow x+y+3 > 0 \\ \frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-4)(y+4)} = 0 & \end{cases}$

$$\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-4)(y+4)} = 0 \quad | \cdot xy > 0, \quad | \cdot (x-4)(y+4) \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-4)(y+4) - xy = 0 \\ x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4xy - 4y + 4x - 16 - xy = 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16 = 4x - 4y \\ x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y = 4 \\ x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y+4, \quad y > 0 \Rightarrow x > 4 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = y+4 \Rightarrow M = (y+4)^3 - y^3 - 12y/(y+4) =$$

$$= (y+4) \left( y^2 + 8y + 16 - 12y \right) - y^3 = y^3 - 4y^2 + 16y + 4y^2 - 16y - 16y =$$

$$= 64 \quad \Rightarrow \boxed{M=64}$$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$x, y \in \mathbb{R}$

$$a) (\sin(\pi y - \sin(\pi x)) \cdot \sin(\pi y) = (\cos(\pi y + \cos(\pi x)) \cdot \cos(\pi y)$$

$$\pi x = d, \pi y = \beta \Rightarrow \sin(\beta) (\sin(\beta) - \sin(d)) = \cos(\beta) / (\cos(\beta) + \cos(d))$$

~~Пусть  $\cos(\beta) = 0$ :  $\beta = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow \sin(\beta) = \pm 1$ ,  $\sin(\beta) - \sin(d) = 0$~~

~~$\Rightarrow \sin(\beta) = \sin(d) \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ d = \frac{\pi}{2} + \pi m, \end{cases} k, m \in \mathbb{Z}$~~

~~$\begin{cases} \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ d = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m, \end{cases}$~~

~~$d = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m \Rightarrow \cos\left(\frac{\beta-d}{\pi}\right)$~~

~~Пусть  $2 \cdot \sin\left(\frac{\beta-d}{\pi}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta-d}{\pi}\right) = \sin(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{d+\beta}{\pi}\right) \cdot \cos\left(\frac{d-\beta}{\pi}\right) \cdot \cos(\beta)$~~

~~①  $\cos\left(\frac{d+\beta}{\pi}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d+\beta}{\pi} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow d+\beta = \pi + 2\pi n$~~

~~$\Rightarrow d = \pi - \beta + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$~~

~~$\cos\left(\frac{\beta-d}{\pi}\right) = 0 \quad ②$~~

~~$\sin\left(\frac{\beta}{\pi} - \frac{d}{\pi}\right) \cdot \sin(\beta) = \cos\left(\frac{\beta}{\pi} - \frac{d}{\pi}\right) \cdot \cos(\beta) \quad ③$~~

~~④  $\cos\left(\frac{\beta}{\pi} - \frac{d}{\pi} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\beta}{\pi} - \frac{d}{\pi} + \beta\right) = \cos\left(\frac{\beta}{\pi} - \frac{d}{\pi} - \beta\right) + \cos\left(\frac{\beta}{\pi} - \frac{d}{\pi} + \beta\right)$~~

~~$\Rightarrow \cos\left(\frac{3\beta}{\pi} - \frac{d}{\pi}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3\beta}{\pi} - \frac{d}{\pi} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$~~

~~$\Rightarrow 3\beta = \frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi n, m \in \mathbb{Z}$~~

~~⑤  $\Rightarrow \begin{cases} d = \pi - \beta + 2\pi n \\ d = 3\beta - \pi + 2\pi n \end{cases} n \in \mathbb{Z}$~~

~~$\Rightarrow \begin{cases} \pi x = \pi - \pi y + 2\pi n \\ \pi x = 3\pi y - \pi + 2\pi n \end{cases} \quad | : \pi \text{ for } y \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y + 2n \\ x = 3y - 1 + 2n \end{cases}$~~

Пусть  $y = t \in \mathbb{R}$ , тогда  $x = 1 - t + 2n$ . Получаем пары решений:

$$(1-t+2n; t) \text{ и } (3t-1+2n; t), \text{ где } n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$$

Ответ:  $(1-t+2n; t); (3t-1+2n; t), n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\delta) \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$\arccos x \in [0, \pi]$ ,  $\arcsin y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , где  $x \in [-1, 1]$

$$\textcircled{1} \quad \frac{x}{7} \in [-1, 1] \Rightarrow -1 \leq 1-t+2n \leq 1, -t+2n+1 \leq 0$$

$$\frac{y}{4} \in [-1, 1] \Rightarrow -1 \leq \frac{t}{4} \leq 1 \quad \text{***}$$

$$-4 \leq t \leq 4$$

$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2} \text{ только при } \arccos \frac{x}{7} = 0, \arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$$

а то все остальные случаи неравенства выполняются (с опр. на  $\frac{x}{7}, \frac{y}{4}$ )

$$\textcircled{2} \quad -4 \leq t \leq 4, -8 \leq 2n-t \leq 0, \quad (\text{также выполните } b, n \in \mathbb{Z})$$

$$t = -4 \Rightarrow \arcsin(-4) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Некоторые из оставшихся } \arccos \frac{x}{7} \text{ (см.)}$$

$$\Rightarrow \text{***} \quad \textcircled{3} \quad -8 \leq 2n+4 \leq 0 \Rightarrow -10 \leq 2n \leq 2 \Rightarrow -5 \leq n \leq 1$$

$$x = 1-t+2n = 5+2n \Rightarrow \text{значения } x: 7, 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7$$

Итого: 8 пар.  $(-4; 7), (-4; 5) \dots (-4; -7)$

$$t = -3 \Rightarrow \arccos(-3) \Rightarrow -8 \leq 2n+3 \leq 0 \Rightarrow -11 \leq 2n \leq 3 \Rightarrow -5 \leq n \leq 1$$

$$\Rightarrow +7 \text{ пар. } (-3; 6), (-3; 4) \dots (-3; -6) \quad \text{и тд. } -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$$

Задача решена для  $t: 2-8$  пар, при  $t/2-4$  пар.

Итого:  $5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 = 40 + 28 = 68$ , т.к. одна пара не подходит:  $(4; 4) \quad | t=4, 1-4+2n = 2n-3=4 \Rightarrow n=5$

$\Rightarrow 64$  пар. | где  $x, y$  - первые члены пары



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

(1)

$x = 3t - 1 + 2n$ ,  $y = t$ , - ~~некие~~ пары отнять будут различной чётности, но в  $\mathbb{D}$  уже были рассмотрены все возможные такие пары (с учётом ограничений)  
 $\Rightarrow$  пары в  $\mathbb{D}$  будут только включать пары из  $\mathbb{E}$

$$\Rightarrow S = 67$$

Ответ: 67



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Пусть есть  $n$  ящика с конфетами.

Пусть в начале можно берести  $t$  ящиков:  $\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$  (нек. нр.)

В конце:  $\frac{t}{n} \cdot \frac{t-1}{n-1}$ , где  $t$ -какое кол-во было выдано  
 $t \in \mathbb{N}, t > 4$

$$\Rightarrow 11 \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} = \frac{t(t-1)}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow 11 \cdot 12 = (t-1) \cdot t \Rightarrow t = 12 - \text{единств.}$$

$t^2 - t - 11 \cdot 12 = (t-12)(t+11), t \in \mathbb{N}$  решение  $\exists$

$\Rightarrow$  в конце можно было брать 12 ящиков

Ответ: 12

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.












СТРАНИЦА  
1 из 2

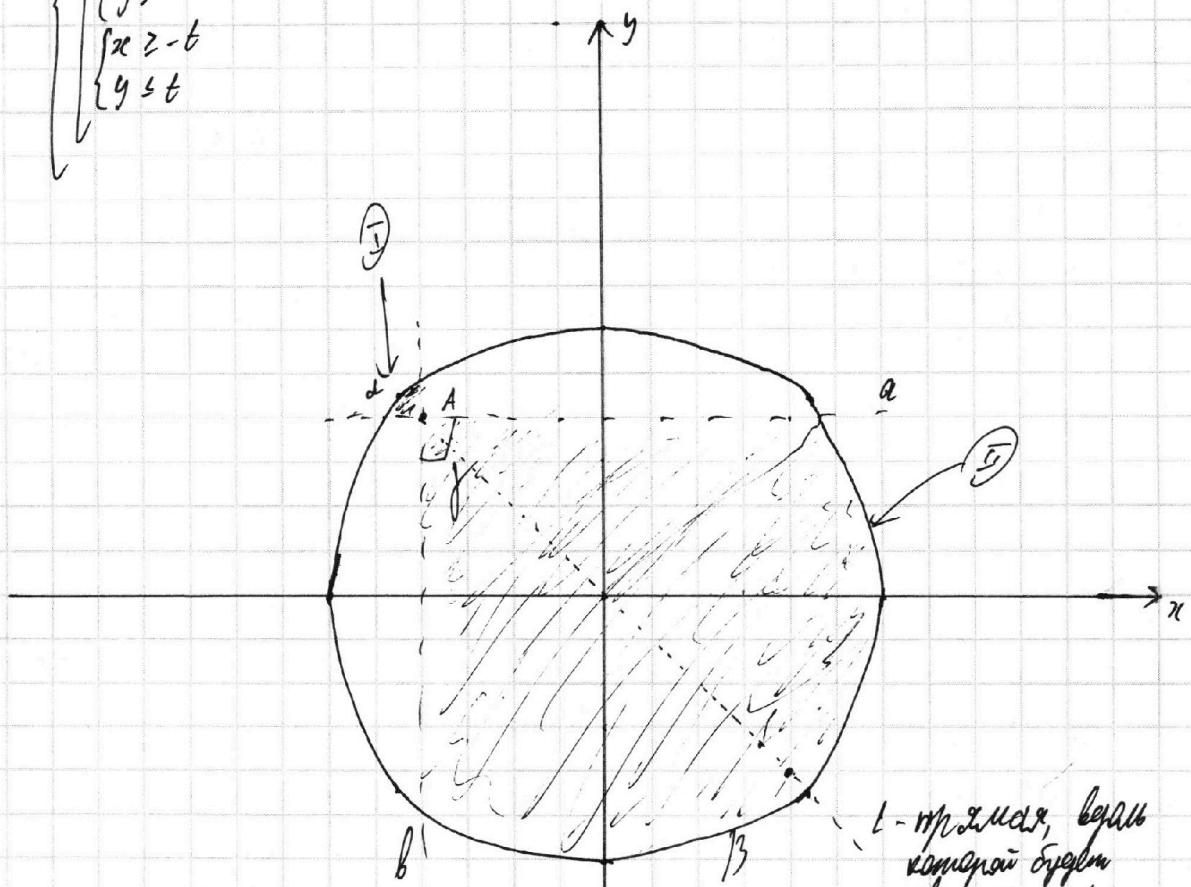
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$\begin{cases} (x+4\sin t)(y-4\sin t) \geq 0, \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}, \quad y \sin t = t, \quad \sin t \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [-4; 4]$$

$x^2+y^2 \leq 36 = 6^2$  ← кр-кую удовлетворяет мн-во точек  
внутри окр. с  $R=6$  и  $\vartheta[0; \pi]$

$$\begin{cases} R=6 \\ x \leq -t \\ y \geq t \\ x \geq -6 \\ y \leq t \end{cases}$$



l-тройка, вдоль  
которой будет  
перемещаться A

Приемник 1: сущность движ

старт серд  $\alpha, \beta$  эти же дюймы  
и сущность движ дюйм, который  
образован вектором  $\vec{\alpha}$  и  $\vec{\beta}$

$\beta, \delta$  - угл. первое дуг

$$r = \frac{\alpha + \beta}{\pi} = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \delta + \beta = \pi$$

$$\text{Сумма длии дуг: } 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{2\pi} + 2\pi r \cdot \frac{\beta}{2\pi} = \pi r$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

→ Сумма длин дуг всегда ~~зависит от t~~ не зависит от t  
→ нужно максимизировать длины корд  
→ самая длинная корда - диаметр  $\Rightarrow$  ~~если~~  
чтобы ~~максимум~~, чтобы корды были диаметрами.  
всплывающие при  $t = 0$

$$\Rightarrow M_{\max} = 2\pi R + 2 \cdot d = 2\pi \cdot 6 + 2 \cdot 12 = 6\pi + 24$$

$$t=0 \Rightarrow \sin \vartheta = 0 \Rightarrow \sin \vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $M_{\max} = 6\pi + 24$ ,  $\vartheta = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .



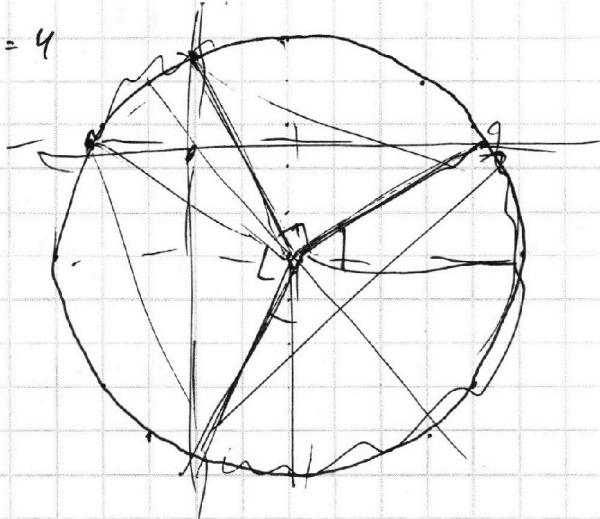
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 - 12\ell = 4$$



$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

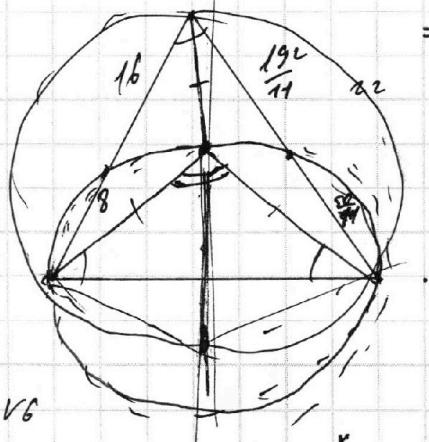
$$\Rightarrow \alpha + \beta = \pi$$

$$\Rightarrow 2\pi R \cdot \frac{d}{2\pi} + 2\pi R \cdot \frac{D}{2\pi} = \\ = 8\pi R$$

$$(x - 4\sin\alpha) / (y - 4\sin\beta) \leq 0$$

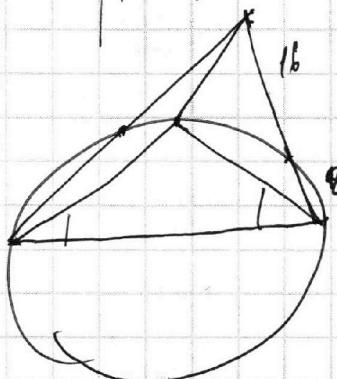
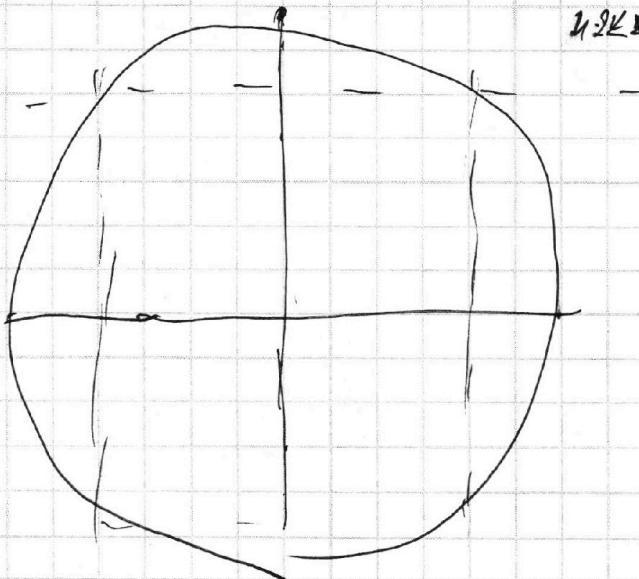
$$\text{DM} \left\{ \begin{array}{l} x \leq -4\sin\beta \\ y \geq 4\sin\beta \\ x \geq -4\sin\alpha \\ y \leq 4\sin\alpha \end{array} \right.$$

$$16 - 24 = 22 \cdot n \\ \Rightarrow n = \frac{16 - 12}{22} = \frac{64 - 3}{71}$$



$$4\sqrt{6}$$

$$4\cdot 2\pi R^2$$



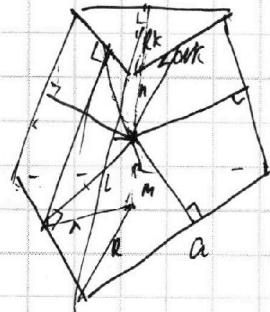


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$h = \sqrt{l^2 - R^2}$$

$$h^2 = l^2 - (R - Rh)^2 = l^2 - R^2(1-k)^2$$

$$m^2 + t^2 = n^2 + (rk)^2 \Rightarrow m^2 =$$

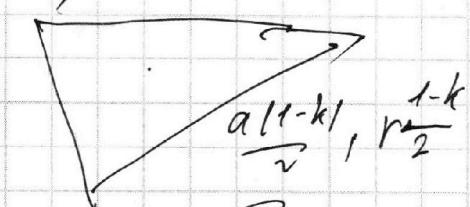
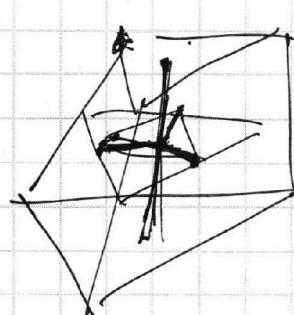
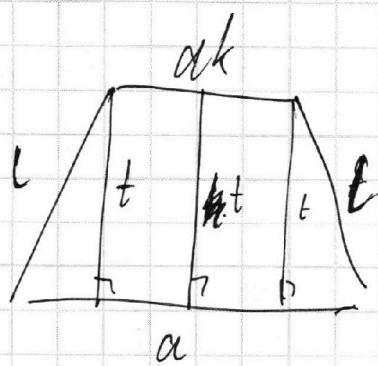
$$\text{mark } n^2 - m^2 = r^2(1-k^2)$$

$$h \cdot (h-m) = r^2(1-k^2)$$

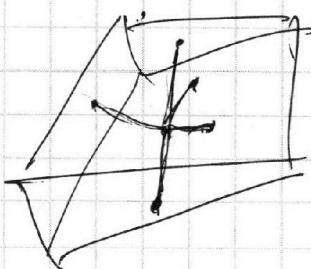
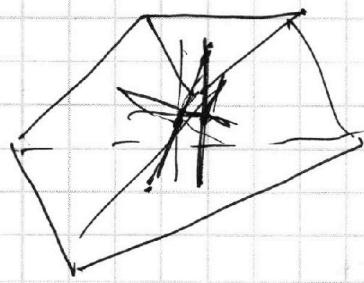
$$\cancel{h^2 = R^2} \quad h^2 = l^2 - R^2(1-k)^2$$

$$t^2 = l^2 - \frac{a^2(1-k)^2}{4}$$

$$\frac{a - ak}{2} = \frac{a}{2}(1-k)$$



$$h = 2 \cdot r \cdot \frac{\sqrt{1-k}}{2} = r\sqrt{1-k}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + (y + y_0)^2 = y_0^2$$

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + b \Rightarrow b = y_1 - kx_1 \cdot \frac{y_1 + y_0}{x_1 + x_0} = \\ -y_0 = -kx_0 + b \end{cases}$$

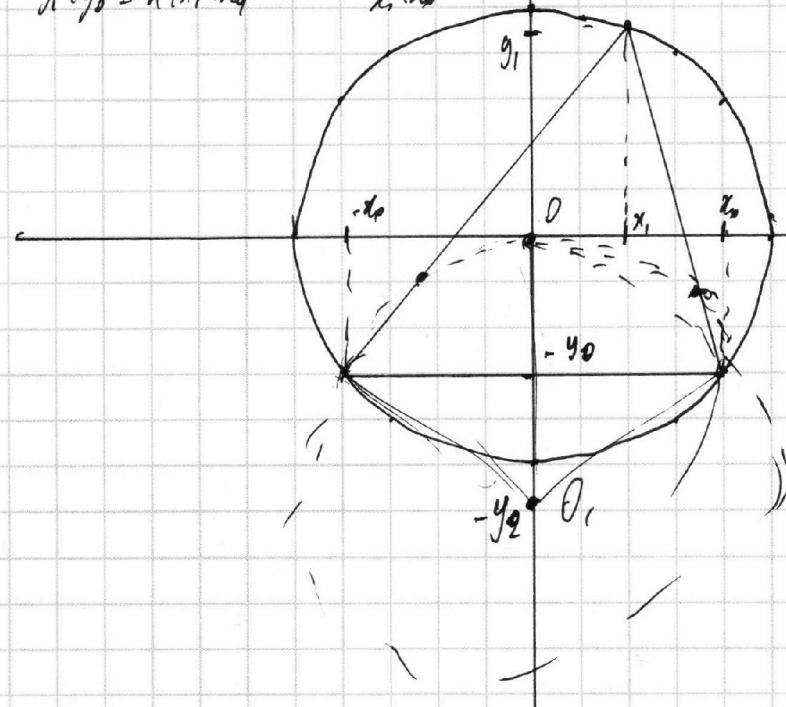
$$y_1 + y_0 = k(x_1 + x_0) \Rightarrow k = \frac{y_1 + y_0}{x_1 + x_0}$$

$$y_1^2 = x_0^2 + (y_0 - y_1)^2$$

$$y_1^2 = 4R^2$$

$$y_0^2 = x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 y_1 + y_1^2$$

$$R^2 = x_0^2 + y_0^2 = 2y_0 y_1$$



$$(y_1 + y_0)^2 + (x_1 + x_0)^2 = 2R^2$$

$$(y_1 + y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2 = 2r^2$$

$$(x_1 + x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2 = 4R^2 - 2r^2$$

$$(x_1 + x_0 - x_0 + x_1) / (x_1 + x_0 + x_0 - x_1) = 2 \cdot x_1 \cdot 2 \cdot x_0 = 4R^2 - 2r^2$$

$$\Rightarrow x_0 \cdot x_1 = 23$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \text{БГ } C: 11. \text{ Вс } C \text{ есть ",1"} \Rightarrow C = 11, 22, 33, 44, \dots, 99$$

только 11 подходит

$$\Rightarrow C = 11$$

$$\Rightarrow B = 101 \cdot b, \text{ где } b \leq 9, \text{ но } b \text{ в } B \text{ есть ",2"}$$

$$\Rightarrow B = 101, 202, 303, \dots, 707, 808, 909$$

подходит только 707

$$\Rightarrow B = 707$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 11 \cdot 707 = n^2$$

$$\Rightarrow 101^2 \cdot 11^2 \cdot a \cdot 7 = n^2$$

$$\Rightarrow \text{М.п. } a \in \{1; 9\} \Rightarrow a = 7$$

$$\Rightarrow (7777; 707; 11)$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y-4} + \frac{3}{(x-4)(y-4)}, \quad x, y > 0$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y-4)} \Rightarrow (x+y+3) \cdot \left( \frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-4)(y-4)} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x+y+3=0, \text{ но М.п. } x, y > 0, \text{ но } x+y+3 > 0 \quad \nexists x, y > 0$$

$$\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-4)(y-4)} = 0 \Rightarrow (x-4)/(y-4) + xy = 0$$

$$\Rightarrow xy + 4x - 4y - 16 - xy = 0$$

$$4x - 4y = 16 \Rightarrow x = y + 4$$

$$y > 0 \Rightarrow x > 16$$

$$\Rightarrow M = 8074 (y+16)^2 - y^3 - 12y(y+16) = (y+16)(y^2 + 32y + 256 - 12y) - y^3 =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{a} \overline{a} \overline{a} \overline{a}, a \in \{1; 9\}$$

$$\text{знач } A = 1111 \cdot a, B \in [10^7; 99^7], C \in [10^7; 91^7]$$

$$A \cdot B \cdot C = 1111 \cdot a \cdot B \cdot C$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C \in [1111 \cdot 9 \cdot 99^7 \cdot 91^7]$$

$$\begin{aligned} & (y+4)^2 - 16y^3 - 16y^2 + 4 = (y+4)/((y+4)^2 - 16y) - 9^2 = (y+4)/((y+4)(y+4 - 16y)) - 9^2 = \\ & = (y+4)/((y+4)(y+4 - 16y)) = (y+4)/((y+4)(y+4 - 16y)) = (y+4)/((y+4)(y+4 - 16y)) = \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 1111^7 \\ - 9 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111^7 \\ - 11 \\ \hline 011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10^7 \\ \times 11 \\ \hline 101 \\ + 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$11 \cdot 101 \cdot$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \times 1111 \\ \hline 1111 \\ 1111 \\ \hline 1234321 \end{array}$$

$$B \cdot C = 1111 \cdot a \cdot n^2$$

$$\begin{array}{r} 99^7 \\ \times 91 \\ \hline 99^7 \\ 8983 \\ \hline 90724 \end{array}$$

$$\Rightarrow C = 11 \cdot C \Rightarrow C = 11$$

$$B = 101 \cdot B$$

$$\Rightarrow B = 407$$

$$A = 1111 \cdot 11 = 101 \cdot 11 \Rightarrow a = 11, \text{ но } \cancel{a}$$

$$A = 2222 = 2 \cdot 101 \cdot 11 \Rightarrow \text{Если}$$

$$A = 101 \cdot 11 \cdot a \Rightarrow B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot n^2$$

$$C < 100 \Rightarrow C \neq 101, \text{ и если } C \neq 101, \text{ то } B \neq 101.$$

$$\text{Если } C \neq 11, \text{ то } B \neq 11 \Rightarrow B \neq 1111, \text{ но } B < 1000$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= y^3 + 20y^2 + 56y + 16y^2 + 320y + 16 \cdot 256 - y^3 = 36y^3 + 576y^2 + 16 \cdot 256 = \\ = 6^2 \cdot y^2 + 824y^2 + 4^2 \cdot 16^2 = 6^2 y^2 + 6^2 \cdot 4^2; 64 \cdot 6 \cdot 2 = 64 \cdot 11 = \\ = 640$$

$\Rightarrow$

$x, y \in \mathbb{R}$

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \cdot \sin \alpha = (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$$

$$\alpha x = \beta, \alpha y = \gamma$$

$$(\sin \beta - \sin \alpha) \cdot \sin \alpha = (\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha)$$

$$\sin \beta - \sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \cos \beta + \cos \alpha = 2 \cdot \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\text{так как } \cos \beta = 0 \Rightarrow \sin \beta = \pm 1 \Rightarrow \sin \alpha = \pm 1$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ \beta = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ \alpha = \frac{3\pi}{2} + \pi k, \end{array} \right. \quad k, k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\cos \frac{\beta + \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \alpha}{2}}{\sin \frac{\beta + \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \left( \frac{\beta - \alpha}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \beta$$

$$2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \alpha}{2} = -\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \beta$$

$$\sin \beta = \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \beta = \alpha + 2\pi k,$$

$$\beta = \pi - \alpha + 2\pi k, \Rightarrow \cos \beta = -\cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \beta \cdot (\cos \beta + \cos \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 0 \quad \text{или}$$

$$\Rightarrow \cos \beta = 0 \quad \text{или}$$

$$\cos \beta = 0 \Rightarrow \cos \beta = 0$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$k = \frac{\pi}{2} + \pi k$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

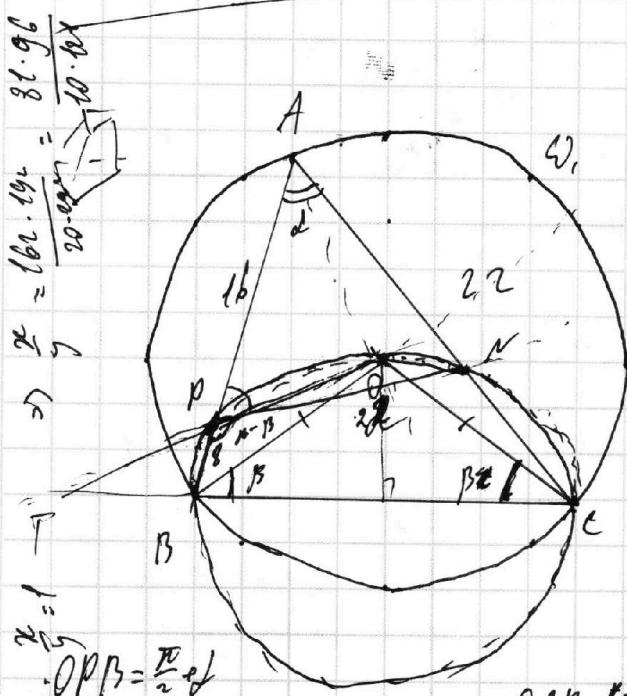
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M_1 \Rightarrow \cancel{\frac{4}{n}} \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n} = P_1 \quad C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

$$\frac{(n-1) \cdot n}{\cancel{n} \cdot \cancel{(n-1) \cdot n}} = \frac{t}{n} \cdot \frac{t-1}{n} \Rightarrow \frac{11 \cdot 12}{n^2} = \frac{t(t-1)}{n^2}$$

$$11 \cdot 12 = t^2 - t \Rightarrow t = 12$$

$$\frac{16}{12} \\ \frac{12}{10} \\ \frac{10}{8} \\ \frac{8}{6} \\ \frac{6}{4} \\ \frac{4}{2}$$



$$\angle OPB = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\frac{24^2}{192} \cdot \angle PBQ = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\angle OCB = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

$$\Rightarrow \angle PBQ = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\frac{16}{D} \cdot \frac{BT}{TC} \cdot \frac{192}{50} = 1$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{BT}{TC} = \frac{25}{192}$$

$$\frac{192}{768}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 192 \cdot \sin \alpha = \frac{22 \cdot 192 \cdot BC}{4 \cdot R}$$

$$\cos \left( \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} - \beta \right) - \cos \left( \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} + \beta \right) = \cos \left( \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} - \beta \right)$$

$$16 \cdot 24 = 72 \cdot AK$$

$$\Rightarrow AK = \frac{16 \cdot 24}{72} = \frac{16 \cdot 12}{11}$$

$$\Rightarrow BN = 22 - \frac{192}{11} = \frac{50}{11}$$

$$\begin{cases} PC^2 = 2R^2 - 2 \cos 2d \cdot R^2 \\ BC^2 = 22^2 + 24^2 - 2 \cos \beta - 22 \cdot 24 \\ R^2 / 2 - 2 \cos 2d = 22^2 + 24^2 - 2 \cos \beta - 22 \cdot 24 \end{cases}$$

$$\frac{BC}{\sin d} = 2R, 4R^2 \cdot \sin^2 d = 22^2 + 24^2 - 2 \cos \beta - 22 \cdot 24$$

$$4R^2 \cdot \sin^2 d = 2R^2 - 2 \cos 2d - R^2$$

$$2 \sin^2 d = 1 - \cos 2d$$

