



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① Пл.к. А - четырехзначное ^{число}, составленное из одинако-
вых цифр, т.с А можно записать как $A = 1111x$, где
x - какое-то однозначное четырехзначное ^{число}
 $A = 1111x = 101 \cdot 11x$.

Заметим, что 101 - простое \Rightarrow какое-то из чисел
B и C делится на 101, иначе их произведение не будет
таким квадратом.

С $x > 10$, т.к. $C < 100$ и $C > 0 \Rightarrow B : 101$. Единственное четы-
рехзначное число, которое кратно 101 и содержит
в себе цифру 7, это число 707. Значит $B = 707$
Заметим, что ~~число~~, т.к. ~~1111x~~ и $x \leq 11$, т.к. $x < 0$, $x > 0$.
 $707 \times 11 \Rightarrow$ т.к. $A : 11$, а произведение $A \cdot B \cdot C$ - такое
квадрат, т.с $C : 11$. Единственное число, но двухзначное
число, которое кратно 11 и содержит хотя бы
одну цифру 1, это число 11 $\Rightarrow C = 11$

$A \cdot B \cdot C = 1111x \cdot 707 \cdot 11 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7x$. Пл.к. $A \cdot B \cdot C$ - такое
квадрат, т.с $7x$ - такое квадрат $\Rightarrow x : 7$. Единственное
однозначное четырехзначное число, кратное 7 это с 7. Значит
 $A = 4444$

Ответ: $A = 4444$, $B = 707$, $C = 11$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{По условию } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{(y+4) + (x-4) + 3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\left(\frac{x+y+3}{xy} \right) = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{(x+y+3)((x-4)(y+4)-xy)}{xy(x-4)(y+4)} = 0$$

$$\begin{cases} x+y+3=0 \\ xy - 4y + 4x - 16 = xy \end{cases} \quad \begin{cases} y = -3 - x \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x - 3 \quad (1) \\ y = x - 4 \quad (2) \end{cases}$$

Считай (1) неверно, т.к. $x, y > 0 \Rightarrow x+y+3 > 3$ и
 $x+y+3 \neq 0$

Поставим $y = x - 4$ в M

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 4^2 = 64$$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f) \arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{ограничения } -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq y \leq 4$$

Заметим, что $0 \leq \arccos \frac{x}{4} \leq \pi \quad | \Rightarrow$
 $-\frac{\pi}{2} \leq -\arcsin \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2}$

$\arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$. Значит наше
мер-во неверно, только при $\arccos \frac{x}{4} = 0$,
 $\arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$ т.е при $x=4, y=-4$

осталось посчитать кол-во целых пар (x,y) , такие
что $|x| \leq 4, |y| \leq 4$ и выполнено хотя бы одно из
двух условий (1) $y+x = 1+2k, k \in \mathbb{Z}$ или (2) $3y-x = 1+2n, n \in \mathbb{Z}$

Заметим, что при целых x, y условие (1) равносильно
тому, что x, y разной четности. Не сложно понять,
что условие (2) равносильно тому же самому. Значит,
если x, y - разной четности, то выполнены оба
условия, а если x, y - одинаковой четности, то не выполнено
ни одно.

Посчитаем кол-во пар (x, y) где x -нечетно, а y -четно.
Всего их $8 \cdot 5 = 40$, т.к. возможно 8 нечетных значений
 $x (-4, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7)$ и 5 четных $y (-4, -2, 0, 2, 4)$

Посчитаем кол-во пар, где x -четно, а y -нечетно
Всего их $7 \cdot 4 = 28$, т.к. возможно 7 четных значений
 $x (-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6)$ и 4 нечетных значений $y (-1, -3, 1, 3)$

Всего $40 + 28 - 1 = 67$, т.к. $x=4, y=-4$ мы не учитывали

Ответ: а) $y+x = 1+2k, k \in \mathbb{Z}$; 3) $3y-x = 1+2n, n \in \mathbb{Z}$ б) 67.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

По формулам разности синусов и суммы косинусов

$$2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \sin \pi y = 2 \cdot \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \cos \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right) \cdot \cos \pi y$$

$$\cos \left(\frac{\pi(y+x)}{2} \right) \left(\sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \sin \pi y - \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \cos \pi y \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \left(\frac{\pi(y+x)}{2} \right) = 0 \\ \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \sin \pi y = \cos \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right) \cdot (\cos \pi y) \end{cases}$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

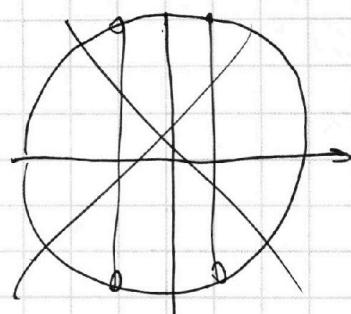
$$-(\cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y) = \cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y$$

$$-(\cos(\pi x + \pi y)) = \cos(2\pi y)$$

Косинус равен другому косинусу

со знаком минус если сумма

их аргументов равна $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
или разность



$$\cos(2\pi y) + \cos(\pi x + \pi y) = 0$$

$$2 \cos \left(\frac{\pi y + \pi x}{2} \right) \cos \left(\frac{3\pi y - \pi x}{2} \right) = 0 \quad (\text{по формуле суммы косинусов})$$

$$\begin{cases} \pi y + \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \mid \cdot \frac{2}{\pi} \\ \pi y - \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + x = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ 3y - x = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x -кол-во билетов одиннадцатиклассников.
 Тогда изначально вероятность, что Петя и Вася оба пойдут на концерт равна $\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4}$, т.к. C_x^4 -количество всевозможных четверок тех кто идет на концерт, а C_{x-2}^2 это кол-во четверок в которых есть Петя и Вася (Фиксируем Петя и Вася в четверке и из оставшихся $x-2$ одиннадцатиклассников выбираем еще двух)

Пусть получит y $y > 4$, $y \leq x$, где y -кол-во одиннадцатиклассников которые выделились в конце месяца.

Аналогично вероятность в этом случае равна $\frac{C_{y-2}^{y-2}}{C_x^y}$. Но условие $\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = 11 = \frac{C_{y-2}^{y-2}}{C_x^y}$

$$\frac{\frac{12 \cdot 11}{2}}{\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}} = \frac{(x-2)! y! (x-y)!}{(y-2)! x! (x-y)!}$$

$$\frac{12 \cdot 11}{x(x-1)} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)} \Rightarrow y(y-1) = 12 \cdot 11$$

$$y^2 - y - 12 \cdot 11 = 0 \\ (y-12)(y+11) = 0$$

Ответ: $y=12$ билетов было выделено в конце месяца $\begin{cases} y=12 \\ y=-11 \text{ - не подходит п.к. } y \in \mathbb{N} \end{cases}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $\angle BOC = 2\alpha$, как центральный.

2. $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$, т.к.

$\triangle BOC$ - вписаный четырехугольник

3. $\angle APC = 180^\circ - \angle BPC = 180^\circ - 2\alpha$
(как смежные)

4. $\angle ACP = 180^\circ - \angle A - \angle APC = \alpha$ (по сумме углов треугольника)
 $\Rightarrow \triangle APC$ - равнобедренный $AP = PC = 16$

5. $B \sim \triangle ACP$ по м. косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

$B \sim \triangle BPC$ по м. косинусов

$$BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2 \cdot BP \cdot PC \cdot \cos(2\alpha) \quad (2)$$

Приравняем (1) и (2). Получим

$$AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \alpha = BP^2 + PC^2 - 2 \cdot BP \cdot PC \cdot \cos 2\alpha$$

$$24^2 + 22^2 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cdot \cos \alpha = 8^2 + 16^2 - 2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot \cos 2\alpha$$

$$12^2 + 11^2 - 12 \cdot 22 \cdot \cos \alpha = 4^2 + 8^2 - 4 \cdot 16 \cdot \cos 2\alpha$$

$$144 + 121 - 264 \cos \alpha = 16 + 64 - 64(\cancel{+ 2} \cos^2 \alpha - 1)$$

$$265 - 264 \cos \alpha = 80 - 128 \cos^2 \alpha + 64$$

$$128 \cos^2 \alpha - 264 \cos \alpha + 121 = 0$$

$$2^4 \cdot \cos^2 \alpha - 11 \cdot 2^4 \cdot \cos \alpha + 11^2 = 0$$

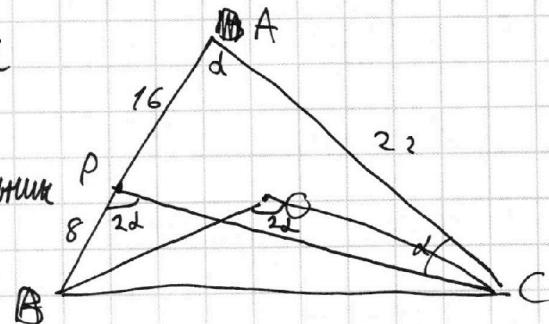
Замена: $\cos \alpha = t$

$$2^4 t^2 - 11 \cdot 2^4 t + 11^2 = 0$$

$$0 = 11^2 - 24^2 - 2^4 \cdot 11^2 = 11^2 \cdot 2^4 (9 - 8) = 11^2 \cdot 2^6$$

$$t = \frac{11}{2^2} \quad \text{или} \quad t = \frac{11^2 - 2^6}{2^8}$$

28





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{11-3^2}{28} \\ t = \frac{11 \cdot 16}{28} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} t = \frac{11}{8} \\ t = \frac{11}{16} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} \cos 2 = \frac{11}{8} - \text{не подходит т.к.} \\ \cos 2 = \frac{11}{16} \end{array} \right] \quad |\cos 2| \leq 1$$

значит $\cos 2 = \frac{11}{16}$

$$\sin 2 = \sqrt{1 - \cos^2 2} = \sqrt{\frac{256 - 121}{256}} = \sqrt{\frac{135}{256}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}, \text{ т.к. } 0^\circ < 2 < 180^\circ$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot AC \cdot \sin 2 = \frac{24 \cdot 22 \cdot 3\sqrt{15}}{2 \cdot 16} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Объем: } \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

Графиком $x^2+y^2 \leq 36$ является круг с центром $(0; 0)$ и радиусом 6.

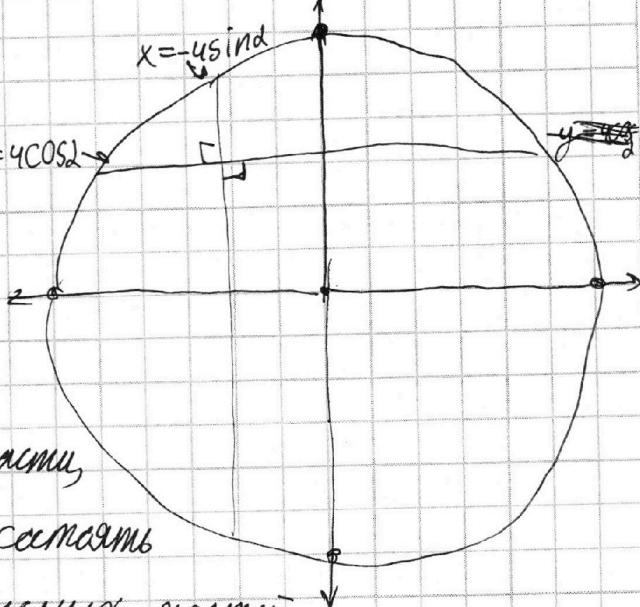
Прямоые

$x = -4\sin\alpha$, $y = 4\cos\alpha$ – разбивает круг на 4 части, и фигура $\Phi(\alpha)$ будет состоять из двух противоположных частей.

Граница $\Phi(\alpha)$ будет состоять из двух дуг и двух хорд внутри окружности. (Прямоые всегда разбивают круг на 4 части т.к. $|4\sin\alpha| \leq 4$, и $|4\cos\alpha| \leq 4$). Заметим, что угол между прямыми $x = -4\sin\alpha$ и $y = 4\cos\alpha$, очевидно, прямой, а это значит, что сумма двух противоположных дуг будет равна 180° . Значит суммарная длина этих дуг не зависит от α и равна $\pi R = 6\pi$.

Найдем точку пересечения $x = -4\sin\alpha$ с окружностью

$$x^2+y^2=36. \text{ Поставим } x = -4\sin\alpha. \text{ Тогда } y^2 = 36 - x^2 = 36 - 16\sin^2\alpha.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = \pm \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$$

Значит точки пересечения $(-\sin \alpha; \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha})$,
 $(-\sin \alpha; -\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha})$

Аналогично найдем точки пересечения прямой
 $y = 4 \cos \alpha$. Эти точки имеют координаты $(\cos \alpha; 4 \cos \alpha)$,

$$(4 \cos \alpha; \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}), (4 \cos \alpha; -\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha})$$

Суммарная длина хорд равна $2\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} + 2\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} =$

$= 2(\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} + \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha})$ и мы хотим максимизировать эту величину. Пусть $36 - 16 \sin^2 \alpha = a$, $36 - 16 \cos^2 \alpha = b$,

тогда $a+b=72-16=56$, мы хотим промаксимизировать величину $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Это же равно, что максимизировать $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, а также $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 =$

$$= a+b+2\sqrt{ab}, \text{ но } a+b=56 \Rightarrow \text{ мы макс. } 2\sqrt{ab}, \text{ но}$$

по нер-ву о средних $2\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}=28 \Rightarrow 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \leq 28$.

Максимальные при $a=b=28$, или $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} \sin \alpha = \cos \alpha \\ \sin \alpha = -\cos \alpha \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$$

$$M = 6\pi + 2(\sqrt{28} + \sqrt{28}) = 6\pi + 4\sqrt{28} = 6\pi + 8\sqrt{7}$$

Отврнм: $M = 6\pi + 8\sqrt{7}$; $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\pi n, n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Гипотенуза $NM^2 = \bar{N}^2 + \bar{M}^2$

$$(R_{Bn} + r_{Bn})^2 = (R_{Bn} - r_{Bn})^2 + (2r)^2 \Rightarrow r^2 = R_{Bn} r_{Bn}$$

Пусть O_4 - центр $\sqrt{2}$, тогда преобразование $O_4fl(A, B, B_2)$

Найдем $M \in MN$, также $\triangle O_4MN = \triangle O_4NM$ по

$$\text{катету и гипотенузу} \Rightarrow O_4N = O_4M = \sqrt{MN^2 - (R_{Bn} + r_{Bn})^2}$$

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $A_1A_2\dots A_n B_1B_2\dots B_n$ - это правильная усеченная пирамида. O_1 -центр многоугольника $A_1\dots A_n$, O_2 -центр многоугольника $B_1\dots B_n$, r -радиус w , R -радиус R_{Bn} -радиус вписанной окружности $A_1\dots A_n$, r_{Bn} -радиус вписанной окр. $B_1\dots B_n$. M -высота усеченной пирамиды

Зададим, что O_3 -центр W -шарика

$$\text{то середина } O_1O_2 \Rightarrow O_1O_2 = 2r = M$$

Пусть M -ср A_1A_2 , N -ср B_1B_2

$$O_2N = r_{Bn}, O_1M = R_{Bn}, O_2N \perp B_1B_2$$

$$O_1M \perp A_1A_2 \text{ Тогда } O_1O_2 NM -$$

-прямоугольная трапеция

III к. W -касается также грани $A_1B_1B_2A_2$, то

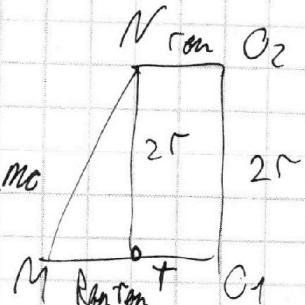
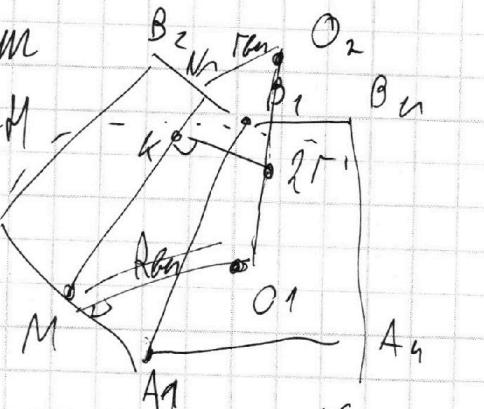
$$\text{пролегает } O_3K \perp (A_1B_1B_2)$$

Зададим, что $\triangle O_3KN = \triangle O_3O_2N$ по катету и гипотенузе
 $\Rightarrow KN = O_2N = r_{Bn}$

$$\text{аналогично } KM = R_{Bn} \Rightarrow MN = R_{Bn} + r_{Bn}$$

Польза в трапеции MO_2O_1M пролегает $NT \perp MO_1$,

$$MT = MO_1 - O_1T = MO_1 - NO_2 = R_{Bn} - r_{Bn}. \quad \exists NTM \text{ по м.}$$



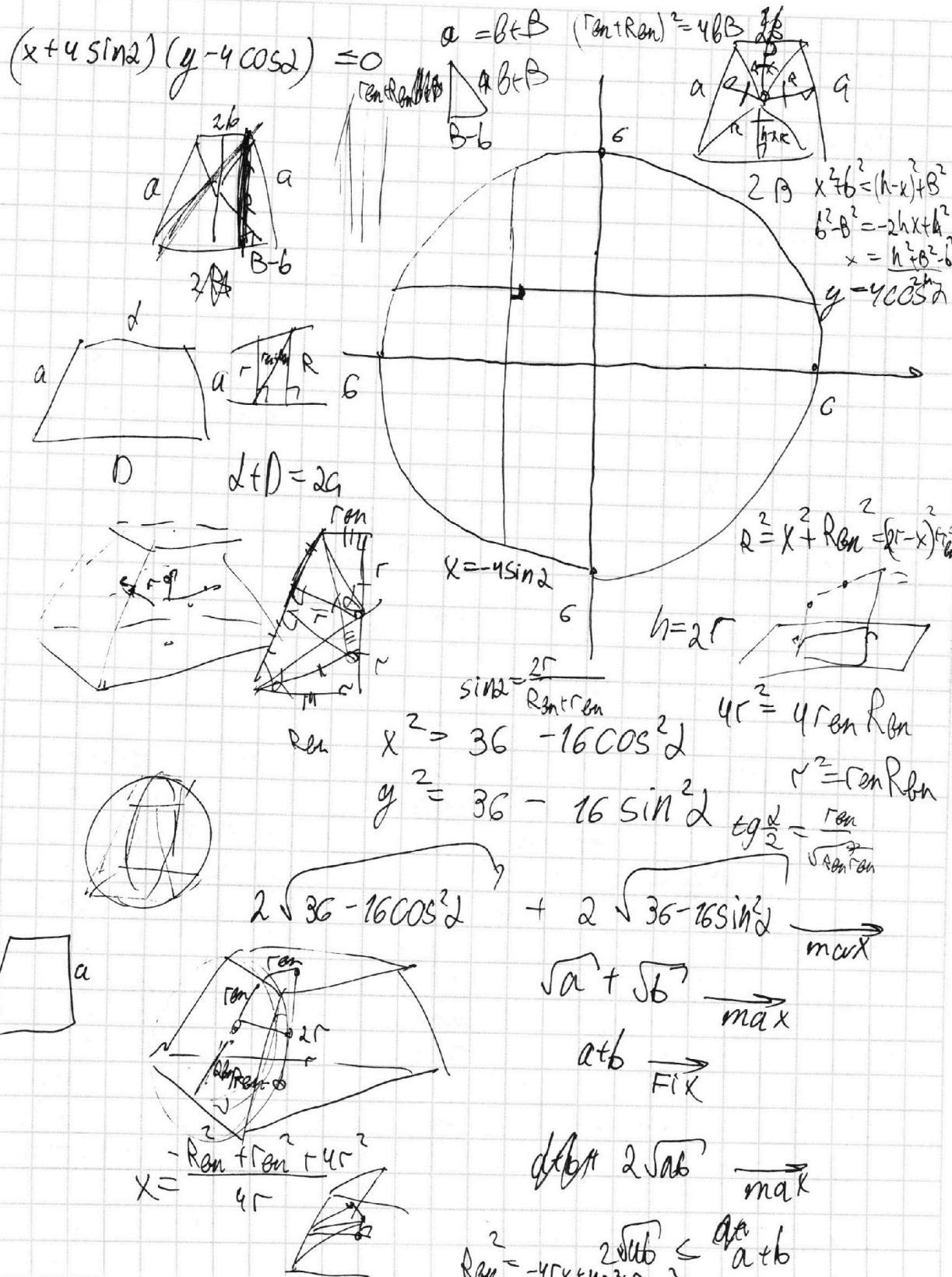


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \sin \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right) \sin \pi y =$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos \pi y + \cos \pi x = 2 \cos \left(\frac{\pi(y+x)}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right)$$

$$\cos \left(\frac{\pi(y+x)}{2} \right) = 0 \quad \cos \pi y = 0$$

$$\cos(\pi y) = c$$

$$\sin \frac{\pi(y-x)}{2} =$$

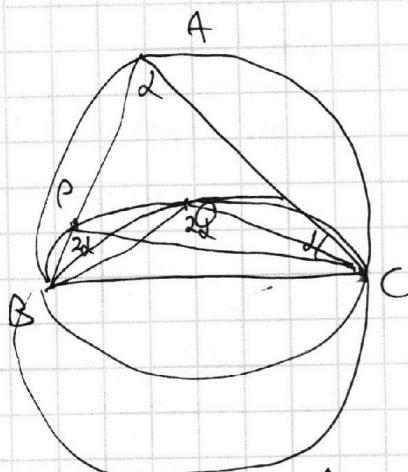
$$\tan \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right) \cdot \tan \left(\frac{\pi y}{2} \right) = 1$$

$$\frac{\pi(y+x)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{matrix} y=1 \\ x=0 \end{matrix}$$

$$y+x = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{matrix} y=2 \\ x=1 \end{matrix}$$

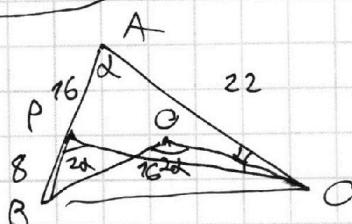


$$\begin{aligned} \tan 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{1} \end{aligned}$$

$$\frac{\pi(y-x)}{2} + \pi y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi(y-x) + 2\pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y-x = 1+2k, k \in \mathbb{Z}$$



$$\angle BCP = 16$$

$$BC^2 = 24^2 + 22^2 - 2 \cdot 22 \cdot 24 \cos 2\alpha$$

$$BC^2 = 8^2 + 16^2 - 2 \cdot 8 \cdot 16 \cos 2\alpha$$

$$24^2 + 22^2 - 2 \cdot 22 \cdot 24 \cos 2\alpha = 8^2 + 16^2 - 2 \cdot 8 \cdot 16 \cos 2\alpha \quad 1:4$$

$$12^2 + 11^2 - 11 \cdot 24 \cos 2\alpha = 4^2 + 8^2 - 64 \cos 2\alpha$$

$$144 + 121 - 264 \cos 2\alpha = 16 + 64 - 64 \cos 2\alpha$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111x$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$B = 707 = 7 \cdot 101$$

$$C = 11$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+4+3}{xy} = \frac{(y+4) + (x-4) + 3}{(x-4)(y+4)}$$

???

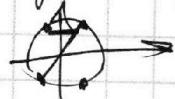
$$\left\{ \begin{array}{l} x+y+3=0 \\ xy = (x-4)(y+4) \end{array} \right.$$

$$\sin(\pi y) - \sin(\pi x) = 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \sin($$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\sin(k\pi y) - \sin(k\pi x) = 2 \cos k \pi \sin y$$



$$\cos(2\pi y) = -\cos(\pi x - \pi y)$$

$$(\sin(\pi y) - \sin(\pi x)) \sin(\pi y) = (\cos(\pi y) + \cos(\pi x)) \cos(\pi y)$$

x -одиннадцатиклассников

$$11 \quad \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} \text{ - } \text{удобн.}$$

$$= \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y}$$

$$11 \quad \frac{\frac{x(x-1)}{2}}{\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}} = \frac{11 \cdot 12}{\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x(x-1)}} = \frac{11 \cdot 12}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{y(y-1)}{(x-y+1)(x-y+2)} = \frac{11 \cdot 12}{(x-2)(x-3)}$$

$$\cos(2\pi y) =$$

$$= -\sin(\pi x) \sin(\pi y) - \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$

$$= \frac{\frac{x(x-1) \dots (x-y+3)}{(y-2)!}}{\frac{x(x-1) \dots (x-y+1)}{y!}} =$$

$$x \leq 1^4$$

$$(x-2)(x-3) y(y-1) = 11 \cdot 12 \cdot (x-y+1)(x-y+2)$$

$$2\pi y + \pi x - \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2\pi y - \pi x + \pi y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = 1 + 2k$$

$$3y - x = 1 + 2n$$

