



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111 \cdot x, \text{ где } x \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

B, C .

$$ABC = S^2$$

Т.к. $1111 = 101 \cdot 11$, то $S^2 : 101$, т.к. $S^2 : A$, $A = 101 \cdot 11 \cdot x$.
 101 простое, а B, C означает разность делится ≥ 2 степени
 в произведении ABC .

- 1) $\frac{A}{101} = 11x \nmid 101$, т.к. 101 - простое, а $1 \leq x \leq 9$
- 2) $C \nmid 101$, т.к. C по условию двузнач.
- 3) Имеем $B : 101$. Но т.к. по условию в записи B есть ≥ 1 единица, то $B = 101$.
- 4) $\Rightarrow S^2 = 101 \cdot 11 \cdot x \cdot 101 \cdot C = 101^2 \cdot 11x \cdot C$

Заметим, что 11 тоже простое и тоже разность делится ≥ 2 степени $\Rightarrow x \cdot C : 11$, но $1 \leq x \leq 9 \Rightarrow$
 $\Rightarrow C : 11$ и по условию в записи C есть $5 \Rightarrow C = 55$
 и C - двузнач.

$$\begin{array}{l} A = 101 \cdot 11 \cdot x \\ B = 101 \\ C = 55 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow S^2 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5 \cdot x \\ x : 5, \text{ а т.к. } 1 \leq x \leq 9 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow A = 5555 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Чтобы выполн.,} \\ \end{array}$$

Ответ: $(A, B, C) = (5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y > 0.$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}, \quad x \neq 3, y \neq -3$$

$$y \frac{x+y+1}{xy} = \frac{(y+3)+(x-3)+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad \text{т.к. } x, y > 0, \text{ то } x+y+1 > 0, \text{ значит можно сократить}$$

Тогда: $xy = (x-3)(y+3)$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9 \Rightarrow 3x - 3y - 9 = 0$$
$$x - y - 3 = 0$$
$$x - y = 3$$

Возврем в куб: $27 = (x-y)^3$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y) =$$
$$= x^3 - y^3 - 9xy = M.$$

Тогда искомое значение $M = 27$. Покажем, что оно достигнуто:

$$x=4; y=1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$M = 64 - 1 - 36 = \underline{27}$$

Ответ: $M = 27$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \frac{2}{3}\pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \sin \pi y \sin \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi x - \pi y) + \cos(2\pi x) = 0$$

$$2 \cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$

$$① 0 = \cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} \Rightarrow \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3\pi x - \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x - y = 1 + 2k$$

$$y = 3x + (2n+1), n \in \mathbb{Z}$$

$$② \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x + \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = -x + (2k+1), k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } a) (x, y) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x + (2n+1) \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} ; \begin{pmatrix} x \\ -x + (2n+1) \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$b) 1) \left| \frac{x}{4} \right| \leq 1 ; \left| \frac{y}{9} \right| \leq 1. \text{ Так как } \cos \text{ может быть по модулю } \leq 1$$

Заметим, что $\arccos a \in [0; \pi]$, а значит пер-во не выполняется только если $\arccos \frac{x}{4} = \pi$ и $\arccos \frac{y}{9} = \pi$

$$\text{Это значит, что } \frac{x}{4} = -1 \text{ и } \frac{y}{9} = -1 \Rightarrow x = -4 \text{ и } y = -9$$

Такая пара не подходит. Посчитаем кол-во кор-нящих:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. $\left|\frac{x}{4}\right| \leq 1$ и $\left|\frac{y}{9}\right| \leq 1 \Rightarrow x \in \{-4; -3; -2; \dots; 4\}$
и $x, y \in \mathbb{Z}$ $y \in \{-9; -8; \dots; 8; 9\}$

Также мы знаем, что $y = 3x + (2k+1), k \in \mathbb{Z}$ или
 $y = -x + (2n+1), n \in \mathbb{Z}$. Т.к. знаем, что x и y целые, в
общем виде можно оставить как: $y = 3x + (2k+1), k \in \mathbb{Z}$
(если $n = 2x + k$, то получ. вариант y)

1) Если $x = -4$, то $y \in \{-9; -7; -5; \dots; 7; 9\}$ но $(x, y) = (-4, -9)$
не подходит
2) Если $x = -3$, то $y \in \{-6; -4; -2; \dots; 6; 8\}$ но все можно проверить

Заметим, что тогда x и y разной четности:

- 1) x - чет $\Rightarrow 3x$ - чет $\Rightarrow 3x + (2k+1)$ - чет $\Rightarrow y$ - чет
- 2) x - чет $\Rightarrow 3x$ - чет $\Rightarrow 3x + (2k+1)$ - чет $\Rightarrow y$ - чет.

И при этом для любых (x, y) можно подобрать такое
 k , т.к.: $k = \frac{y - 3x - 1}{2} = \frac{\text{чет}}{2} \in \mathbb{Z}$.

А значит 1) если x - четное (5 вар.) $\Rightarrow y$ - чет (10 вар.)

2) если x - нечетное (4 вар.) $\Rightarrow y$ - чет (9 вар.)

А значит всего пар $50 + 36 - 1 = 85$ (т.к. $(x, y) = (-4, -9)$
не пар.)

Ответ: 85 пар



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что всевозм. распределение билетов равновер.

Пусть всего оформл. $x \Rightarrow$ всевозм. распредел. билетов C_x^4 .

4 варианта, где Петя и Вова вместе C_{x-2}^2 (т.к. 2 билета

уже распредел.) $\Rightarrow p_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{\frac{(x-2)!}{2! \cdot (x-4)!}}{\frac{x!}{4! \cdot (x-4)!}} = \frac{12}{x(x-1)}$

Пусть билетов стало $4+l$, $l \geq 1$, $l \in \mathbb{Z}$, тогда:

$$p_2 = \frac{C_{x+l-2}^2}{C_{x+l}^4} = \frac{\frac{(x+l-2)!}{2! \cdot (x+l-4)!}}{\frac{(x+l)!}{4! \cdot (x+l-4)!}} = \frac{(3+l)(4+l)}{x(x-1)}$$

По условию: $3,5 p_1 = p_2$

$$\frac{42}{x(x-1)} = \frac{(3+l)(4+l)}{x(x-1)}$$

$$\frac{42}{x(x-1)} = \frac{(3+l)(4+l)}{x(x-1)}$$

, т.к. $x \geq 2$ (вероятность Петя и Вова):

$$42 = (3+l)(4+l)$$

$$12 + 4l + l^2 = 42 \Rightarrow l^2 + 4l - 30 = 0$$

$$(l+10)(l-3) = 0$$

Т.к. $l \geq 1$, то $l = 3$.

А значит билетов в итоге стало $4+3=7$

Ответ: 7 билетов

Orbet: $S_{ABC} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2\cos\alpha \geq 0 \\ y-2\sin\alpha \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-2\cos\alpha \leq 0 \\ y-2\sin\alpha \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Построим график:

на нем условно обозначим 2 прямые a и b .

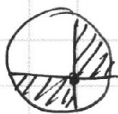
$$a = 2\cos\alpha$$

$$b = 2\sin\alpha$$

$|2\sin\alpha| < 3$
 $|2\cos\alpha| < 3$ $\Rightarrow$ прямые a, b общ. пересекают окр-ть в 2 точках

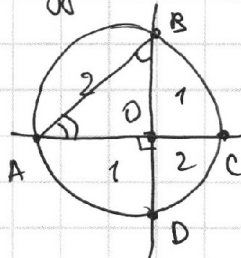
Тогда пересечения являются областями (и соседние), на которые эти прямые разбивают круг.

Уверенные, что



Периметры этих фигур

одинаковы, тогда рассмотрим прямые относительно осей и будет иметь значение.



Периметр 1 фигуры = $BO + OC + AO + OD + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}$

П. 2 фигуры = $BO + AO + \alpha + OD + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}$

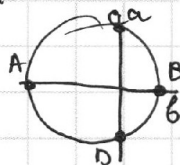
α — дуга между точками A и D

Достаточно показать, что $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}$

Но, т.к. $\angle AOD = 90^\circ \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} = \frac{L}{2}$, где L — длина окр-ты.

Аналогично $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = \frac{L}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = \pi R$, где R — радиус окр-ты.

Тогда, чтобы найти max зн. M из условия, надо отнестись к $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}$ — максимальное.



(a — прямая $x = 2\cos\alpha$)
(b — прямая $y = 2\sin\alpha$)



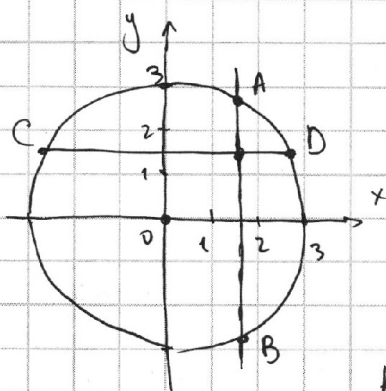
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Получаем длину равных отрезков AB:
(где $\alpha = \text{const}$)
 $x = 2 \cos \alpha \Rightarrow$ в точках пересек. AB и окр-ти.

$$4 \cos^2 \alpha + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 9 - 4 \sin^2 \alpha + 5$$

Тогда коорд. точек A и B по оси Oy:

$$\sqrt{4 \sin^2 \alpha + 5} \quad \text{и} \quad -\sqrt{4 \sin^2 \alpha + 5}$$

А значит $AB = 2\sqrt{4 \sin^2 \alpha + 5}$ (т.к. по Ox отрезок коорд.)

Аналогично получаем CD (где тоже же α)

$$CD = 2\sqrt{4 \cos^2 \alpha + 5} = 2\sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$

Тогда $AB + CD = 2\sqrt{4 \sin^2 \alpha + 5} + 2\sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$

Это будет max $\Leftrightarrow$ когда max будет $(AB + CD)^2$

$$(AB + CD)^2 = 4(4 \sin^2 \alpha + 5) + 4(9 - 4 \sin^2 \alpha) + 4\sqrt{(4 \sin^2 \alpha + 5)(9 - 4 \sin^2 \alpha)} =$$

$$= 4 \cdot 56 + 4\sqrt{(4 \sin^2 \alpha + 5)(9 - 4 \sin^2 \alpha)}$$

А значит зная про корни равносильно найти max, вера остальные вообще.

Пусть $4 \sin^2 \alpha + 5 = t \Rightarrow 9 - 4 \sin^2 \alpha = 14 - t$

max $t(14 - t) = ?$

$$t(14 - t) = (7 + x)(7 - x) = 49 - x^2 \Rightarrow \text{чтобы было max зн., } x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 7 \Rightarrow 4 \sin^2 \alpha + 5 = 7 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

Получаем тогда M: $AB + BC = \pi R = 3\pi$ (т.к. радиус = 3)

$$AB + CD = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7} \Rightarrow M = 4\sqrt{7} + 3\pi$$

Ответ: $M = 4\sqrt{7} + 3\pi$; $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$

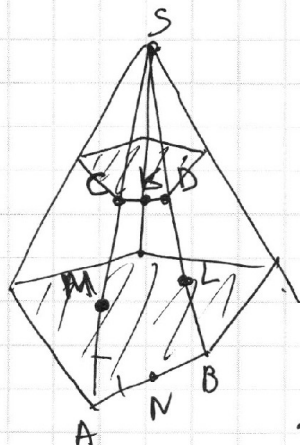


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Заметим, что если ω касается всех граней усеч. пирамиды, то и обратный тоже, а значит ω - впис в прав. пирамиду шар.

2) Пусть Ω касается ребер AC, CD, DB, AB в M, K, L, N соотв. $\Rightarrow$ в касательные равны и $AN = AM, NB = BL, LD = DK, CK = CM$.

3) По т.к. усеч. пирамида прав., то $AC = DB \Rightarrow \Rightarrow AN + CK = BN + DK$ и при этом $\frac{CK}{AN} = \frac{DK}{NB}$, значит N и K - середины AB и CD - соотв.

4) Тогда ABDC - равнобокая трапеция, в которую можно вписать окр-ть (т.к. $CD + AB = AC + BD$)

$$CK + KD + AN + NB = (CM + MA) + (DL + LB)$$

5) Центр ω лежит на высоте из S на основание ω касается основание в точке основание высоты.

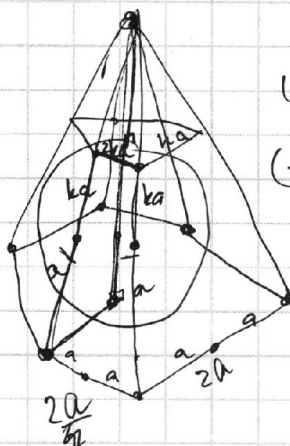
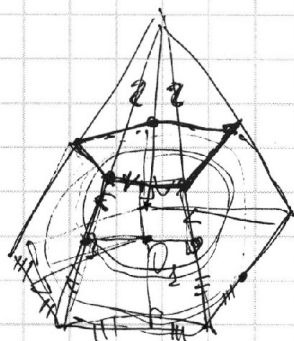


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$l=3$$

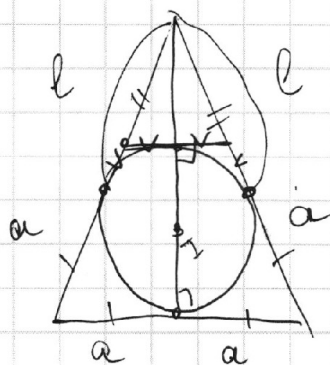
$$\frac{42}{(x-2)(x-3)} = \frac{42}{(x-5)(x-6)}$$

$$(x-2)(x-3) = (x-5)(x-6)$$

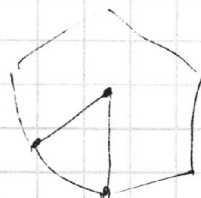
$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 11x + 30$$

$$6x = 24$$

$$x = 4$$



$$p = l + 2a$$

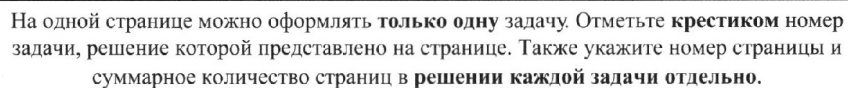


нч 4 варианта : $p_1 = \frac{c^2}{c^4}$; $p_2 = \frac{c^{2+l}}{c^{4+l}}$

$$\frac{35 \cdot c^2}{c^4} = \frac{c^{2+l}}{c^{4+l}}$$

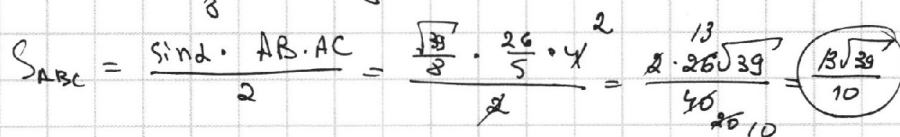
$$p_1 = \frac{c^2}{c^4} = \frac{(x-2)(x-3) - 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot x(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$p_2 = \frac{(x-2)! \cdot (4+l)! \cdot (x-4-l)!}{(2+l)! \cdot (x-2-l)! \cdot x!} = \frac{12}{x(x-1)}$$
$$= \frac{(3+l)(4+l)}{x(x-1)}$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!**



SABC
DL = $\frac{16}{5}$

$$\begin{array}{r} 64 \\ - 26 \\ \hline 39 \end{array}$$

$$\frac{16}{5} + \frac{10}{5} = \frac{26}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

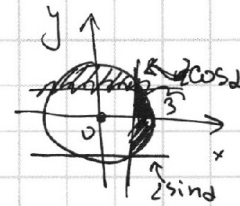
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

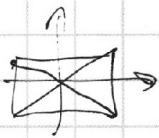
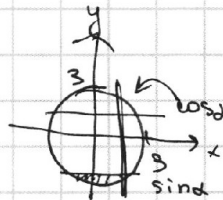
$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$$

①

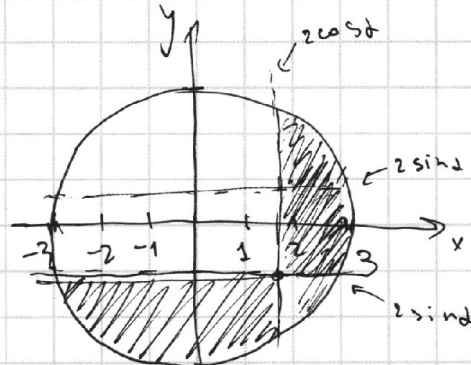
$$\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$$



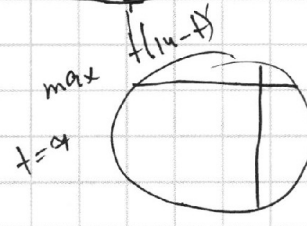
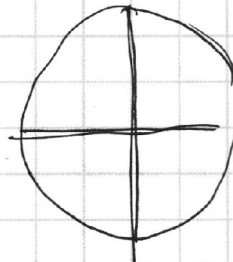
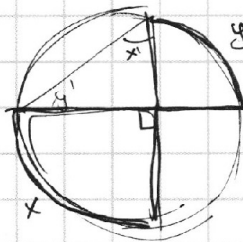
$$\begin{cases} x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$$



Полн. не 3 реб.
(всч. амплот.)

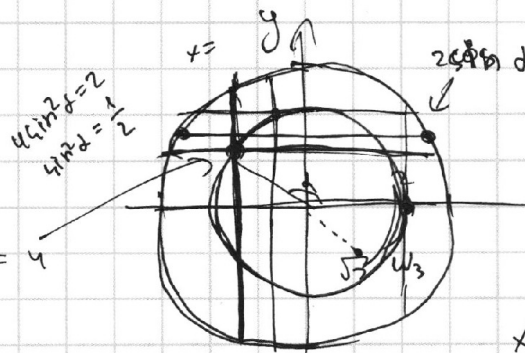
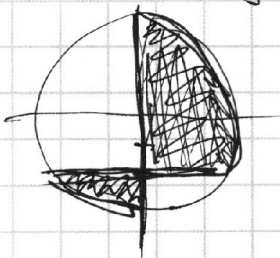


$2\pi R$



$$\vec{x} + \vec{y} = 90^\circ \Rightarrow x+y = \pi R = 3\pi$$

$$\begin{aligned} 2\cos\alpha &= 0 \\ 2\sin\alpha &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y &= 2\sin\alpha \\ x &= 2\cos\alpha \end{aligned}$$

$$x = 2\cos\alpha$$

$$4\cos^2\alpha + y^2 = 9$$

$$y^2 = 4\sin^2\alpha + 5$$

$$y = 2\sin\alpha$$

$$x^2 = 4\cos^2\alpha + 5$$

$$4\sin^2\alpha + x^2 = 9$$

$$x^2 = 9 - 4\sin^2\alpha$$

$$4\sin^2\alpha + 5 = 4$$

$$l_1 = (2\cos\alpha; \sqrt{4\sin^2\alpha + 5}); (2\cos\alpha; -\sqrt{4\sin^2\alpha + 5})$$

$$l_2 = 2\sqrt{4\sin^2\alpha + 5} \rightarrow t = 2\sqrt{4}$$

$$l_2 = 2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} = 2\sqrt{4-t}$$

$$\max(l_1 + l_2) = \max(l_1 + l_2) = 4(4\sin^2\alpha + 5) + 4(9 - 4\sin^2\alpha) +$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \sin \pi y \sin \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi x - \pi y) + \cos 2\pi x = 0$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \cos \left(\frac{3}{2} \pi x - \frac{\pi}{2} y \right) \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$

$$\cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3\pi x - \pi y = \pi + 2\pi k$$

$$3x - y = 1 + 2k \Rightarrow y = 3x + (1 + 2k), k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 3x + (2k + 1), k \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x + \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = -x + (2k + 1), k \in \mathbb{Z}$$

$$2\pi x = \pi - \pi x + \pi y + 2\pi k$$

$$2x = 1 - x + y + 2k$$

$$y = 3x$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{3x + (2k + 1)}{9} < 2\pi$$

одн. арг. arccos



$$\text{нет, надо: } \arccos \frac{x}{4} = \pi$$

$$\arccos \frac{y}{9} = \pi$$

$$\frac{\pi x - \pi y + 2\pi x}{2} = \frac{3}{2} \pi x - \frac{\pi}{2} y$$

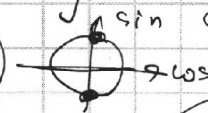
$$\pi x \neq \pi y$$

$$\frac{y}{9} = \cos \pi$$

$$\frac{y}{9} = -1$$

$$2\pi x - \pi x + \pi y = \pi x + \pi y$$

отсюда что-то тангенс зм?



$$x = 1, \left| \frac{x}{4} \right| < 1$$

$$\left| \frac{y}{9} \right| < 1$$

$$y = 3x - 1 - 2k$$

$$2k + 1 = -1 - 2k$$

$$2k + 2 = -2k$$

$$k_1 = -k - 1$$

$$x_0, y_1 = 3x_0 + 2k_1 + 1$$

$$y_2 = -x_0 + 2k_2 + 1$$

$$3x_0 + 2k_1 = -x_0 + 2k_2$$

$$4x_0 = 2(k_2 - k_1) \Rightarrow k_2 - k_1 = 2x_0$$

$$y = 3x + (2k + 1), k \in \mathbb{Z}$$

возм.

→

$$k_2 = 2x_0 + k_1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

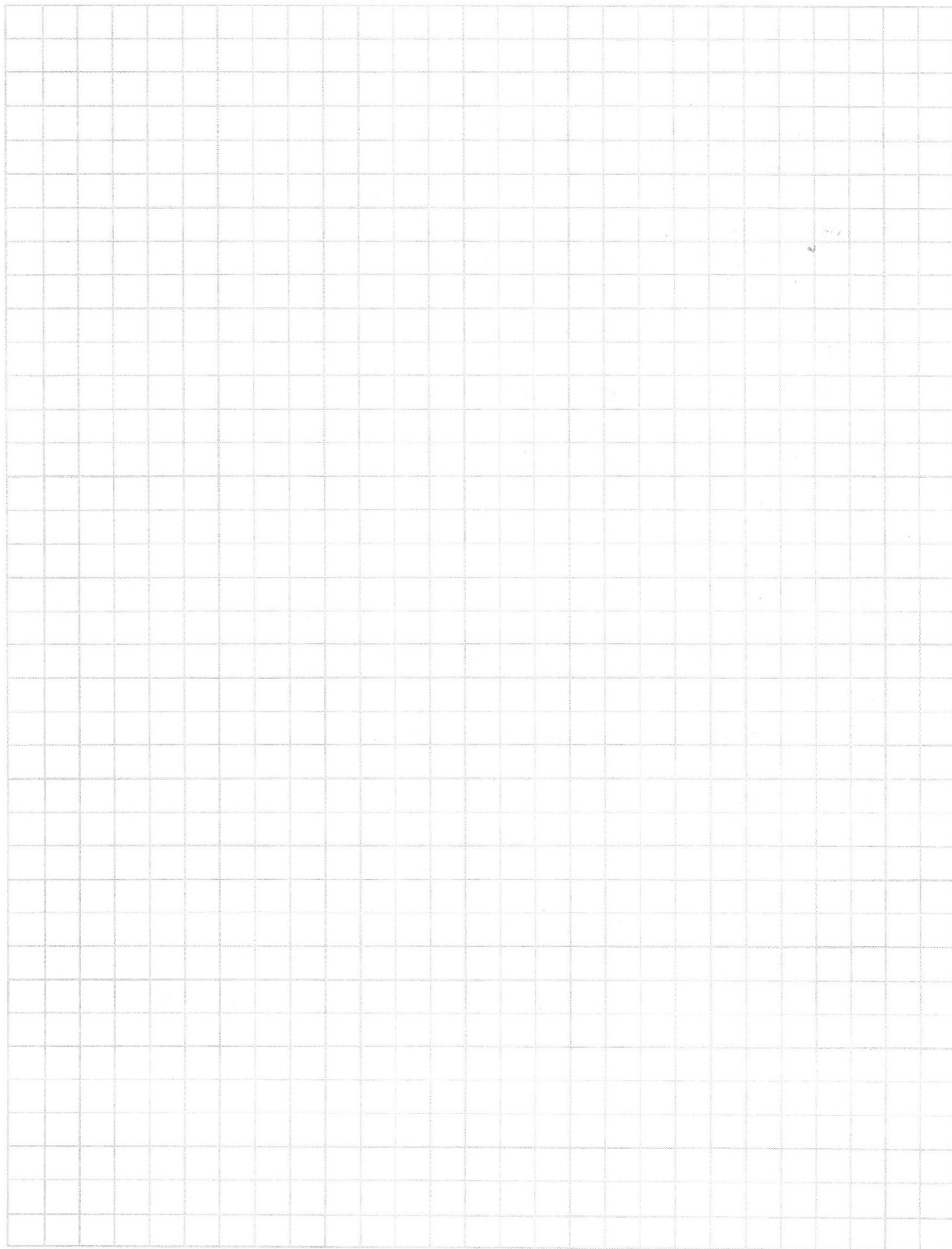
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P_1 = \frac{C_x^2}{C_x^4}$$

$$P_2 = \frac{C_x^{2+e}}{C_x^{4+e}}$$

Диплом 4+e; $e \geq 1$

$$\frac{3,5 \cdot C_x^2}{C_x^4} = \frac{C_x^{2+e}}{C_x^{4+e}}$$

$$3,5 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)}{2 \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)} = \frac{x! \cdot (x-4-e)! \cdot (4+e)!}{(2+e)! \cdot (x-2-e)! \cdot x!}$$

$$\frac{3,5 \cdot 324}{(x-2)(x-3)} = \frac{(l+3)(l+4)}{(x-2-e)(x-3-e)}$$

$$14 \cdot 3 = 42$$

$$\frac{42}{(x-2)(x-3)} = \frac{(l+3)(l+4)}{(x-2-e)(x-3-e)}$$

$$42(x-2-e)(x-3-e) = (x-2)(x-3)(l+3)(l+4)$$

$$42(x^2 - 3x - xl - 2x + 6 + 2l - lx + 3l + l^2) = (x^2 - 5x + 6)(l^2 + 7l + 12)$$

$$42(x^2 - 5x - 2lx + 6 + 5l + l^2) = x^2(l^2 + 7l + 12) - 5x(l^2 + 7l + 12) + 6(l^2 + 7l + 12)$$

$$\textcircled{1} l=3: \frac{42}{(x-2)(x-3)} = \frac{4 \cdot 5}{(x-3)(x-4)} = \frac{20}{x-4}$$

$$42(4-x) = 20(x-2)$$

$$21-6=15$$

$$\frac{42}{210}$$

$$\frac{95}{84} - \frac{84}{571} - \frac{84}{35} = \frac{4}{9}$$

$$60-210 = -150$$

0

$$x^2(l^2 + 7l - 30) - x(5(l^2 + 7l + 12) - 42(5 + 2l)) + 6(l^2 + 7l + 12) - 42(6 + 5l + l^2)$$

$$x^2(l^2 + 7l - 30) - x(5l^2 - 49l - 150)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \frac{(t-1)(t)}{(x-t+1)(x-t+2)} = 3,5 \cdot \frac{12}{(x-3)(x-2)} = \frac{42}{(x-3)(x-2)}$$

$$\begin{array}{r} \times 35 \\ 12 \\ \hline 70 \\ 35 \\ \hline 420 \end{array}$$

$$\frac{t(t-1)}{(x-t+1)(x-t+2)} = \frac{42}{(x-3)(x-2)}$$

Случ. 1!



$$t(t-1)(x-3)(x-2) = 42(x-t+1)(x-t+2)$$

$$(t^2 - t)(x^2 - 5x + 6) = 42(x^2 - \underline{x}t + 2x - \underline{x}t + t^2 - 2t + x - t + 2)$$

$$(t^2 x^2 - t^2 5x + 6t^2 - tx^2 + 5xt - 6t) = 42(x^2 - 2xt + t^2 + 3x - 3t + 2)$$

$$\cancel{t^2 x^2} - \cancel{t^2 5x} + \cancel{6t^2} - \cancel{tx^2} + 5xt - 6t = 42x^2 - 84xt + 42t^2 + 126x - 126t + 84$$

$$-42(x^2 + 3x + 2) = 0$$

$$t^2(x^2 - 5x - 36) + t(-x^2 + 89x + 120) - 42(x^2 + 3x + 2) = 0$$

$$t = 0:$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ -25 \\ \hline 38 \end{array}$$

$$\frac{6 \cdot 5}{(x-5)(x-4)} = \frac{42}{(x-3)(x-2)} \Leftrightarrow \frac{5}{(x-5)(x-4)} = \frac{7}{(x-3)(x-2)}$$

$$5(x^2 - 5x + 6) = 7(x^2 - 9x + 20)$$

$$5x^2 - 25x + 30 = 7x^2 - 63x + 140$$

$$2x^2 - 38x + 110 = 0$$

$$-1(x-3)(x-2)$$

$$t = 4 + e$$

$$x \geq 4$$

4 страница

$$\frac{(4+e)(3+e)}{(x-3)(x-2)}$$

$$-1(2x-5) + e^2 = \frac{42}{(x-3)(x-2)}$$

$$\frac{(4+e)(3+e)}{(x-3-e)(x-2-e)} = \frac{42}{(x-3)(x-2)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A, B, C

$$A = \overline{xxxx} = 1111 \cdot x$$

$$B = \overline{nmk} \quad (2)$$

$$C = \overline{tp} \quad (5)$$

$$ABC = M^2$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 11 \\ \hline 1111 \\ 1010 \\ \hline 111101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ - 34 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$25 + 39 = 64$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{)11} \\ - 11 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow A = 11 \cdot 101 \cdot x \quad ; \quad 101 - \text{простое}$$

$$B \neq 101, \text{ т.к. } 1, 10:$$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot x; B = 101; C = 55$$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot x$$

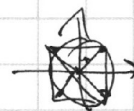
$$B = 101$$

$$C = 55$$

$$\times 11 \Rightarrow C : 11 \Rightarrow C = 55$$

$$\Rightarrow ABC = 11x \cdot 101^2 \cdot 11 \cdot 5 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot x \cdot 5 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 5555, B = 101, C = 55$$



$$x, y > 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$y \neq 0$$

$$y \neq -3$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = ?$$

$$x = 4$$

$$y = 1$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{(y+3)+(x-3)+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$① \quad x+y+1=0 \Rightarrow x+y=-1 \Rightarrow \text{не подходит, т.к. } x, y > 0$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = (-y-1)^3 - y^3 + 9(y+1)y =$$

$$② \quad xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9 \Rightarrow 3x - 3y - 9 = 0$$

$$x - y - 3 = 0 \Rightarrow x - y = 3 \Rightarrow x = y + 3$$

$$28 = (x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = x^3 - y^3 - 9xy$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin \rightarrow \cos$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \sin(90^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ - \beta) = 2 \sin(90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}) \cos(\frac{\beta - \alpha}{2}) =$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\textcircled{1} \sin \pi x = 0 \rightarrow \cos \pi x + \cos \pi y = 0 \Rightarrow \cos \pi y = -1 ; y = 4 + 2\mathbb{Z}$$

$x \in \mathbb{Z} \quad x = 2$ " $\frac{3}{2}$

$$\textcircled{2} \left(2 \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \right) \sin \pi x = \left(2 \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \right) \cos \pi x$$

$$\cancel{\sin \pi x} = \cancel{\sin \pi y}$$

$$\lg \pi x = \lg \frac{\pi(x-2)}{2} = \lg \frac{1}{2} \frac{\pi(x-2)}{2}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ - \ominus - \ominus - \\ \quad \quad \quad \times \end{array}$$

2 sin

n, B , Огномн. x

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4 Sum :

74 Sum : $\mu y \mu m b + 74 ; t \in \mathbb{Z}$

Всего распер: C_x^t

Вар., где все: C_{x-2}^{t-2}

~~Всего распер.~~
~~Вар., где все:~~ C_x^4

Вар., где все вместе:

$$C_x^2$$

$$P_2 = \frac{C_{x-2}^{t-2}}{C_x^t} = \frac{\frac{x!}{(x-t+2)!(t-2)!}}{\frac{x!}{(x-t)!t!}} = \frac{(x-t)!t!}{(x-t+2)!(t-2)!}$$

$$P_1 = \frac{C_x^2}{C_x^4} = \frac{\frac{x!}{(x-2)!2!}}{\frac{x!}{4!(x-4)!}} = \frac{(x-4)!}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{12}{(x-3)(x-2)}$$