



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н1.

$$A = \overline{aaaa}, \text{ где } a \text{ — от } 1 \text{ до } 9$$

$$\Rightarrow A = 1111 \cdot a = 101 \cdot 11 \cdot a$$

$A \cdot B \cdot C = n^2 \Rightarrow$ Простые множители 101 и 11 должны быть в четной степени в произведении.

$a < 11 \Rightarrow$ множители 101 и 11 должны быть в числе B и C. $C < 100$ (двузначное по усл.)

$\Rightarrow C$ не дел. на 101

Пусть C не дел. на 11, тогда $B : 11$, $B : 101$

~~но~~ $\text{НОК}(101; 11) = 1111 \Rightarrow B \geq 1111$ (трёхзнач. по усл.)
но если B не дел. на 101 и 11 одновременно!!!

$\Rightarrow \underline{C : 11}$ хотя бы одна из цифр C — "1", но C — двузнач.

нам подходит только $\underline{C = 11}$

$\Rightarrow B : 101$, но т.к. хотя бы одна из цифр B — "1", то $\underline{B = 101}$ и B — трёхзнач.

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a = 101 \cdot 11 = n^2 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot a \cdot 1$$

$$a \Rightarrow \underline{a = 1} \Rightarrow \underline{A = 1111}$$

$1 \leq a \leq 9, a \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ единственная тройка $(A; B; C)$
— $\underline{(1111; 101; 11)}$

Ответ: $(1111; 101; 11)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 2

$$x, y > 0, \quad k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow x+y+3 \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-4)(y+4)} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+3=0 & \text{не выт, т.к. } x, y > 0 \Rightarrow x+y+3 > 0 \\ \frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-4)(y+4)} = 0 & | \cdot xy > 0, \cdot \frac{(x-4)(y+4)}{(x-4)(y+4)} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-4)(y+4) - xy = 0 \\ x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy - 4y + 4x - 16 - xy = 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16 = 4x - 4y \\ x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 4 \\ x \neq 4 \end{cases}, \quad y > 0 \Rightarrow x > 4$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x = y + 4 &\Rightarrow M = (y+4)^3 - y^3 - 12y(y+4) = \\ &= (y+4)(y^2 + 8y + 16 - 12y) - y^3 = y^3 - 4y^2 + 16y + 4y^2 - 16y - 16y - y^3 = \\ &= -16y \Rightarrow M = -16y \end{aligned}$$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3. $x, y \in \mathbb{R}$

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \cdot \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cdot \cos \pi y$$

$$\pi x = \alpha, \pi y = \beta \Rightarrow \sin \beta (\sin \beta - \sin \alpha) = \cos \beta (\cos \beta + \cos \alpha)$$

$$\text{Если } \cos \beta = 0: \beta = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow \sin \beta = \pm 1, \sin \beta - \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{\pi}{2} + \pi k_1 \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k_2 \end{cases} k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{\pi}{2} + \pi k_1 \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k_2 \\ \beta = \frac{3\pi}{2} + \pi k_1 \\ \alpha = \frac{3\pi}{2} + \pi k_2 \end{cases}$$

$$= \cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)$$

$$\text{Если } 2 \cdot \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) = \sin \beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos \beta$$

$$\textcircled{1} \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha + \beta = \pi + 2\pi n$$

$$\Rightarrow \alpha = \pi - \beta + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi - \beta}{2}\right) = 0 \textcircled{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi - \beta}{2}\right) \cdot \sin \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos \beta \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} + \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} - \beta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} + \beta\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{3}{2}\beta - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\beta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3\beta = \pi + \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} \Rightarrow \alpha = \pi - \beta + 2\pi n \\ \textcircled{2} \Rightarrow \alpha = 3\beta - \pi + 2\pi m \end{cases} n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi x = \pi - \pi y + 2\pi n \\ \pi x = 3\pi y - \pi + 2\pi m \end{cases} n, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y + 2n \\ x = 3y - 1 + 2m \end{cases}$$

Пусть $y = t \in \mathbb{R}$, тогда $x = 1 - t + 2n$. Получаем пары чисел:

$(1 - t + 2n; t)$ и $(3t - 1 + 2m, t)$, где $n, m \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$

Ответ: $(1 - t + 2n; t); (3t - 1 + 2m; t), n, m \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b) \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos a \in [0; \pi], \arcsin a \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \text{ где } a \in [-1; 1]$$

$$\textcircled{1} \frac{x}{7} \in [-1; 1] \Rightarrow -1 \leq \frac{1-t+2n}{7} \leq 1, -1 \leq 1-t+2n \leq 7$$

$$\frac{y}{4} \in [-1; 1] \Rightarrow -1 \leq \frac{t}{4} \leq 1$$

$$-4 \leq t \leq 4$$

$$-8 \leq 2n-t \leq 6$$

$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2} \text{ только при } \arccos \frac{x}{7} = 0, \arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$$

а во всех остальных случаях не выполняется (с опр. на $\frac{x}{7}, \frac{y}{4}$)

$$\textcircled{2} -4 \leq t \leq 4, -8 \leq 2n-t \leq 6, \text{ в этом диапазоне } t, n \in \mathbb{Z}$$

$$t = -4 \Rightarrow \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{не выполняется } \forall \arccos \frac{x}{7} \text{ (с опр.)}$$

$$\Rightarrow \text{ит} \textcircled{3} \text{ ~~Вс~~ } -8 \leq 2n+4 \leq 6 \Rightarrow -12 \leq 2n \leq 2 \Rightarrow -6 \leq n \leq 1$$

$$x = 1-t+2n = 5+2n \Rightarrow \text{на значениях } x: 7; 5; 3; 1; -1; -3; -5; -7$$

$$\text{Итого: 8 пар. } [-4; 7], [-4; 5] \dots [-4; -7]$$

$$t = -3 \Rightarrow \arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow -8 \leq 2n+3 \leq 6 \Rightarrow -11 \leq 2n \leq 3 \Rightarrow -5.5 \leq n \leq 1.5$$

$$\Rightarrow \text{и } x = 1-t+2n = 2n+4 \text{ не } -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1$$

$$\Rightarrow + 7 \text{ пар } [-3; 6], [-3; 4] \dots [-3; -6]$$

Заметим: при t : 2 - 8 пар, при $t/2$ - 7 пар.

$$\text{Итого: } 5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 = 40 + 28 = 68, \text{ но одна пара не подходит: } (7; 4) \mid t=4, 1-4+2n = 2n-3 = 4 \Rightarrow n=5$$

$\Rightarrow 67 \text{ пар.} \mid \text{ где } x, y - \text{целыми числами}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

②

$x = 3t - 1 + 2n$, $y = t$, - пары ~~пары~~ пары точек будут
разной четности, но в ⑤ уже были рассмотрены
все возможные такие пары (с учётом ограничений)

⇒ пары в ⑤ будут только ~~вымерять~~ пары из ⑤

⇒ $S = 67$

Ответ: 67



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Пусть всего n ~~на~~ ~~на~~ одинажденики.

Каждый в начале месяца вероятность: $\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$ [нек, не]

В конце: $\frac{t}{n} \cdot \frac{t-1}{n-1}$, где t - новое кол-во билетов
 $t \in \mathbb{N}, t \geq 4$

$$\Rightarrow 11 \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} = \frac{t(t-1)}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow 11 \cdot 12 = (t-1) \cdot t \Rightarrow t = 12 - \text{единств.}$$

$t^2 - t - 11 \cdot 12 = (t-12)(t+11), t \in \mathbb{N}$ решение ок

$\Rightarrow$ в конце месяца всего 12 билетов

Ответ: 12



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

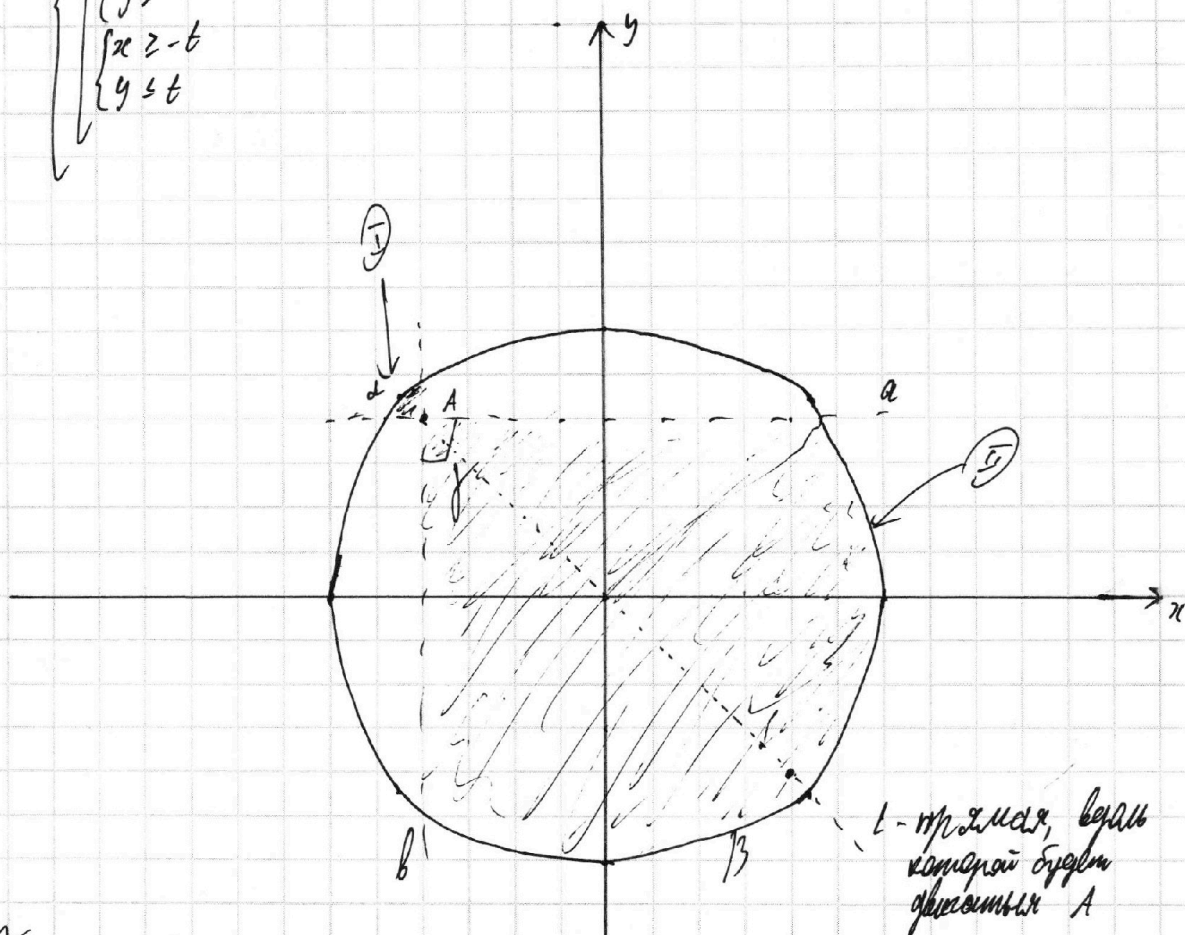
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~6.

$$\begin{cases} |(x+4\sin d)/(y-4\sin d)| \geq \rho, & 4\sin d = t, \sin d \in [-1; 1] \\ x^2 + y^2 \leq 36 & \Rightarrow t \in [-4; 4] \end{cases}$$

$x^2 + y^2 \leq 36 = 6^2$ — кр. к-у удовлетворяет мн-во точек внутри окр. с $R=6$ и $O(0;0)$

$$\begin{cases} x \leq -t \\ y \geq t \\ x \geq -b \\ y \leq t \end{cases}$$



Решение 11: сумма длин
окр. ради a, b (эти радиусы равны)
и сумма длин дуг, которые
ограничивают $\textcircled{I}$ и $\textcircled{II}$

ρ, d — пр. меридиана
 $\gamma = \frac{d+\rho}{2} = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \Rightarrow d+\rho = \pi$
Сумма длин дуг: $2\pi R \cdot \frac{d}{2\pi} + 2\pi R \cdot \frac{\rho}{2\pi} = \pi R$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$ Сумма длин дуг всегда $2\pi R$ (не зависит от t)

$\Rightarrow$ Нужно максимизировать длины хорд

$\Rightarrow$ самая длинная хорда - диаметр $\Rightarrow$ $l = 2R$

$\Rightarrow$ необходимо, чтобы хорды были диаметрами.

Вспоминается при $t = 0$

$$\Rightarrow M_{\max} = 2\pi R + 2 \cdot d = 2\pi \cdot 6 + 2 \cdot 12 = 6\pi + 24$$

$$t = 0 \Rightarrow u \sin \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $M_{\max} = 6\pi + 24$, $\alpha = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.



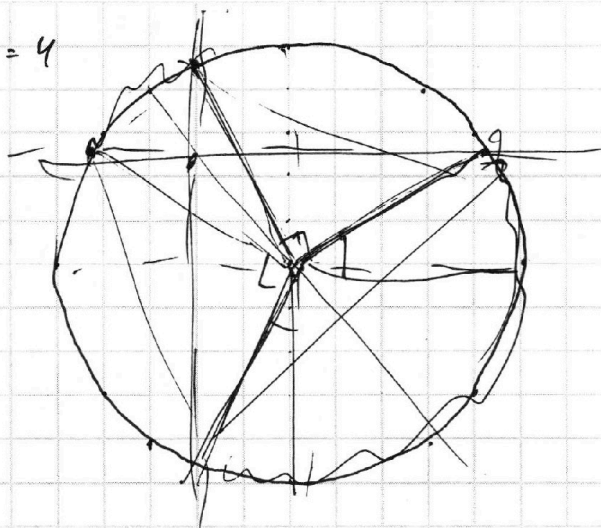
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 - 122 = 4$$



$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

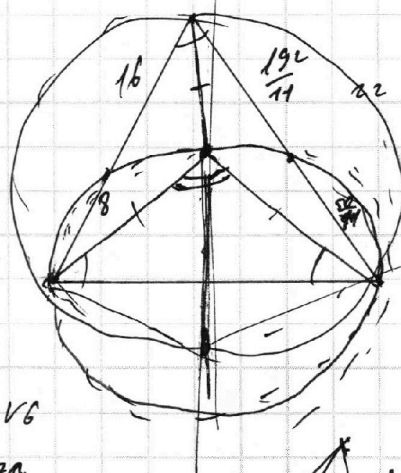
$$\Rightarrow \alpha + \beta = \pi$$

$$\Rightarrow 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} + 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} = 2\pi$$

$$16 - 24 = 22 \cdot n$$
$$\Rightarrow n = \frac{16 - 24}{22} = \frac{-8}{22} = -\frac{4}{11}$$

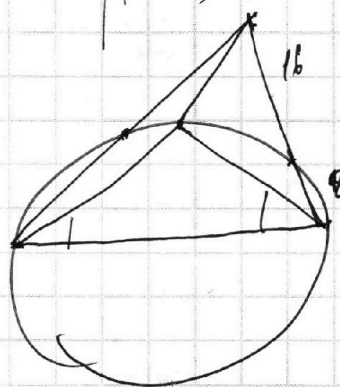
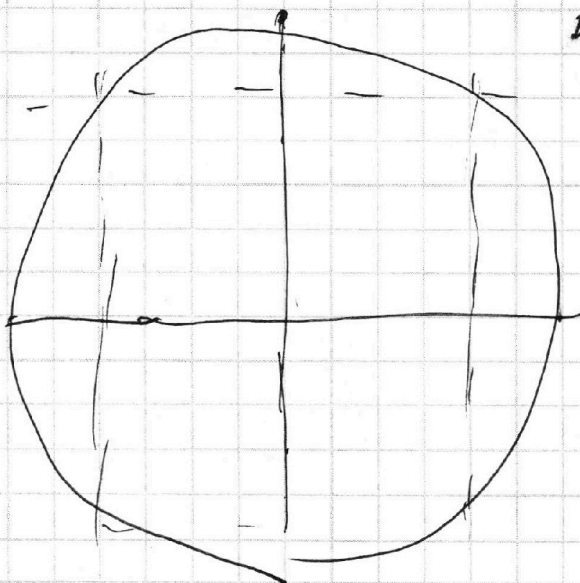
$$(x - 4 \sin t) \cdot (y - 4 \sin t) \leq 0$$

$$\begin{cases} x \leq -4 \sin t \\ y \geq 4 \sin t \\ x \geq -4 \sin t \\ y \leq 4 \sin t \end{cases}$$



$$4\sqrt{2} \cdot 16$$

$$4 \cdot 2 \cdot 16$$



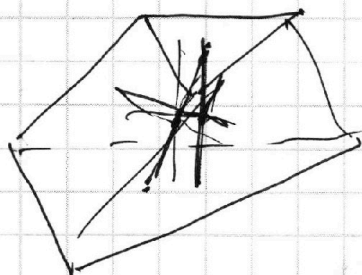
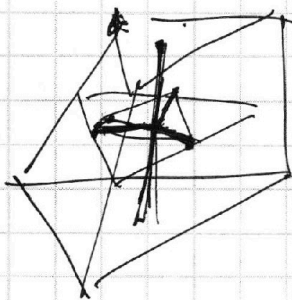
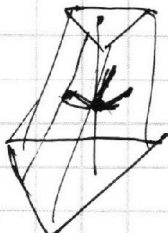
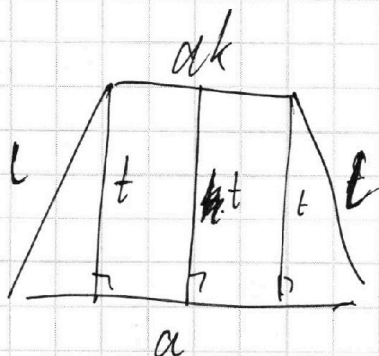
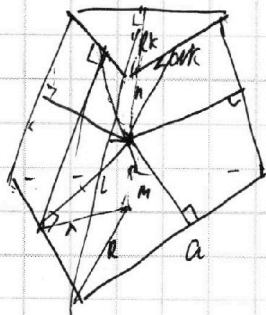


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$h = \sqrt{r^2 - (r - rk)^2}$$

$$h^2 = r^2 - (r - rk)^2 = r^2 - r^2(1-k)^2$$

$$m^2 + t^2 = n^2 + (rk)^2 \Rightarrow m^2 =$$

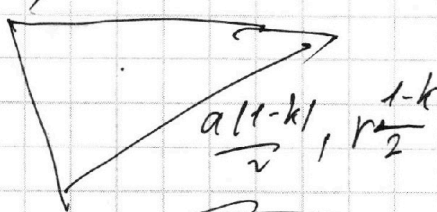
$$n^2 - m^2 = r^2(1-k^2)$$

$$h \cdot (n-m) = r^2(1-k^2)$$

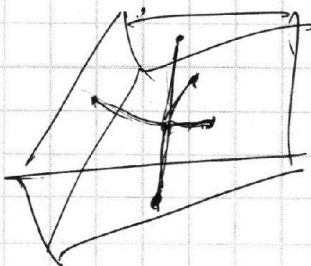
$$h^2 = r^2(1-k)^2$$

$$t^2 = \frac{r^2(1-k)^2}{4}$$

$$\frac{a - dk}{2} = \frac{a(1-k)}{2}$$



$$h = 2 \cdot \frac{r(1-k)}{2} = r(1-k)$$



$$(x_1 + x_0 - x_0 + x_1) / (x_1 + x_0 + x_0 - x_1) = 2 \cdot x_1 \cdot 2 \cdot x_0 = 46 \cdot 2$$

$$\Rightarrow x_0 \cdot x_1 = 23$$

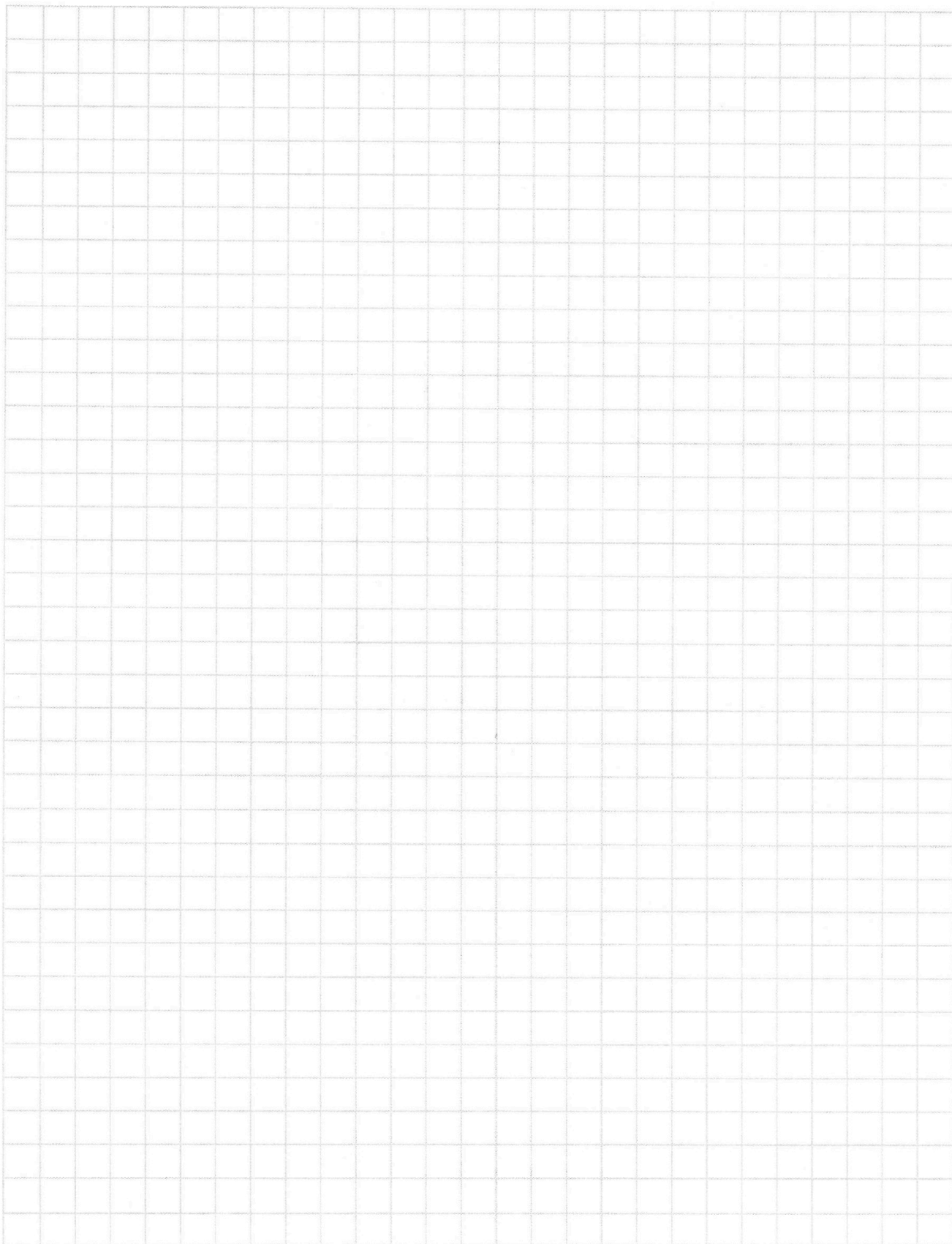


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \text{в } C: 11. \text{ в } C \text{ есть "1"} \Rightarrow C = 11, 22, 33, 44, \dots, 99$$

↑
только 11 подходит

$$\Rightarrow C = 11$$

$$\Rightarrow B = 101 \cdot b, \text{ где } b \leq 9, \text{ но в } B \text{ есть "7"}$$

$$\Rightarrow B = 101, 202, 303, \dots, 707, 808, 909$$

подходит только 707

$$\Rightarrow B = 707$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 11 \cdot 707 = 11^2$$

$$\Rightarrow 101 \cdot 11^2 \cdot a \cdot 7 = 11^2$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } a \in [1; 9] \Rightarrow a = 7$$

$$\Rightarrow (777; 707; 11)$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y-4} + \frac{3}{(x-4)(y-4)}, \quad x, y > 0$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y(x-4)+x(y-4)+3}{(x-4)(y-4)} \Rightarrow (x+y+3) \cdot \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-4)(y-4)} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x+y+3=0, \text{ но т.к. } x, y > 0, \text{ то } x+y+3 > 0 \quad \forall x, y > 0$$

$$\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-4)(y-4)} = 0 \Rightarrow \frac{(x-4)(y-4) - xy}{xy(x-4)(y-4)} = 0 \Rightarrow (x-4)(y-4) - xy = 0$$

$$\Rightarrow xy + 4x - 4y - 16 - xy = 0$$

$$4x - 4y = 16 \Rightarrow x = y + 4$$

$$y > 0 \Rightarrow x > 4$$

$$\Rightarrow M = \text{ПКЧ } (x+16)^3 - y^3 - 12y(y+16) = (y+16)(y^2 + 32y + 256 - 12y) - y^3 =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa}, a \in [1; 9]$$

$$A = 1111 \cdot a, B \in [101; 997], C \in [11; 91]$$

$$A \cdot B \cdot C = 1111 \cdot a \cdot B \cdot C$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C \in [1111 \cdot 9 \cdot 997 \cdot 91];$$

$$(4a^2 - 12a + 4) = (4a^2 - 12a + 4) \cdot (4a^2 - 12a + 4) = (4a^2 - 12a + 4) \cdot (4a^2 - 12a + 4) = (4a^2 - 12a + 4) \cdot (4a^2 - 12a + 4)$$

$$(4a^2 - 12a + 4) = (4a^2 - 12a + 4) \cdot (4a^2 - 12a + 4) = (4a^2 - 12a + 4) \cdot (4a^2 - 12a + 4) = (4a^2 - 12a + 4) \cdot (4a^2 - 12a + 4)$$

$$B \cdot C = 1111 \cdot a \cdot n^2$$

$$\overline{997} \cdot 91 = 90727$$

$$\overline{997} \cdot 91 = 90727$$

$$\Rightarrow C = 11 \cdot c \Rightarrow c = 11$$

$$B = 101 \cdot b$$

$$\Rightarrow b = 707$$

$$A = 1111 = 101 \cdot 11 \Rightarrow a = 11$$

$$A = 2222 = 2 \cdot 101 \cdot 11 \Rightarrow$$

$$A = 101 \cdot 11 \cdot a \Rightarrow B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot n^2$$

$$C < 100 \Rightarrow C \neq 101, \text{ Если } C \neq 101, \text{ то } B = 101.$$

$$\text{Если } C \neq 11, \text{ то } B = 11 \Rightarrow B = 1111, \text{ но } B = 1000$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= y^3 + 2ay^2 + 256y + 16y^3 + 320y + 16 \cdot 256 - y^3 = 36y^3 + 576y + 16 \cdot 256 =$$

$$= 6^3 \cdot y^3 + 6 \cdot 24y + 4^3 \cdot 16^2 = 6^3 y^3 + 6^3 \cdot 4^2; 64 \cdot 6 \cdot 2 = 64 \cdot 12 =$$

$$= 640$$

$\Rightarrow$

$$x, y \in \mathbb{R}$$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \cdot \sin \pi y = (\cos 2\pi y + \cos 2\pi x) \cdot \cos \pi y$$

$$\pi x = \alpha, \pi y = \beta$$

$$(\sin \beta - \sin \alpha) \cdot \sin \beta = (\cos 2\beta + \cos 2\alpha) \cdot \cos \beta$$

$$\sin \beta - \sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\beta + \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \alpha}{2}, \quad \cos 2\beta + \cos 2\alpha = 2 \cdot \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\cos \beta = 0 \Rightarrow \sin \beta = \pm 1 \Rightarrow \sin \alpha = \pm 1$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2$$

$$\beta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k_1$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k_2$$

$$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\tan \beta = \frac{2 \cdot \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \alpha}{2}}{2 \cdot \sin \frac{\beta + \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \alpha}{2}}$$

$$\tan \beta = \tan \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \beta$$

$$2 \sin \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) = -\sin \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) + \sin \beta$$

$$\sin \beta = \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \beta = \alpha + 2\pi n$$

$$\beta = \pi - \alpha + 2\pi n, \Rightarrow \cos \beta =$$

$$= -\cos \alpha$$

$$\cos \beta \cdot (\cos \beta + \cos \alpha) =$$

$$\Rightarrow \sin \alpha$$

$$= 2 \cos$$

$$\text{polynomial}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \cos \beta = 0$$

$$\cos \beta = 0 \Rightarrow \cos \beta = 0$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} + \pi t,$$

$$t \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M_1 \Rightarrow \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n} = 1 \quad C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

$$P_2 = \frac{t}{n} \cdot \frac{t-1}{n} \Rightarrow \frac{11 \cdot 12}{n^2} = \frac{t(t-1)}{n^2}$$

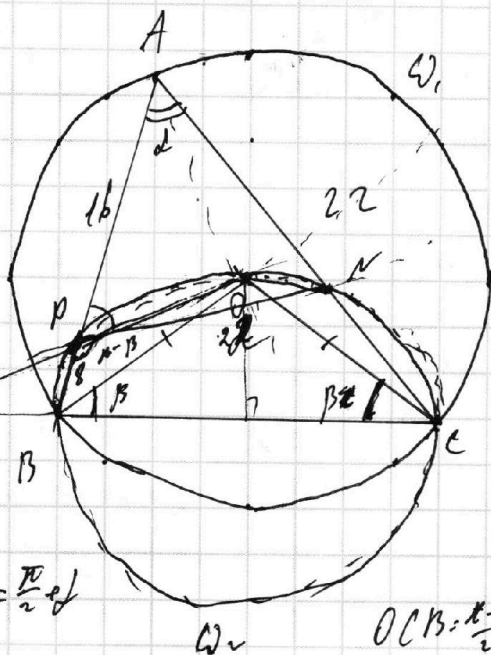
$$C_n^2 = \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{2}{n} \quad n = 1 + 11 \cdot 12$$

$$11 \cdot 12 = t^2 - t \Rightarrow t = 12$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 12 \\ \hline 32 \\ 192 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 242 \\ - 192 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$\frac{242}{20 \cdot 10} = \frac{81 \cdot 96}{20 \cdot 10}$$



$$16 \cdot 24 = 22 \cdot 11$$

$$\Rightarrow AN = \frac{16 \cdot 24}{22} = \frac{16 \cdot 12}{11}$$

$$\Rightarrow CN = 22 - \frac{192}{11} = \frac{50}{11}$$

$$\begin{cases} BC^2 = 2R^2 - 2 \cos 2\alpha \cdot R^2 \\ BC^2 = 22^2 + 24^2 - 2 \cos \alpha \cdot 22 \cdot 24 \\ R^2(2 - 2 \cos 2\alpha) = 22^2 + 24^2 - 2 \cos \alpha \cdot 22 \cdot 24 \\ \frac{BC}{\sin \alpha} = 2R, \quad 4R^2 \sin^2 \alpha = 22^2 + 24^2 - 2 \cos \alpha \cdot 22 \cdot 24 \end{cases}$$

$$4 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cos 2\alpha$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 24 \cdot \sin \alpha = \frac{22 \cdot 24 \cdot BC}{4 \cdot R}$$

$$\frac{16}{0} \cdot \frac{BT}{TC} \cdot \frac{192}{50} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{BT}{TC} = \frac{25}{192}$$

$$\begin{array}{r} 192 \\ \times 25 \\ \hline 4800 \end{array}$$

$$\cos\left(\frac{B}{2} - \frac{\alpha}{2} - \beta\right) + \cos\left(\frac{B}{2} - \frac{\alpha}{2} + \beta\right) = \cos\left(\frac{B}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$