



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N°1

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{2ba}$$

$$C = \overline{3c}$$

$$b2a$$

$$ba2$$

$$A \cdot B \cdot C = D^2 \quad \text{натур.}$$

$$A = 1111 \cdot x = 101 \cdot 11 \cdot x, \text{ где } x \in [1; 9]$$

$$\text{Потому } D \text{ минимально} = 101^2 \cdot 11^2 \cdot x^2$$

$$C \text{ не может: } 101 \Rightarrow B = 101 \cdot y, \text{ где } y \in [1; 9],$$

$$\text{при этом в } B \text{ есть цифра } 2 \Rightarrow B = 202$$

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot x \cdot 101 \cdot 2 \cdot C = 101^2 \cdot 11 \cdot x \cdot 2 \cdot C$$

$$\text{Чтобы } D \text{ было натуральным, } C = (11 \cdot 2 \cdot x)z = 22xz,$$

$$\text{при этом } C \text{ содержит } 3 \text{ и } xz = v^2 \quad \text{его возможный делитель}$$

$$\text{Потому не может быть } (22 \cdot xz \text{ не содержит } 3), \text{ значит}$$

$$x:2, \text{ чтобы } C:2 \text{ (и была возможной содержать } 3) \text{ и}$$

$$\text{чтобы } ABC - \text{натур. квадраты пяти чисел}$$

$$x = 2 \text{ или } x = 8 \text{ (} 2^2 \text{ или } 2^4 \text{) или } x = 2 \cdot w' \text{ (} w' \text{ делит } C)$$

$$\text{Потому } C = 11z, \text{ где } z \text{ квадрат, } z \in [1; 9]$$

$$\text{Чтобы } C \text{ содержала } 3, z = 3 \text{ (} C = 33 \text{), тогда } w = 3$$

$$x = 2 \cdot 3 = 6 \text{ (больше квадратов не получится, иначе числа будут не } 2\text{зн., } 3\text{зн., } 4\text{зн., соответственно)}$$

$$\Rightarrow C = 33, B = 202, A = 6666$$

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = (6666)^2$$

Ответ: только одна тройка! 6666; 202; 33



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{y+x+2}{xy} \quad N=2$$

$x, y \in \text{цел.}$

$$K = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{y+1+x-1+2}{xy+x-y-1} = \frac{y+x+2}{xy+x-y-1}$$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+x+2}{xy+x-y-1}$$

$$\frac{(y+x+2)(xy+x-y-1) - (y+x+2)xy}{xy(xy+x-y-1)} = 0$$

$$\frac{(y+x+2)(x-y-1)}{xy(xy+x-y-1)} = 0$$

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy \neq 0 - \text{невозможно} \\ xy+x-y-1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-2 - \text{невозможно} \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ (x-1)(y+1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ (x-1)(y+1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ (x-1)(y+1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x=y+1$$

$$M = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

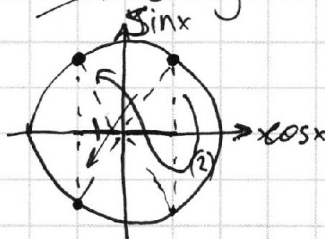
N=3

$$\begin{aligned} a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\ (\sin \pi x)^2 + \sin \pi x \cdot \sin \pi y &= (\cos \pi x)^2 + \cos \pi x \cdot \cos \pi y \\ \sin \pi x \cdot \sin \pi y &= \cos \pi \cdot 2x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y \\ \sin \pi x \cdot \sin \pi y &= \cos \pi \cdot 2x + \cos \pi(x+y) + \sin \pi x \cdot \sin \pi y \\ \cos \pi \cdot 2x &= -\cos \pi(x+y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi \cdot 2x + \pi &= \pi(x+y) \quad (1) \\ -\pi \cdot 2x + \pi &= \pi(x+y) \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= x + y \\ 1 - 2x &= x + y \\ x &= y - 1 \\ x &= \frac{y-1}{3} \end{aligned}$$

Ответ: y - любое, $x \in \{y-1; \frac{y-1}{3}\}$



$$b) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{y-1}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{1-y}{15} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

если $y = -4$

$$\arcsin(-1) + \arccos(-1) = 2\pi$$

тогда $-4 \leq y \leq 4$

если $y = 16$ то $0 \leq y \leq 4$

$$\arcsin(1) + \arccos(-1) = \pi$$

тогда $\arcsin \frac{6}{15} < \frac{\pi}{2}$

тогда не достигаем $\frac{3\pi}{2}$

или $x = \frac{1-y}{3}$ - неконкретно

Для целых y : $y = -4$ - не подходит

$$y = -3: \arcsin(-\frac{4}{5}) + \arccos(-\frac{3}{4}) > \frac{3\pi}{2}$$

тогда $y = -2$

$$y = -2: \arcsin(-\frac{3}{5}) + \arccos(-\frac{2}{4}) > \frac{3\pi}{2}$$

тогда $y = -1$

$$y = -1: \arcsin(-\frac{2}{5}) + \arccos(-\frac{1}{4}) < \frac{3\pi}{2}$$

тогда $y = 0$

$$y = 0: \arcsin(-\frac{1}{5}) + \arccos(0) < \frac{3\pi}{2}$$

тогда $y = 4$

$$y = 4: \arcsin(\frac{3}{5}) + \arccos \frac{3}{4}$$

Ответ: $(x, y) \in$

$$\begin{aligned} &\{(-2; -1); (-1; 0); \\ &(0; 1); (1; 2); (2; 3); (3; 4)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cup \{(1; -2) \cup (0; 4) \\ &\cup (-1; 4)\} \end{aligned}$$



при уменьшении y угол тоже уменьшается



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N° 4

в начале месяца: 4
в конце месяца: 3

$P_1 = \frac{n}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$, где n - кол-во приглашенных

$P_2 = 2,5 P_1 = \frac{4+x}{n} \cdot \frac{3+x}{n-1}$, где x - кол-во др. билетов

$$2,5 \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} = \frac{4+x}{n} \cdot \frac{3+x}{n-1}$$

$$30 = (4+x)(3+x)$$

$$x^2 + 7x + 18 = 0$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 18 = 49 - 72 = -23 = 11^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 11}{2} = -9; 2$$

$$(x-2)(x+9) = 0$$

Отрицательное число билетов быть выделено не можем, поэтому $x = 2$

$$4 + x = 4 + 2 = 6$$

Ответ: 6 билетов



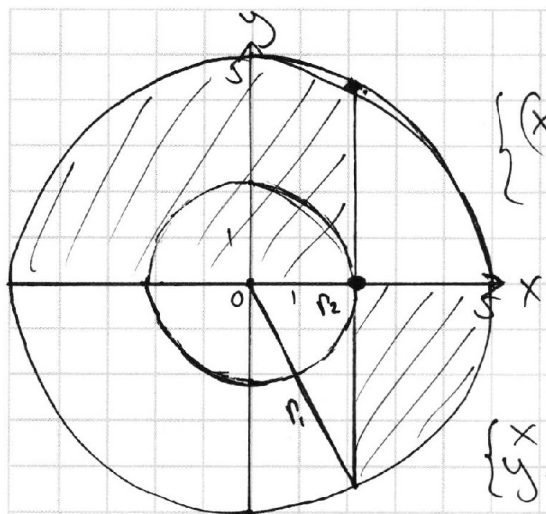
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N=6



$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 25 - \text{окр. с } O(0;0) \text{ и } r_1 = 5 \end{cases}$$

$$(1): \begin{cases} x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \geq 3\sqrt{2} \cos \alpha \\ x \geq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \leq 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y = 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 18 \sin^2 \alpha + 18 \cos^2 \alpha = 18$$

$\Rightarrow (\cdot) \cap$ прямых x и y ходит по окр. с $O(0;0)$ и $r_2 = 3\sqrt{2}$

Область значений ~~либо~~ меньше x и больше y в этой точке
либо больше x и меньше y

Т.е. эти 2 хорды (прямые x и y) $\perp$ друг другу, но друг
или них (этих зонах) всегда занимают половину окр.

$$P_{\text{окр.}} = \pi r^2 = 5\pi$$

Площадь $(\cdot) \cap$ прямых x и y ходит по окр., поэтому ^{сумма} ~~длина~~
этих прямых = const.

$$P_{\text{прямых}} = d + \text{хорда}$$

$$\text{хорда (по th Птол.)} = 2 \cdot \sqrt{r_1^2 - r_2^2} = 2 \cdot \sqrt{5^2 - (3\sqrt{2})^2} = 2 \cdot \sqrt{25 - 18} = 2\sqrt{7}$$

$$P_{\text{прямых}} = 2 \cdot 5 + 2\sqrt{7} = 2(5 + \sqrt{7})$$

$$M = P_{\text{окр.}} + P_{\text{прямых}} = \text{const} = 5\pi + 2(5 + \sqrt{7})$$

при всех α .

Ответ: $5\pi + 2(5 + \sqrt{7})$; $\forall \alpha$

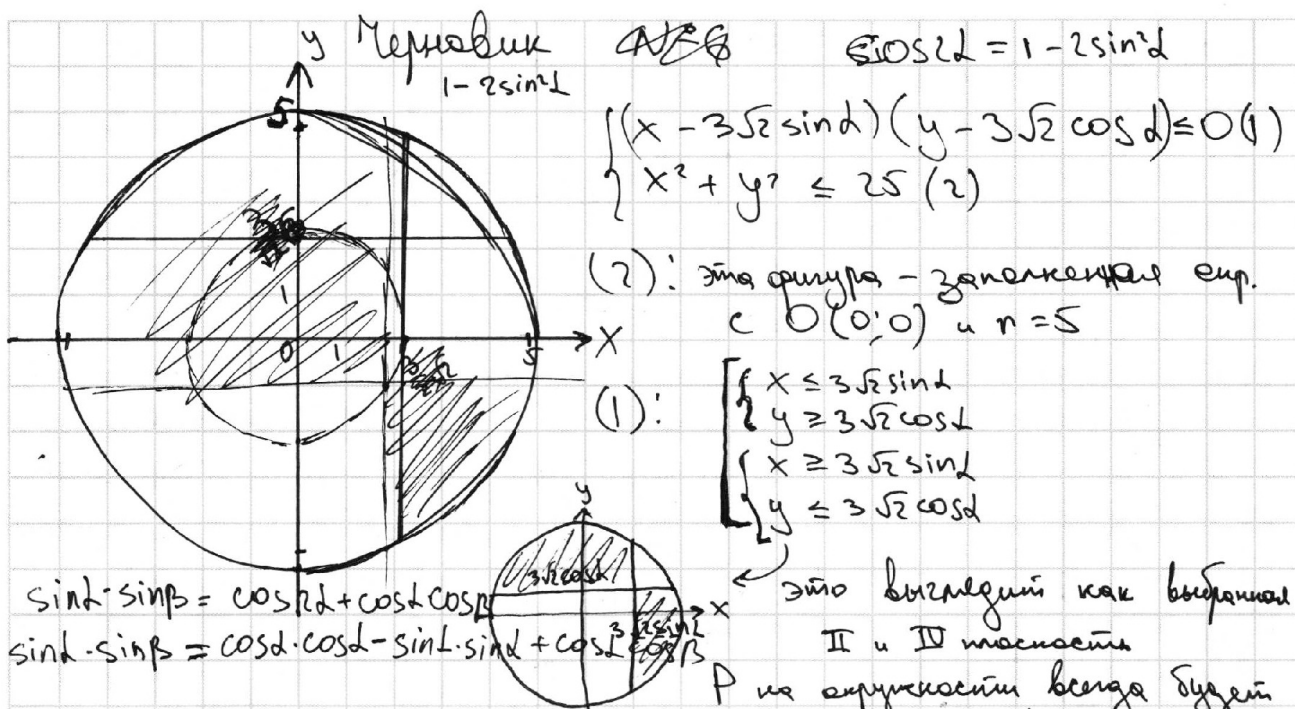


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

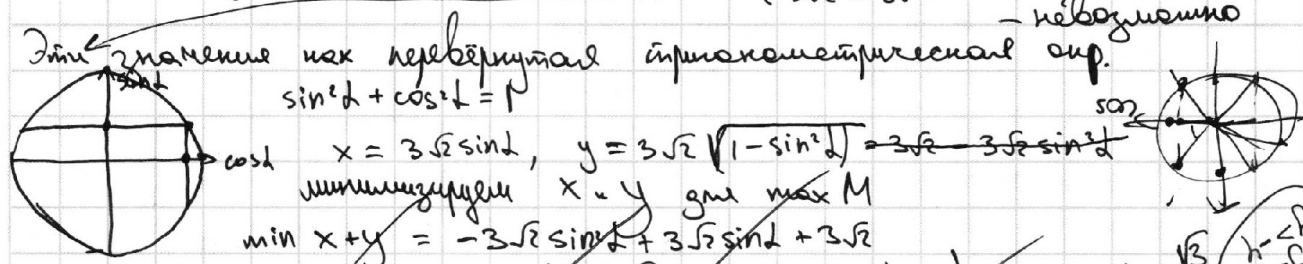
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Получа max P, когда прямая $y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$ и $x = 3\sqrt{2}\sin\alpha$ проходит через O и равна диаметру экр. (max длина)

$\Rightarrow M_{\max} = \pi r + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 5(\pi + 4) = \frac{5}{1-h} \quad 0 = \frac{h}{h} \quad 1 - = \frac{5}{1-h}$

Но по симметрии $x=0, y=0 \Rightarrow \begin{cases} 3\sqrt{2}\sin\alpha = 0 \\ 3\sqrt{2}\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = 0 \\ \cos\alpha = 0 \end{cases}$ - невозможно



$$x^2 + y^2 = 18(\sin^2\alpha + 1 - \sin^2\alpha) = 18$$

$$1 > h \quad h \neq h - 1 - h = 5 -$$

$$0 > \frac{5}{1-h} \Rightarrow \frac{5}{1-h} = 1 - \left(\frac{2}{\cos\frac{\pi}{6}}\right)^2 = \cos\alpha$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\alpha = (\sqrt{1+h}) \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{h}{5} = 0.9509 : 0.9509$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение

$2,7 \div 3 = 5,1$

$5,1 \cdot 3 = 15,3$

$l = 2\pi r \times \frac{1111}{2 \cdot 3} \times \frac{3333}{245 \cdot 39}$

$l = \frac{5\pi}{4}$

$A -$
 $B -$
 $C -$

$A \cdot B \cdot C = D^2$

$3\sqrt{2} \sin \alpha > x$
 $2\sqrt{2} \cos \alpha < y$

$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 2\sqrt{2} \cos \alpha) = 0$

$x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$
 $y = 2\sqrt{2} \cos \alpha$

$P = \frac{5\pi}{2} \times 20 \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3}$
 $\cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$A = 1111 \cdot X = 101 \cdot 11 \cdot X$

$\text{th cos: } \text{Tange } B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot X$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$

$BC^2 = X^2 + X^2 - 2X^2 \cdot \cos \alpha$

$(x - 3\sqrt{2}) \cdot y \leq 0$

$\angle BPO = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}) = 90^\circ + \frac{1}{2}$

$\angle APO = 180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2}) = 90^\circ - \frac{1}{2}$

$\angle AHP = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = 90^\circ$

$O - (1) \cap \text{ep. } \perp : AH = HC \Rightarrow PH \text{ is the Tang.}$

$\text{become with } \text{Pangle}$

$\frac{15}{2} = \frac{25}{12}$

$\frac{15}{9} = \frac{25}{12}$

$\frac{3}{9} = \frac{5}{12}$

$-6\sqrt{2} \sin \alpha + 3\sqrt{2} = 0$

$2 \sin \alpha = 1$

$\sin \alpha = \frac{1}{2}$

$2 \sin^2 \alpha + 1 + \sin \alpha \sin \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$

$(2 \sin^2 \alpha + 1 + \sin \alpha \sin \beta)^2 = (1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \beta)$

$y^2 + 2y^2 + y + y^2 + y + y^2 + y + 1 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

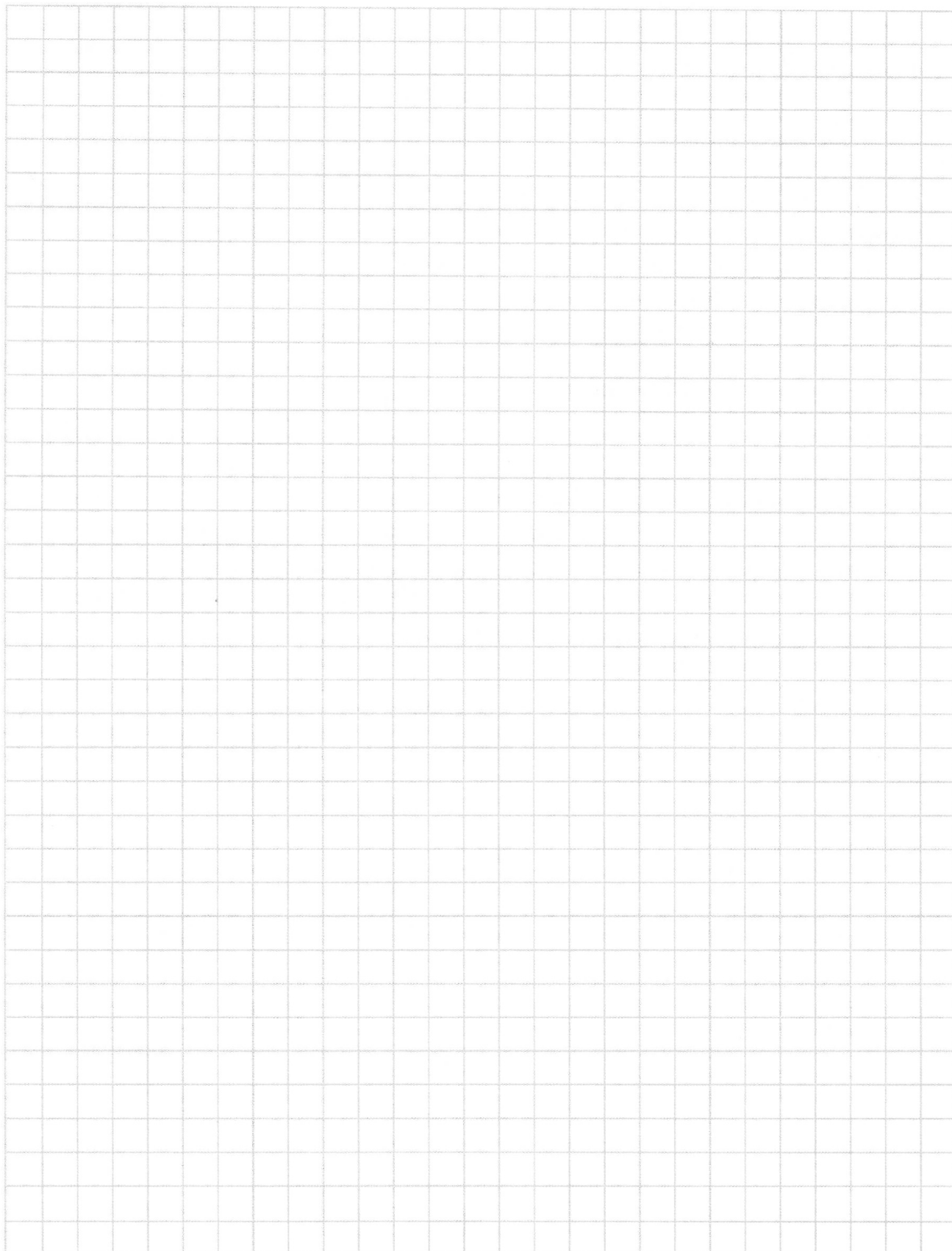
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 4