



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

А делится на число $1111 = 101 \cdot 11$ (так. все цифры одинаковые)

значит $(ABC) \vdots 101$, а т.к. 101 простое и $ABC \rightarrow (ABC) \vdots 101^2$
 $(ABC) \vdots 11$ аналогично $(ABC) \vdots 11^2$

заметим, что А не может делиться на $(101)^2$ т.к. $101^2 = 10201$

$A < 10000 < 101^2$; C тоже не делится на 101 т.к. $101 > 100 > C$

значит $B \vdots 101 \rightarrow$ т.к. В имеет 7 6 записей $\rightarrow B = 707$

пусть А состоит только из цифр а, тогда $A = 101 \cdot 11 \cdot a$

значит $A \not\vdots 11^2$ ($a < 11$) $\Rightarrow C \vdots 11$ (т.к. В тоже $\not\vdots 11$)

т.к. C ~~не~~ $\vdots 11$ и имеет 1 6 записей $\rightarrow C = 11$

в таком случае число $ABC = a \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7$

оно делится на 1111 только 6 таким способом, если $a = 7$

$(7777; 707; 11)$ — ответ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} \text{ по условию} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} - \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

значит: $x-4 \neq 0; y+4 \neq 0$

домножим левую часть на xy , а правую на $(x-4)(y+4)$

$$y+x+3 ? (y+4)+(x-4)+3 = y+x+3$$

$$\text{т.к. } \text{бывало как рабы} \Rightarrow xy = (x-4)(y+4) = xy - 4y + 4x - 16$$

$$x-y=4 \Rightarrow x=y+4$$

$$\text{наайдём } M = (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y = 64$$

$$M = 64 - \text{ответ}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3a) \sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi y (\cos \pi x)$$

$$(\cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y) + (\cos \pi y \cos \pi x + \sin \pi x \sin \pi y) = 0$$

$$\cos 2\pi y + \cos(\pi y - \pi x) = 0$$

$$\begin{cases} 2\pi y = \pi y - \pi x + \pi + 2\pi k \\ 2\pi y = \pi x - \pi y + \pi + 2\pi n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y = -x + 1 + 2k \\ y = x + 1 + 2n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y = -x + 1 + 2k \\ y = \frac{x+1+2n}{3} \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

$$38) \arccos \frac{x}{7} \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$\arcsin \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{это значит, что } \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{минимум достигается при } \arccos \frac{x}{7} = 0 \Rightarrow \frac{x}{7} = 1 \Rightarrow x = 7$$

$$\arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow y = 4$$

тогда $(7, 4)$ подходит для $x = 7 + 2k + 2n$

$$\text{т.к. } \frac{x}{7} \in [-1; 1] \Rightarrow x \in [-7; 7]$$

$$\frac{y}{4} \in [-1; 1] \Rightarrow y \in [-4; 4]$$

находим все пары, которые подходят под условия уравнения из пункта а):



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

35)

допустим, что x - нечётное, тогда

~~тогда y~~

$-x+1+2k$ - чётное и $x+1+2n$ - чётное

(так как x нечётное, то и $\frac{x+1+2n}{3}$ - чётное)

значит при неч. $x \rightarrow$ чёт. y

при чётных x :

$-x+1+2k$ - нечётное и $x+1+2n$ - нечётное

(тогда при чётных y $\frac{x+1+2n}{3}$ - нечётное)

при чётных $x \rightarrow$ нечётные y

~~рассмотрим чётные x и нечётные y и их отсутствие:~~

для каждого нечётного x существует 5 возможных $y \in [-4; 4]$

для каждого чётного x - 4 возможных $y \in [-4; 4]$

нечёт $x \in [-7; 7] - 8$ штук $\Rightarrow 8 \cdot 5 = 40$ возможных пар

чёт $x \in [-7; 7] - 7$ штук $\Rightarrow 7 \cdot 4 = 28$ возможных пар

также одна из этих пар не подходит 6 пар нечетных \Rightarrow

\Rightarrow всего возможных пар 67



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

и) пусть всего работало x , а дополнительных билетов к

тогда вероятность выиграть было равна: $\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$

после информации о новых билетах: $\frac{4+k}{x} \cdot \frac{3+k}{x-1}$

(при условии, что x хотя бы $k+1$)

так как билетов не могло стать больше людей значит это
всегда было выполнено:

$$11 \left(\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} \right) = \frac{4+k}{x} \cdot \frac{3+k}{x-1}$$

домножим на $x(x-1)$:

$$11 \cdot 4 \cdot 3 = (4+k)(3+k)$$

$(4+k)(3+k)$ - это ~~якобы~~ натуральных последовательных числа

единственное возможное представление:

$$\begin{cases} 3+k = 11 \\ 4+k = 12 \end{cases} \Rightarrow k = 8$$

Всего билетов: $12 - \text{ ответ}$

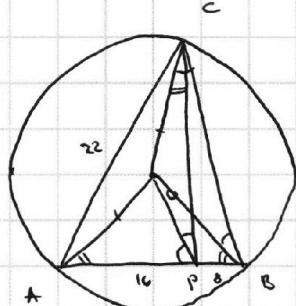
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5)



$$AB = 24$$

предположим $CP = OC = OA = OB = OP$

$\angle OCB = \angle OBC$ (т.к. O - центр описанной)

$$OA = OB = OC$$

$\angle OBC = \angle OPC$ (т.к. симметричны относительно вертикальной оси)

$\angle OCB = \angle OPA$ (по свойству описанного четырехугольника)

$\angle OCP = \angle OBP$ (одна сторона)

$\angle OBA = \angle OAB$ (т.к. O - центр описанной)

из всех равенств следует, что $\angle OAP = \angle OCP \Rightarrow \angle AOP = \angle COP$
 $\angle APO = \angle CPO$

значит тупоглавый угол $\triangle AOP = \triangle COP \Rightarrow CP = AP = 16$

запишем для cos гармонии:

$$CP^2 = AP^2 + AC^2 - 2APAC \cdot \cos \angle CAB$$

$$16^2 = 16^2 + 22^2 - 32 \cdot \cos \angle CAB \Rightarrow \cos \angle CAB = \frac{11}{16}$$

для cos гармонии ABC:

$$CB^2 = 24^2 + 22^2 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cdot \cos \angle CAB =$$

$$\text{находим } \sin \angle CAB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle CAB} = \sqrt{\frac{256 - 121}{256}} = \frac{\sqrt{135}}{16}$$

$$\frac{\sin \angle CAB \cdot AC \cdot AB}{2} = \frac{\sqrt{135} \cdot 22 \cdot 24}{32} = \frac{\sqrt{135} \cdot 11 \cdot 3}{2} = \frac{33}{2} \sqrt{135}$$

ответ



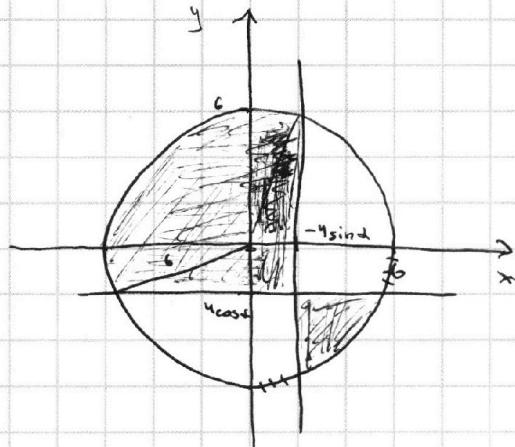
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

6) нарисуем эту фигуру:



заметим, что периметр
принадлежащий окружности **состоит**
из двух полукругов. её длина

это можно видеть если перенести
части двух полукругов

он равен полубоке длины окружности:

$$\pi r + \pi \cdot 6$$

необходимо максимизировать длину хорды:

$$2 \left(\sqrt{36 - 16\cos^2 \alpha} \right) + 2 \left(\sqrt{36 - 16\sin^2 \alpha} \right) - \max$$

максимальная длина достигается только при $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$ т.к.

точка симметрия относительно них

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{точка симметрии: } 6\pi + 4\sqrt{36 - 8} = 6\pi + 4\sqrt{28}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

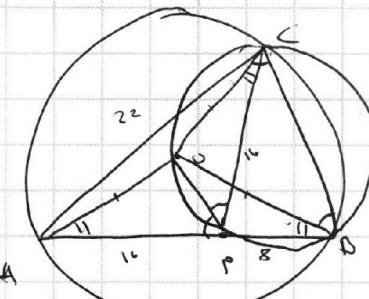
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается чёрновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

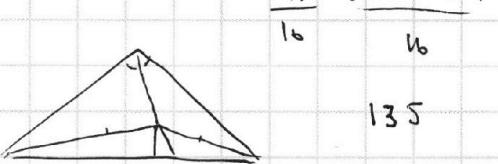


$$16^2 = 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 22 \cdot \cos \alpha$$

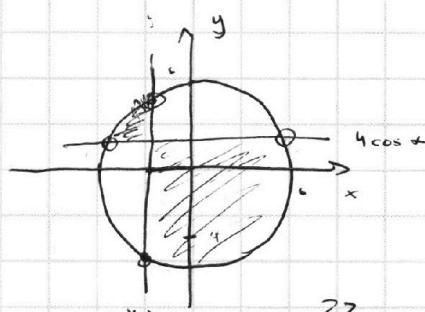
$$\cos \alpha = \frac{22}{32} = \frac{11}{16}$$

$$2 \cdot 16 \cdot 22$$

$$1 = 4+3-\cancel{4} \cdot \cancel{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

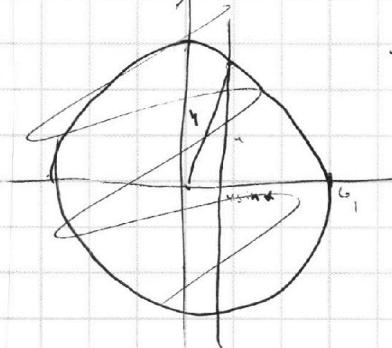


$$135$$



$$\begin{array}{r} 22 \\ 33 \\ \hline 66 \\ 66 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$16 \times 8 = 24$$



$$\begin{array}{r} 22 \\ 22 \\ \hline 44 \\ \frac{44}{484} \\ 24^2 + 22^2 - 3 \cdot 22 \cdot 11 \end{array}$$



$$726$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 24 \\ 24 \\ \hline 36 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ 22 \\ \hline 66 \\ 66 \\ \hline 726 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ -726 \\ \hline 576 \\ 150 \end{array}$$

$$256$$

$$\begin{array}{r} 9 \cdot 16 \\ -18 \\ \hline \end{array}$$

$$24^2 + 22^2 - 2 \cdot \frac{11}{16} \cdot 22 \cdot 24 = 334$$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 11 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ 22 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 576 \\ 484 \\ \hline 1060 \\ 726 \\ \hline 334 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 716 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

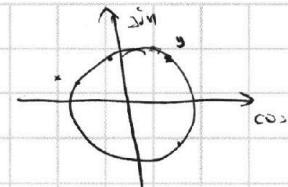
СТРАНИЦА
ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$



A: 1111



$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

101 · 11

B = 207

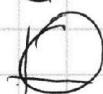
C = 11



$\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{3}$

.....

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos x \cdot \cos y$$



$$0 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot$$

15 $\frac{\pi}{4}$

$$\cos x - \cos y = 2 \cdot \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin x \cdot \cos y$$

$$\sin x + \sin(-y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos$$

y = v

$$\left(\frac{4}{x} + \frac{3}{x-1} \right) \cdot 11 = \frac{4+k}{x} \cdot \frac{3+k}{x-1}$$

$$2 \cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\pi \frac{x-y}{2}\right)$$

$$44 \cdot 3 = (4+k)(3+k)$$

132

11 · 12 k = 8

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{xy+4x-4y-16}$$

$$xy = \underbrace{xy + 4x - 4y - 16}_0$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{3}{y} + 1\right)$$

x+y=0

x-y=4

$$x = y+4 \quad y^2 + 12y^2 + 48y + 64$$

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

$$k = (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y = 64$$

$\cos(x-y)$

$$\sin^2 y = \overbrace{\sin x \sin y + \cos x \cos y}^{\cos(x-y)} + \cos^2 y$$

$$\cos(x-y) + \cos 2y = 0$$

$$1 - y =$$

$$\cos^2 y - \sin^2 y = \cos 2y$$

$$2 \cos^2 y - 1 = \cos 2y$$