



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① П.к. A - четырехзначное ^{число}, составленное из одинаковых цифр, т.е. A можно записать как $A = 1111x$, где x - какое-то однозначное ненулевое число
 $A = 1111x = 101 \cdot 11x$.

Заметим, что 101 - простое $\Rightarrow$ какое-то из чисел B и C делится на 101 , иначе их произведение не будет точным квадратом.

$C \nmid 101$, т.к. $C \leq 100$ и $C > 0 \Rightarrow B : 101$. Единственное трехзначное число, которое кратно 101 и содержит в себе цифру 7 , это число 707 . Значит $B = 707$.

Заметим, что $1111x \nmid 11$, т.к. $1111x \nmid 11$ и $x \nmid 11$, т.к. $x < 10$, $x > 0$.
 $707 \nmid 11 \Rightarrow$ т.к. $A : 11$, а произведение $A \cdot B \cdot C$ - точный квадрат, т.е. $C : 11$. Единственное ~~число~~ двузначное число, которое кратно 11 и содержит хотя бы одну цифру 1 , это число $11 \Rightarrow C = 11$.

$A \cdot B \cdot C = 1111x \cdot 707 \cdot 11 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7x$. П.к. $A \cdot B \cdot C$ - точный квадрат, т.е. $7x$ - точный квадрат $\Rightarrow x : 7$. Единственное однозначное ненулевое число, кратное 7 это 7 . Значит $A = 7777$.

Ответ: $A = 7777$, $B = 707$, $C = 11$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{По условию } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{(y+4) + (x-4) + 3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{(x+y+3)}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{(x+y+3)((x-4)(y+4) - xy)}{xy(x-4)(y+4)} = 0$$

$$\begin{cases} x+y+3=0 \\ xy-4y+4x-16=xy \end{cases} \begin{cases} y=-3-x \\ x-y-4=0 \end{cases} \begin{cases} y=-x-3 \quad (1) \\ y=x-4 \quad (2) \end{cases}$$

Случай (1) невозможен, т.к. $x, y > 0 \Rightarrow x+y+3 > 3$ и $x+y+3 \neq 0$

Подставим $y=x-4$ в М

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 4^2 = 64$$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\delta) \arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{ограничения } -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq y \leq 4$$

$$\text{Заметим, что } 0 \leq \arccos \frac{x}{4} \leq \pi \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \\ -\frac{\pi}{2} \leq -\arcsin \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}. \text{ Значит наше } \\ \text{нер-во неверно, только при } \arccos \frac{x}{4} = 0, \\ \arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2} \text{ т.е. при } x=4, y=-4$$

Осталось посчитать кол-во целых пар (x, y) , таких что $|x| \leq 4, |y| \leq 4$ и выполнено хотя бы одно из двух условий (1) $y+x = 1+2k, k \in \mathbb{Z}$ или (2) $y-x = 1+2n, n \in \mathbb{Z}$

Заметим, что при целых x, y условие (1) равносильно тому, что x, y разной четности. Не легко помнить, что условие (2) равносильно тому же самому. Значит, если x, y - разной четности, то выполняются оба условия, а если x, y одной четности, то не выполняются ни одно.

Посчитаем кол-во пар (x, y) где x - нечетно, а y - четно. Всего их $8 \cdot 5 = 40$, т.к. возможно 8 нечетных значений $x (-4, -3, -1, 1, 3, 5, 7)$ и 5 четных $y (-4, -2, 0, 2, 4)$

Посчитаем кол-во пар, где x - четно, а y - нечетно. Всего их $7 \cdot 4 = 28$, т.к. возможно 7 четных значений $x (-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6)$ и 4 нечетных значений $y (-4, -2, 2, 4)$ $(-3, -1, 1, 3)$

Всего $40 + 28 = 68$, т.к. $x=4, y=-4$ мы не учитываем

Ответ: а) $y+x = 1+2k, k \in \mathbb{Z}$; $y-x = 1+2n, n \in \mathbb{Z}$ б) 67.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

По формулам разности синусов и суммы косинусов

$$2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \sin \pi y = 2 \cdot \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \cos \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right) \cdot \cos \pi y$$

$$\cos \left(\frac{\pi(y+x)}{2} \right) \left(\sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \sin \pi y - \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \cos \pi y \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \left(\frac{\pi(y+x)}{2} \right) = 0 \\ \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \sin \pi y = \cos \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right) \cdot (\cos \pi y) \end{cases}$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

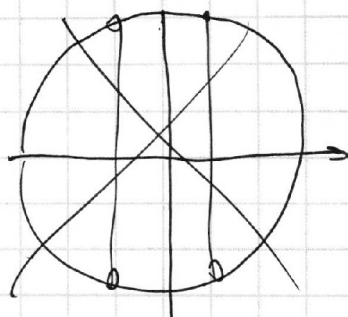
$$-(\cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y) = \cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y$$

$$-(\cos(\pi x + \pi y)) = \cos(2\pi y)$$

Косинус равен другому косинусу

с тем же знаком если сумма

их аргументов равна $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
или разности



$$\cos(2\pi y) + \cos(\pi x + \pi y) = 0$$

$$2 \cos \left(\frac{\pi y + \pi x}{2} \right) \cos \left(\frac{3\pi y - \pi x}{2} \right) = 0 \quad (\text{по формуле суммы косинусов})$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\pi y + \pi x) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \mid \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{2}(3\pi y - \pi x) = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \mid \frac{2}{\pi} \end{cases} \begin{cases} y+x = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \\ 3y-x = 1+2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x -кол-во друзей одиннадцатиклассников.

Тогда изначально вероятность, что Петя и Васа оба пойдут на концерт равна $\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4}$, т.к. C_x^4 -кол-во возможных четверок тех кто идет на концерт, а C_{x-2}^2 это кол-во четверок в которых есть Петя и Васа (Фиксируем Петю и Васю в четверке и из оставшихся $x-2$ одиннадцатиклассников выбираем ещё двух)

Пусть $y > 4$, $y \leq x$, где y -кол-во билетов которые выданы в конце месяца.

Аналогично вероятность в этом случае равна $\frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y}$.

$$\frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y} \cdot 11 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} \cdot 11$$

$$\frac{11(x-2)(x-3)}{x(x-1)(x-2)(x-3)} \cdot 11 = \frac{(x-2)! \cdot y! \cdot (x-y)!}{x! \cdot (x-y)!}$$

$$\frac{12 \cdot 11}{x(x-1)} = \frac{(x-2)! \cdot y! \cdot (x-y)!}{(y-2)! \cdot x! \cdot (x-y)!}$$

$$\frac{12 \cdot 11}{x(x-1)} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)} \Rightarrow y(y-1) = 12 \cdot 11$$

$$y^2 - y - 12 \cdot 11 = 0$$

$$(y-12)(y+11) = 0$$

Ответ: $y = 12$ билетов было выдано в конце месяца $\left[\begin{array}{l} y = 12 \\ y = -11 \text{ не подходит п.к. } y \in \mathbb{N} \end{array} \right.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

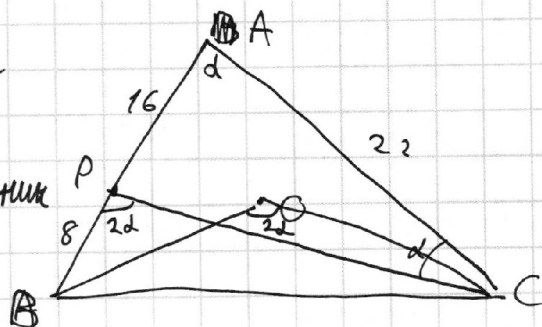
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть $\angle A = 2\alpha$, тогда $\angle BOC = 2\alpha$, как центральный.

2. $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$, т.к.

BOC - вписанный четырехугольник

3. $\angle APC = 180^\circ - \angle BPC = 180 - 2\alpha$
(как смежные)



4. $\angle ACP = 180^\circ - \angle A - \angle APC = \alpha$ (по сумме углов треугольника)
 $\Rightarrow \triangle APC$ - равнобедренный $AP = PC = 46$

5. В $\triangle ABC$ по т. косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 2\alpha \quad (1)$$

В $\triangle BPC$ по т. косинусов

$$BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2 \cdot BP \cdot PC \cdot \cos(2\alpha) \quad (2)$$

Приравняем (1) и (2). Получим

$$AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 2\alpha = BP^2 + PC^2 - 2 \cdot BP \cdot PC \cdot \cos 2\alpha$$

$$24^2 + 22^2 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cdot \cos 2\alpha = 8^2 + 16^2 - 2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot \cos 2\alpha$$

$$12^2 + 11^2 - 12 \cdot 22 \cdot \cos 2\alpha = 4^2 + 8^2 - 4 \cdot 16 \cdot \cos 2\alpha$$

$$144 + 121 - 264 \cos 2\alpha = 16 + 64 - 64(1 - 2 \cos^2 2\alpha - 1)$$

$$265 - 264 \cos 2\alpha = 80 - 128 \cos^2 2\alpha + 64$$

$$128 \cos^2 2\alpha - 264 \cos 2\alpha + 121 = 0$$

$$2^7 \cdot \cos^2 2\alpha - 11 \cdot 24 \cos 2\alpha + 11^2 = 0$$

Замена: $\cos 2\alpha = t$

$$2^7 t^2 - 11 \cdot 24 t + 11^2 = 0$$

$$D = 11^2 \cdot 24^2 - 2^9 \cdot 11^2 = 11^2 \cdot 2^6 (9 - 8) = 11^2 \cdot 2^6$$

$$t = \frac{11 \cdot 24 \pm 11 \cdot 2^3}{2^8}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{11 \cdot 32}{28} \\ t = \frac{11 \cdot 16}{28} \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} t = \frac{11}{8} \\ t = \frac{11}{16} \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \cos 2 = \frac{11}{8} \\ \cos 2 = \frac{11}{16} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{не получим т.к.} \\ |\cos 2| \leq 1 \end{array}$$

$$\text{Значит } \cos 2 = \frac{11}{16}$$

$$\sin 2 = \sqrt{1 - \cos^2 2} = \sqrt{\frac{256 - 121}{256}} = \sqrt{\frac{135}{256}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}, \text{ т.к. } 0^\circ < 2 < 180^\circ$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot AC \cdot \sin 2 = \frac{24 \cdot 22 \cdot 3\sqrt{15}}{2 \cdot 16} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{99\sqrt{15}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

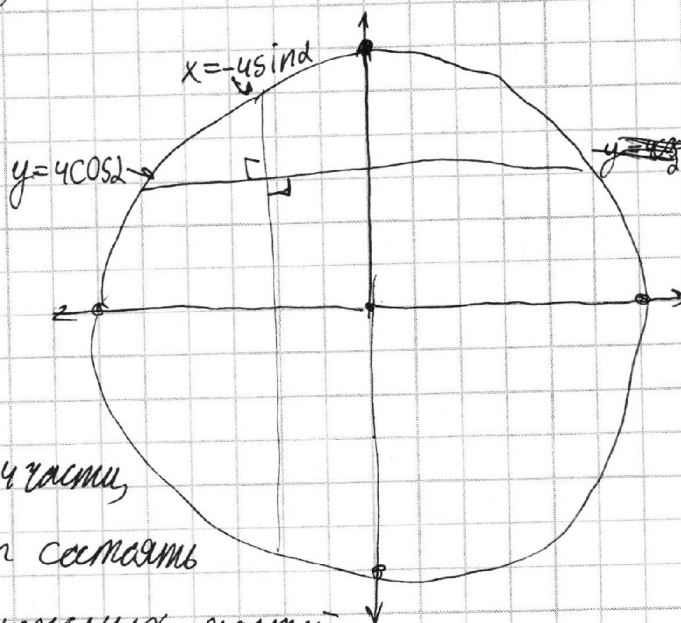
$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)=0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

Графиком $x^2+y^2 \leq 36$ является круг с центром $(0;0)$ и радиусом 6.

Прямые

$x = -4\sin\alpha$, $y = 4\cos\alpha$ — разобьют круг на 4 части, и фигура $\Phi(\alpha)$ будет состоять из двух противоположных частей.

Граница $\Phi(\alpha)$ будет состоять из двух дуг и двух хорд внутри окружности. (Прямые всегда разобьют круг на 4 части т.к. $|4\sin\alpha| \leq 4$ и $|4\cos\alpha| \leq 4$. Заметим, что угол между прямыми $x = -4\sin\alpha$ и $y = 4\cos\alpha$ очевиден, прямой, а это значит, что сумма двух противоположных дуг будет равна 180° . Значит суммарная длина этих дуг не зависит от α и равна $\pi R = 6\pi$.
Найдем точки пересечения $x = -4\sin\alpha$ с окружностью $x^2+y^2=36$. Подставим $x = -4\sin\alpha$. Тогда $y^2 = 36 - x^2 = 36 - 16\sin^2\alpha$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = \pm \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$$

Значит точки пересечения $(-4 \sin \alpha; \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha})$,
 $(-4 \sin \alpha; -\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha})$

Аналогично найдем точки пересечения прямой
 $y = 4 \cos \alpha$. Эти точки имеют координаты $(4 \cos \alpha; \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha})$,
 $(4 \cos \alpha; -\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha})$

$$(4 \cos \alpha; \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}), (4 \cos \alpha; -\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha})$$

Суммарная длина хорд равна $2\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} + 2\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$.

$$= 2(\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} + \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha})$$

и мы хотим максимизировать эту величину. Пусть $36 - 16 \sin^2 \alpha = a$, $36 - 16 \cos^2 \alpha = b$,

тогда $a + b = 72 - 16 = 56$, мы хотим промаксимизировать величину $2(\sqrt{a} + \sqrt{b})$. Это же равно, что

максимизировать $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, а также $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 =$

$$= a + b + 2\sqrt{ab}$$

, но $a + b = 56 \Rightarrow$ мы макс. $2\sqrt{ab}$, но

$$\text{по мер-ву о средних } 2\sqrt{ab} \leq a + b = 56 \Rightarrow 2(\sqrt{a} + \sqrt{b}) -$$

максимально при $a = b = 28$, или $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} \sin \alpha = \cos \alpha \\ \sin \alpha = -\cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$M = 6\pi + 2(\sqrt{28} + \sqrt{28}) = 6\pi + 4\sqrt{28} = 6\pi + 8\sqrt{7}$$

Ответ: $M = 6\pi + 8\sqrt{7}$; $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теорема $NM^2 = NI^2 + IM^2$

$$(R_{\text{вн}} + r_{\text{вн}})^2 = (R_{\text{вн}} - r_{\text{вн}})^2 + (2r)^2 \Rightarrow r^2 = R_{\text{вн}} r_{\text{вн}}$$

Пусть O_4 - центр Ω , тогда проведем $O_4N \perp (A_1B_1B_2)$

~~и~~ очевидно $M \in MN$, также $\triangle O_4MN = \triangle O_4MM$ по

катету и гипотенузе $\Rightarrow O_4N = O_4M = \frac{1}{2}MN = (R_{\text{вн}} + r_{\text{вн}})^{\frac{1}{2}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $A_1 A_2 \dots A_n B_1 B_2 \dots B_n$ — правильная усеченная пирамида. O_1 — центр многоугольника $A_1 \dots A_n$, O_2 — центр многоугольника $B_1 \dots B_n$, r — радиус u , R — радиус Ω , $R_{вн}$ — радиус вписанной окружности $A_1 \dots A_n$, $r_{вн}$ — радиус вписанной окр. $B_1 \dots B_n$. M — высота усеченной пирамиды

Заметим, что O_3 — центр W — лежит

на середине $O_1 O_2 \Rightarrow O_1 O_2 = 2r = M$

Пусть M — сер $A_1 A_2$, N — сер $B_1 B_2$

$O_2 N = r_{вн}$, $O_1 M = R_{вн}$, $O_2 N \perp B_1 B_2$

$O_1 M \perp A_1 A_2$. Тогда $O_1 O_2 NM$ —

— прямоугольная трапеция

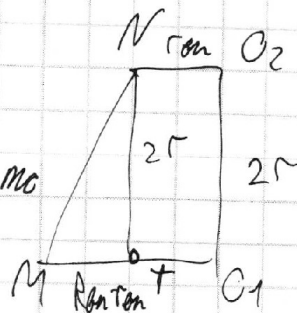
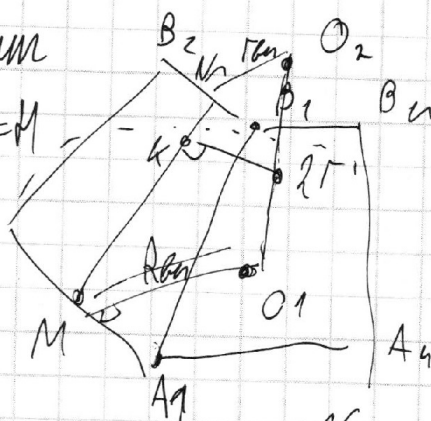
III к. W — касается также грани $A_1 B_1 B_2 A_2$, то

проведем $O_3 K \perp (A_1 B_1 B_2)$

Заметим, что $\triangle O_3 K N = \triangle O_3 O_2 N$ по катету и гипотенузе $\Rightarrow KN = O_2 N = r_{вн}$

Аналогично $KM = R_{вн} \Rightarrow MN = R_{вн} + r_{вн}$

Тогда в трапеции $NO_2 O_1 M$ проведем $NT \perp MO_1$, $MT = MO_1 - O_1 T = MO_1 - NO_2 = R_{вн} - r_{вн}$. В $\triangle NTM$ по т.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(x + 4 \sin 2)(y - 4 \cos 2) = 0$

$a = b + B$ $(R_{\text{int}} + R_{\text{ext}})^2 = 4bB$

$2b \times 2b^2 = (h-x)^2 + B^2$
 $b^2 - B^2 = -2hx + h^2$
 $x = \frac{h^2 - B^2}{2h}$

$y = 4 \cos 2$

$R^2 = x^2 + R_{\text{ext}}^2 = (r-x)^2 + r_{\text{in}}^2$

$h = 2r$

$4r^2 = 4r_{\text{ext}} R_{\text{ext}}$

$r^2 = r_{\text{ext}} R_{\text{ext}}$

$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r_{\text{ext}}}{\sqrt{R_{\text{ext}} r_{\text{ext}}}}$

$\sin 2 = \frac{2r}{R_{\text{ext}} + r_{\text{ext}}}$

$x^2 = 36 - 16 \cos^2 2$

$y^2 = 36 - 16 \sin^2 2$

$2\sqrt{36 - 16 \cos^2 2} + 2\sqrt{36 - 16 \sin^2 2} \xrightarrow{\text{max}}$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} \xrightarrow{\text{max}}$

$a + b \xrightarrow{\text{fix}}$

$d \leq b + 2\sqrt{ab} \xrightarrow{\text{max}}$

$R_{\text{ext}}^2 = -4rx + 4r^2 + r_{\text{ext}}^2$

$x = \frac{-R_{\text{ext}} + r_{\text{ext}} + 4r^2}{4r}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \sin \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right) \sin \pi y =$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos \pi y + \cos \pi x = 2 \cos \left(\frac{\pi(y+x)}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right)$$

$$\cos(\pi y) = c$$

$$\cos \left(\frac{\pi(y+x)}{2} \right) = 0$$

$$\cos \pi y = 0$$

$$\pi y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} (\pi y) = 1$$

$$\frac{\pi(y+x)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 1$$

$$x = 0$$

$$y+x = 1+2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y=2, x=-1$$

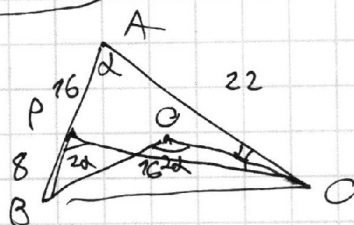
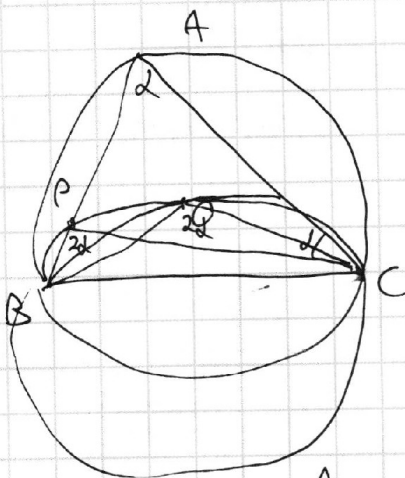
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\frac{\pi(y-x)}{2} + \pi y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi(y-x) + 2\pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3y-x = 1+2k, k \in \mathbb{Z}$$



$$AP \cdot CP = 16$$

$$BC^2 = 24^2 + 22^2 - 2 \cdot 22 \cdot 24 \cos 2\alpha$$

$$BC^2 = 8^2 + 16^2 - 2 \cdot 8 \cdot 16 \cos 2\alpha$$

$$24^2 + 22^2 - 2 \cdot 22 \cdot 24 \cos 2\alpha = 8^2 + 16^2 - 2 \cdot 8 \cdot 16 \cos 2\alpha \quad | :4$$

$$12^2 + 11^2 - 11 \cdot 24 \cos 2\alpha = 4^2 + 8^2 - 64 \cos 2\alpha$$

$$144 + 121 - 264 \cos 2\alpha = 16 + 64 - 64 \cos 2\alpha$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111x$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$B = 707 = 7 \cdot 101$$

$$C = 11$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x+4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{(y+4) + (x-4) + 3}{(x-4)(y+4)}$$

мы

$$\begin{cases} x+y+3=0 \\ xy=(x-4)(y+4) \end{cases}$$

$$A = 7777$$

$$B = 207$$

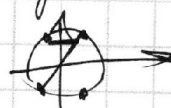
$$C = 11$$

$$\sin 2y - \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \sin$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos x \sin y$$



$$\cos(2\pi y) = -\cos(\pi x - \pi y)$$

$$(\sin 2y - \sin \pi x) \sin 2y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

x - одиннадцатиклассников

$$11 \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} \text{ удовл.}$$

$$C_x^4 - \text{всего вып}$$

$$= \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y}$$

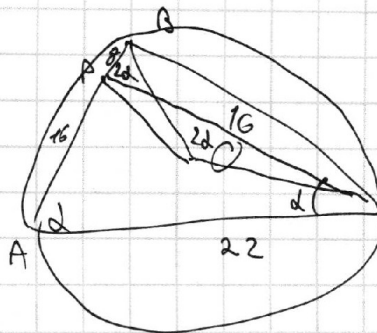
$$\frac{x(x-1)(x-2)}{24}$$

$$11 \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$$

$$= \frac{y(y-1)}{(x-y+1)(x-y+2)}$$

$$= \frac{11 \cdot 12}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{11 \cdot 12}{(x-2)(x-3)}$$



$$\cos(2\pi y) =$$

$$= -\sin \pi x \sin \pi y - \cos \pi x \cos \pi y$$

$$= -\cos(\pi x - \pi y)$$

$$\frac{x(x-1) \dots (x-y+1)}{(y-2)!}$$

$$= \frac{(y-2)!}{x(x-1) \dots (x-y+1)} =$$

$$x \leq 14$$

$$(x-2)(x-3) y(y-1) = 11 \cdot 12$$

$$= (x-y+1)(x-y+2)$$

$$2\pi y + \pi x - \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2\pi y - \pi x + \pi y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x+y = 1+2k$$

$$3y-x = 1+2n$$