МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x =$ $= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1. Заметим, что число A представимо в виде $1111 \cdot x$ для некоторого натурального x, $1 \le x \le 9$. То есть $A = 1111 \cdot x = 101 \cdot 11 \cdot x$. Заметим, что 101 – простое число, значит, чтобы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом натурального числа, необходимо, чтобы 101 встретилось в разложении на простые множители B и C. C – двузначное, в ~~нем~~ его разложении 101 встретиться не может $\Rightarrow$ может встретиться только в разложении числа B. $\Rightarrow B \vdots 101 \Rightarrow B$ может быть одним из чисел (трёхзначные, делятся на 101): 101; 202; 303; 404; 505; 606; 707; 808; 909. Из них подходит под условие "хотя бы одна из цифр равна 1" только 101. $\Rightarrow B = 101$. В разложении на простые множители числа A также встречается 1 раз 11. Так как $B \not\vdots\ 11$, C должно делиться на 11, чтобы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом, то есть C – это одно из чисел: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 (двузначные, делятся на 11). Из них подходит под условие „хотя бы одна из цифр равна 5" только 55 $\Rightarrow C = 55$. Итого $B = 101$; $C = 55 = 5 \cdot 11$; $A = 11 \cdot 101 \cdot x$. Значит чтобы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом, необходимо, чтобы простое число 5 в произведении $A \cdot B \cdot C$ было в чётной степени $\Rightarrow x \vdots 5 \Rightarrow x = 5$ (т.к. $1 \le x \le 9$). То есть $A = 5555$; $B = 101$; $C = 55$. Все три числа однозначно восстанавливаются. Других x не существует.

Ответ: (5555; 101; 55)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2. По условию:

$x>0$

$y>0$

(1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{x-3}+\frac{1}{y+3}+\frac{1}{(x-3)(y+3)}$

(2) $M=x^3-y^3-9xy$

$\boxed{\text{ОГРАНИЧЕНИЕ: } x\neq 3}$

Рассмотрим (1): $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{x-3}+\frac{1}{y+3}+\frac{1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x+y+1}{xy}=\frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow \frac{x+y+1}{xy}=\frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$

Числители равны $\Rightarrow$ знаменатели тоже равны:

$xy=(x-3)(y+3) \Leftrightarrow xy=xy+3x-3y-9 \Leftrightarrow x-y-3=0 \Leftrightarrow \boxed{x=3+y}$ (*)

Рассмотрим (2) с учётом (*):

$M=(3+y)^3-y^3-9(3+y)\cdot y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M=27+27y+9y^2+\cancel{y^3}-\cancel{y^3}-9y^2-27y \Leftrightarrow M=27$. M определено однозначно при допустимых значениях x и y.

Ответ: 27.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3. а) Из условия: x, y – действительные;

$(\sin\pi x - \sin\pi y)\cdot\sin\pi x = (\cos\pi x + \cos\pi y)\cdot\cos\pi x$. Решим это уравнение:

$\sin^2\pi x - \sin\pi x\cdot\sin\pi y = \cos^2\pi x + \cos\pi x\cdot\cos\pi y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0$ $\left(\begin{array}{l}\cos^2\pi x - \sin^2\pi x = \cos 2\pi x;\\ \cos\pi x\cdot\cos\pi y + \sin\pi x\,\sin\pi y = \cos(\pi x - \pi y)\end{array}\right)$

С учётом того, что $\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$ Преобразуем:

$\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{3\pi x - \pi y}{2}\cdot\cos\frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0\\ \cos\frac{\pi x + \pi y}{2} = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi t,\ t\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3\pi x - \pi y = \pi + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \pi x + \pi y = \pi + 2\pi t,\ t\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x - y = 2k+1,\ k\in\mathbb{Z}\\ x + y = 2t+1,\ t\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y = 3x - (2k+1),\ k\in\mathbb{Z}\\ y = -x + (2t+1),\ t\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y = 3x - 2k - 1,\ k\in\mathbb{Z}\\ y = -x + 2t + 1,\ t\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

Ответ: при данном x (x – действительное) подойдут все y, удовлетворяющие совокупности $\left[\begin{array}{l}y = 3x - 2k - 1,\ k\in\mathbb{Z}\\ y = -x + 2t + 1,\ t\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

б) $\arccos\frac{x}{4} + \arccos\frac{y}{9} < 2\pi$. По свойствам функции arccos, она принимает значение косинуса (от -1 до 1) и возвращает угол от 0 до π. Заметим, что из этих свойств следует, что $\arccos\frac{x}{4} + \arccos\frac{y}{9} \le 2\pi$. Равенство достигается в единственном случае: $\arccos\frac{x}{4} = \pi$; $\arccos\frac{y}{9} = \pi \Rightarrow \frac{x}{4} = -1$; $\frac{y}{9} = -1 \Rightarrow x = -4$; $y = -9$. Также из свойств можно ограничить значения x и y:

$-1 \le \frac{x}{4} \le 1$; $-1 \le \frac{y}{9} \le 1 \Rightarrow -4 \le x \le 4$; $-9 \le y \le 9$. Заметим, что так как x и y целые, то из п. а) следует, что для нашего случая y можно найти через x, как: $\left[\begin{array}{l}y = 3x + (\text{целое нечётное число})\\ y = -x + (\text{целое нечётное число})\end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

теперь, понимая, в каких диапазонах лежат x и y, и как они определены друг через друга, ~~подсчитаем количество подх~~

Посчитаем подходящие x и y: заметим, что 3x такой же чётности, что и x, а −x такой же чётности, что и x ⇒ 3x и −x одинаковой чётности ⇒ для них будут одинаковые y. Разберём 2 случая:

1) x чётно ⇒ y нечётно. $y \in \{-9; -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9\}$ − 10 чисел

2) x нечётно ⇒ y чётно $y \in \{-8; -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8\}$ − 9 чисел

чётные x: $x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$ − 5 чисел ⇒ таких $(x;y)$ $5 \cdot 10 = 50$ штук

нечётные x: $x \in \{-3; -1; 1; 3\}$ − 4 числа ⇒ таких $(x;y)$ $4 \cdot 9 = 36$ штук

Всего пар $(x;y)$ $50 + 36 = 86$ штук, однако нам не подходит пара $(x;y) = (-4;-9)$, значит итого 85 пар.

Ответ: 85

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4. Билеты распределяются между людьми равновероятно. Обозначим за x – количество 11-классников ($x \in \mathbb{N}$), y – количество билетов, которые добавились в конце месяца ($y \in \mathbb{N}$), то есть в конце месяца станет выделено $y+4$ билета. Посчитаем вероятности:

I (в начале месяца): C_x^4 способов распределить 4 билета по x 11-классникам. Из них подходящие C_{x-2}^2, когда Петя и Вася оба получают по билету ("фиксируем" Петю и Васю, осталось 2 билета и $x-2$ человека, количество способов выбрать 2 человека из $x-2$ равно C_{x-2}^2). Таким образом, вероятность в этом случае равна

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{\frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}}{\frac{x!}{4!(x-4)!}} = \frac{(x-2)!}{2!\cancel{(x-4)!}} \cdot \frac{4!\cancel{(x-4)!}}{x!} = \frac{12}{x(x-1)} \quad (x \geq 4)$$

II (в конце месяца): C_x^{y+4} способов распределить $y+4$ билета по x людям, из них подходящих C_{x-2}^{y+2} способов, когда и Петя, и Вася едут на концерт. (аналогично "фиксируем" Петю и Васю, осталось $y+2$ билета и $x-2$ человека, способов выбрать $y+2$ из $x-2$ равно C_{x-2}^{y+2}). Таким образом, вероятность в этом случае равна

$$\frac{C_{x-2}^{y+2}}{C_x^{y+4}} = \frac{\frac{(x-2)!}{(y+2)!(x-y-4)!}}{\frac{x!}{(y+4)!(x-y-4)!}} = \frac{(x-2)!}{(y+2)!\cancel{(x-y-4)!}} \cdot \frac{(y+4)!\cancel{(x-y-4)!}}{x!} =$$

$$= \frac{(y+4)(y+3)}{x(x-1)} \quad (x \geq y+4)$$

Чтобы условие задачи выполнялось, необходимо, чтобы было выполнено:

$$\frac{12}{x(x-1)} \cdot 3{,}5 = \frac{(y+4)(y+3)}{x(x-1)} \quad \Big| \cdot x(x-1) \neq 0, \text{ поскольку } x \geq 4$$

$$12 \cdot 3{,}5 = (y+4)(y+3) \Leftrightarrow 12 \cdot 3{,}5 = y^2 + 7y + 12 \quad \Big| \cdot 2$$

$$12 \cdot 7 = 2y^2 + 14y + 24 \Leftrightarrow 84 = 2y^2 + 14y + 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + 14y - 60 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 7y - 30 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$y^2+7y-30=0$

$D=49+120=169=13^2$

$y_{1,2}=\frac{-7\pm 13}{2}$ $y_1=-10$ - посторонний корень ($y\in\mathbb{N}$)

$y_2=3 \Rightarrow y+4=3+4=7$ - количество выделенных билетов в конце месяца.

Ответ: 7.

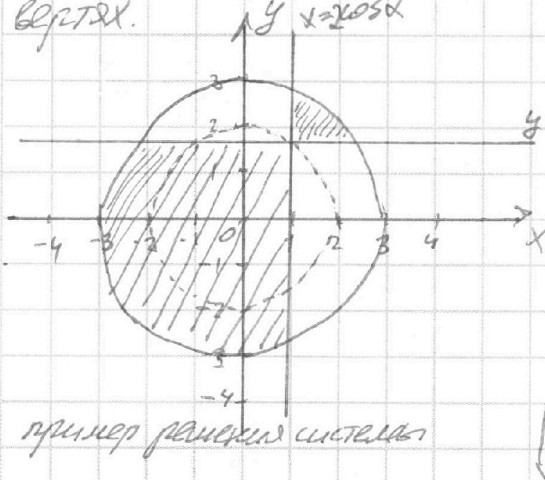
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~№~~ №6. $\begin{cases}(x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha)\geq 0\\ x^2+y^2\leq 9\end{cases}$

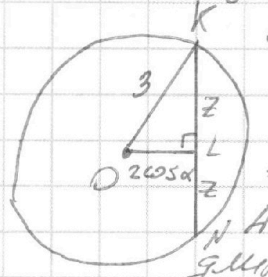
Заметим, что второе неравенство — это ~~окружность~~ круг с центром в точке (0;0) и радиусом 3. Первое неравенство — это две прямые $\left[\begin{array}{l}y=2\sin\alpha\\ x=2\cos\alpha\end{array}\right.$, которые пересекаются на окружности с центром в точке (0;0) и радиусом 2. (из соображений, что $4\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha=4$ по основному триг. тождеству). Они делят плоскость на четыре части, и решениями неравенства являются точки, находящиеся в первой и третьей разбиваемых четвертях.



пример решения системы

Периметр закрашенной области равен сумме длин хорд большей окружности и разбиваемых дуг.

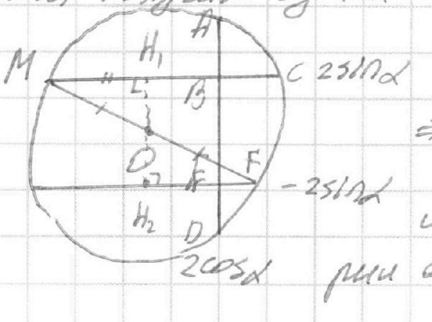
Найдём длины разбиваемых хорд.



Неизвестная длина равна 2z. В случае вертикальной хорды $z=\sqrt{9-4\cos^2\alpha}\Rightarrow$ $\Rightarrow 2z=2\sqrt{9-4\cos^2\alpha}$

Аналогично, для вертикальной длина равна $2\sqrt{9-4\sin^2\alpha}$

Сумма длин хорд равна $2\sqrt{9-4\cos^2\alpha}+2\sqrt{9-4\sin^2\alpha}$. Заметим следующее: сумма длин дуг, отсекаемых хордами постоянна и равна половине длины большей окружности. Докажем этот факт: понятно, что из соображения симметричности окружности, если мы отразим прямую $y=2\sin\alpha$ относительно OX: $y=-2\sin\alpha$, то мы получим одинаковые фигуры ABC и DEF. А прямая



MO (M — ~~[illegible]~~ пересечение $2\sin\alpha$ и окружности) проходит через F $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ MF — диаметр. (Это потому что $\triangle H_2OF=\triangle H_1OM$ по гипотенузе (радиус) и катету $MH_1=H_2F$ также в силу симметрии окружности).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Таким образом, пусть периметр фигуры равен P:

$P = 2\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha} + 3\pi \qquad P_{max} - ?$

$P = 2\sqrt{5+4\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha} + 3\pi$

Обозначим $\sin^2\alpha$ за t $(0 \le t \le 1)$

$P = 2\sqrt{5+4t} + 2\sqrt{9-4t} + 3\pi = P(t)$

$P'(t) = \frac{1}{\sqrt{5+4t}} \cdot 4 - \frac{4}{\sqrt{9-4t}} = \frac{4\sqrt{9-4t} - 4\sqrt{5+4t}}{\sqrt{5+4t}\cdot\sqrt{9-4t}} = 0$

Найдём t, при которых $P'(t) = 0$

$4\sqrt{9-4t} = 4\sqrt{5+4t}$

$9-4t = 5+4t$

$8t = 4$

$t = \frac{1}{2}$

$P'(t)$: $+$ до $\frac{1}{2}$, $-$ после $\frac{1}{2}$

$P(t)$ max при $t = \frac{1}{2} = \sin^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$P(t)_{max} = P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{5+4\cdot\frac{1}{2}} + 2\sqrt{9-4\cdot\frac{1}{2}} + 3\pi = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} + 3\pi = 4\sqrt{7} + 3\pi$

Найдём α:

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{4} + 2\pi s, s \in \mathbb{Z} \\ -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\cdot z, z \in \mathbb{Z}$

Ответ: максимальный периметр равен $4\sqrt{7} + 3\pi$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\cdot z, z \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

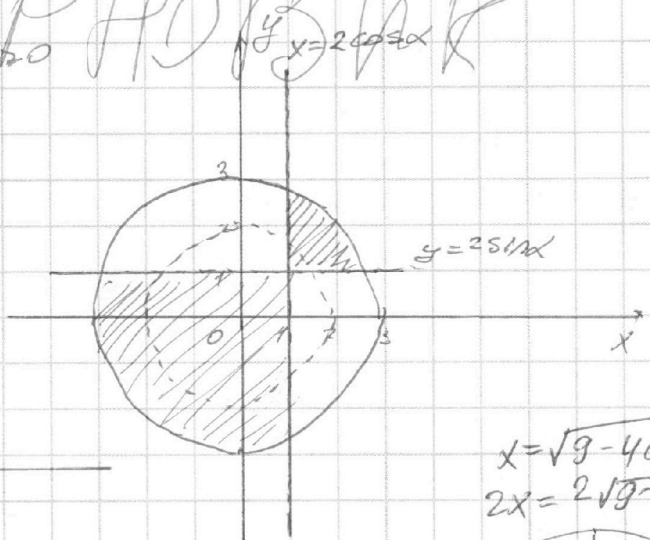
ЧЕРНОВИК

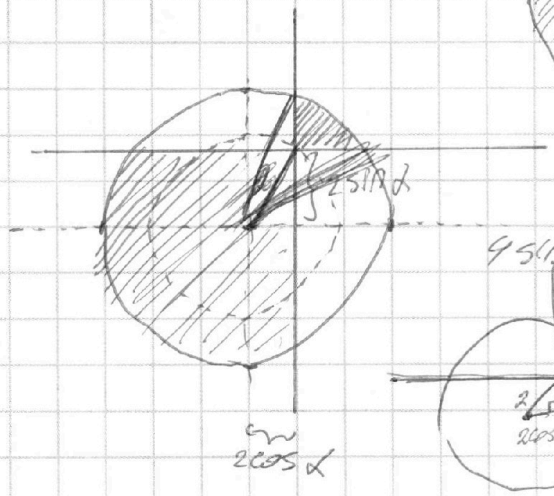
$$\begin{cases}(x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha)\geq 0\\ x^2+y^2\leq 3^2\end{cases}$$

$x=2\cos\alpha$

$y=2\sin\alpha$

$\cos\alpha=\sin\alpha$

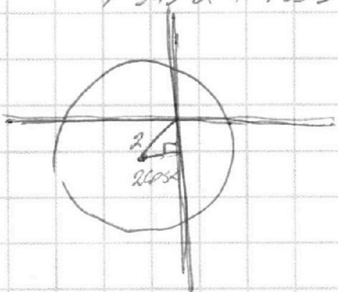


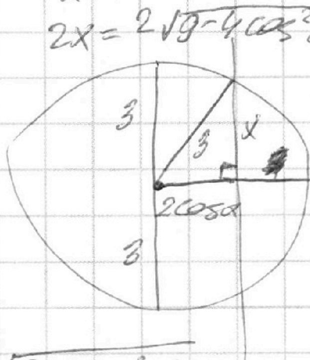


$x=\sqrt{9-4\cos^2\alpha}$

$2x=2\sqrt{9-4\cos^2\alpha}$

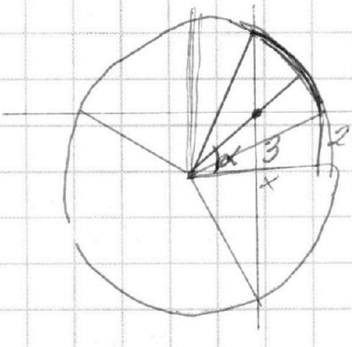
$4\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha=4$



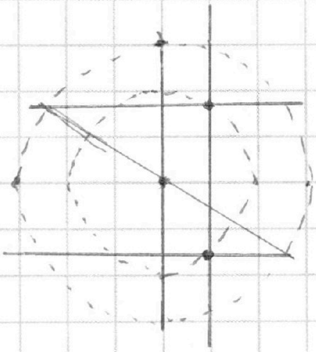


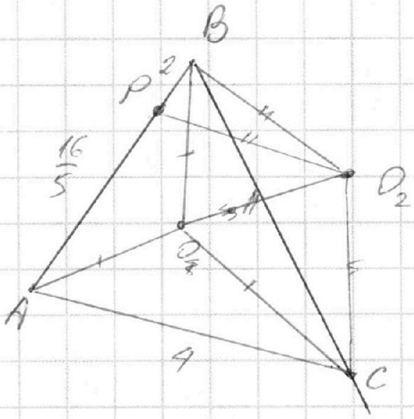
$y=\sqrt{9-4\sin^2\alpha}$

$2y=2\sqrt{9-4\sin^2\alpha}$



$x=\sqrt{9-4\sin^2\alpha}$



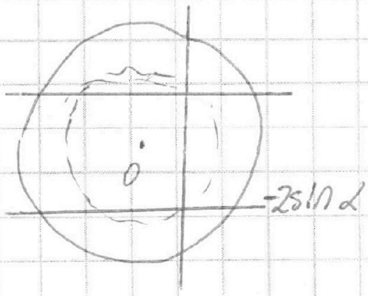


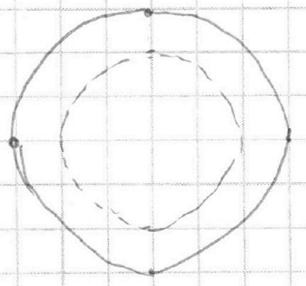
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\arccos\frac{x}{4}+\arccos\frac{y}{9}<2\pi$ arccos $\to [0;\pi]$

$-1\le\frac{x}{4}\le 1$ $-1\le\frac{y}{9}\le 1$

$x\ge-4$ $x\le 4$ $-9\le y\le 9$

$-4\le x\le 4$

4 билета → 4 билетов

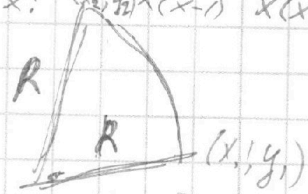
$\exists$ x 11-класс. и добавилось y билетов

0: 1 3 5

C_x^4 - всего сп. раздать билеты (выбрать 4 из x)

C_{x-2}^2 - подходящие

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4}=\frac{\frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}}{\frac{x!}{4!(x-4)!}}=\frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}\cdot\frac{4!(x-4)!}{x!}=\frac{4\cdot 3}{x(x-1)}=\frac{12}{x(x-1)}$$



~~C_{x+y}^4 C_{x+y-2}^2~~

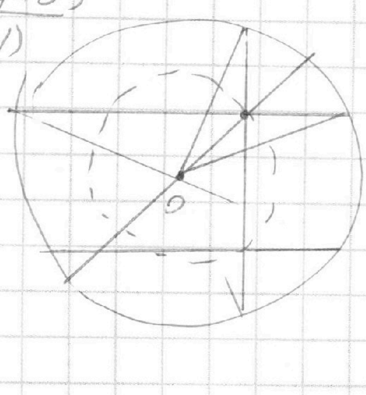
~~$\frac{\frac{(x+y-2)!}{2!(x+y-4)!}}{\frac{(x+y)!}{4!(x+y-4)!}}=\frac{(x+y-2)!}{2!(x+y-4)!}\cdot\frac{4!(x+y-4)!}{(x+y)!}=\frac{12}{x+y-}$~~

C_x^{y+4} - всего

C_{x-2}^{y+2} - подх.

$$\frac{(x-2)!}{(y+2)!(x-y-4)!}\cdot\frac{(y+4)!(x-y-4)!}{x!}=\frac{(y+4)(y+3)}{x(x-1)}$$

$$\frac{12\cdot 3{,}5}{x(x-1)}=\frac{(y+4)(y+3)}{x(x-1)}$$



$12\cdot 3{,}5=y^2+7y+12$

$12\cdot 7=2y^2+14y+24$

$84=2y^2+14y+24$

$2y^2+14y-60=0$

$y^2+7y-30=0$

$D=49+120=169$

$y=\frac{-7\pm13}{2}=3$

$\boxed{7}$

$12\cdot 7=84$

$84-24=60$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

$ABC = D^2$

$A \in \{1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999\}$

$A = 1111 \cdot X,\ X \in \{1 \dots 9\}$ $\quad 1111 \mid 11,\ 101$ $\quad = 101 \cdot 11 \cdot X,\ X \in \{1 \dots 9\}$

$B = \overline{a1b}$ $\quad \overline{1ab}$ $\quad \overline{ab1}$

$C = \overline{5a}$ $\quad \overline{a5}$

$101 \cdot 11 \cdot X = A$ $\quad B = \overline{a1b}$, $\overline{1ab}$, $\overline{ab1}$ $\quad C = \overline{a5}$, $\overline{5a}$

$\boxed{B = 101}$ $\quad 101 \cdot 11 \cdot 1 = 1111$ $\quad$ 101 – простое

202

303 $\quad 101$

404

505 $\quad 101 \cdot 11 \cdot 5 = 5555$

606 $\quad 101$

707

808 $\quad 11 \cdot 5$

909

N2.

$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

$M = x^3 - y^3 - 9xy$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} =$

$= \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$ $\quad xy = (x-3)(y+3)$

$xy = xy + 3x - 3y - 9$

$3x - 3y = 9$

$\boxed{x - y = 3}$ $\quad x = 3 + y$

$x^3 - y^3 - 9xy =$

$= (3+y)^3 - y^3 - 9(3+y) \cdot y =$

$= 27 + 3 \cdot 9 \cdot y + 3 \cdot 3 \cdot y^2 + \cancel{y^3} - \cancel{y^3} - 27y - 9y^2$

$27 + \cancel{27y} + \cancel{9y^2} - \cancel{27y} - \cancel{9y^2} = \boxed{27}$

$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x =$

$= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$

$\sin^2 \pi x - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$

$\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0$

$\cos 2\pi x + \cos(\pi \cdot (x - y)) = 0$

$\cancel{\cos\alpha + \cos\beta = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$

$\cos\alpha + \cos\beta = \cos\left(\frac{2\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+2\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) =$ $\quad \sin x = -\sin(-x)$

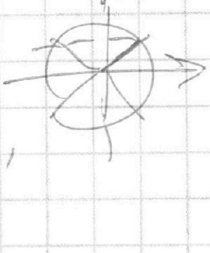
$= \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2}\right) =$

$= \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\beta-\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\beta-\alpha}{2} =$

$= \boxed{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$

$\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) =$

$= 2\cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$



$\cos 90 + \cos 45 =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos\frac{135}{2} \cos$

$\cos\frac{3\pi x - \pi y}{2}$ $\quad (x^{0.5})' = \frac{1}{2x^{0.5}} \cdot x'$

$\cos 60 + \cos 60 = 1 =$

$= 2\cos 60 \cdot \cos 0 = 1$