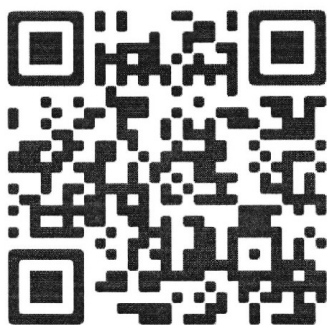




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 $A = 1111 \cdot a$ ← цифра $1111 = 11 \cdot 101$
 $B = bcd$ $b/c/d = 7$ 101-местное число
 $C = ef$ $e/f = 1$
 $A \cdot B \cdot C = n^2$ $11^2 \cdot 101^2 \Rightarrow B/c : 101, \text{ но } C < 101 \Rightarrow B : 101$
 $B = 101 \cdot m$ $B = 707, \text{ т.к. цифра десятков } = 0 \text{ а цифра сотен и}$
 N $\text{единицу должна совпадать} \Rightarrow \text{равна } 7$
 $1111 \cdot a \cdot 707 \cdot C = n^2$
 $11 \cdot a \cdot 7 \cdot C : 11^2 \cdot 7^2$
 $\Rightarrow C : 11 \Rightarrow \text{цифра десятков и единица совпадает} \Rightarrow$
 $\text{равна } 1 \text{ из условия} \Rightarrow C = 11$
 $101^2 \cdot 11^2 \cdot a \cdot 7 = n^2$
 $a \cdot 7$ — квадрат натурального числа, т.к. a — это цифра $\Rightarrow$
 $a = 7$
 $\Rightarrow A = 7777$
 Ответ: $\begin{cases} A = 7777 \\ B = 707 \\ C = 11 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2} \quad k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \text{const} \text{ при } x = x_0 - y, y = y_0 + y$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy - ?$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y+y} + \frac{3}{(x-y)(y+y)}$$

$$\frac{x+y+3}{x \cdot y} = \frac{y+y+x-y+3}{(x-y)(y+y)}$$

$$(x+y+3) \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{(x-y)(y+y)} \right) = 0$$

$$> 0 \quad \frac{xy - y + y + x - xy - 16}{xy(x-y)(y+y)} = 0$$

$$\frac{4(x-y) - 16}{(xy)(x-y)(y+y)} = 0$$

$$M = x^3 - y^3 - 12 \cdot x^2 = -12x^2, x \neq 0, x \neq y$$

$$x - y - 4 = 0$$

$$x = y + 4$$

$$M = (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y = 4 \cdot (y^2 + 8y + 16 + y^2 + y^2 + 4y) - 12y^2 - 48y = 12y^2 + 48y + 64 - 12y^2 - 48y = 64$$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \quad a) \quad & (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y \\ & 2 \sin \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi(y+x)}{2} \right) - \sin \pi y = 2 \cos \left(\frac{\pi(y+x)}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right) \cos \pi y \\ & \cos \left(\frac{\pi(y+x)}{2} \right) \left(\sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \sin \pi y - \cos \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \cos \pi y \right) \right) = 0 \\ & \cos \left(\frac{\pi(y+x)}{2} \right) \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi(y-x)}{2} + \pi y \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

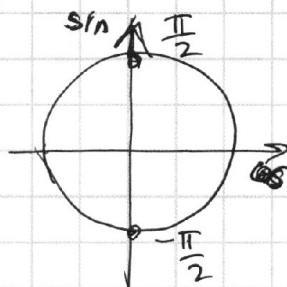
$$1. \quad \frac{\pi(y+x)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$y+x = 2n+1 \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2. \quad \frac{\pi}{2} (3y-x) = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3y-x = 1+2n \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:
$$\begin{cases} y+x=2n+1 \\ 3y-x=2n+1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$



б)

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{x}{7} > \arcsin \frac{y}{4}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{x}{7} \right) > \frac{y}{4}$$

$$\cos \left(\arccos \frac{x}{7} \right) > \frac{y}{4}$$

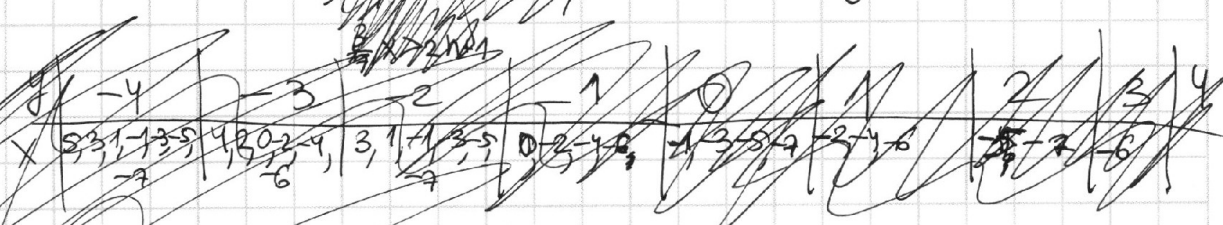
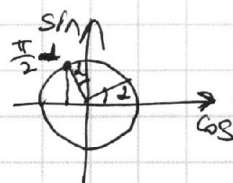
$$\frac{x}{7} > \frac{y}{4}$$

$$4x > 7y$$

$$\begin{cases} 0 \leq \arccos \frac{x}{7} \leq \pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$-1 \leq \frac{x}{7} \leq 1 \Rightarrow -7 \leq x \leq 7$$

$$-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \Rightarrow -4 \leq y \leq 4$$



при каждом значении y будем подбирать подходящие x, удовлетворяющие

$$\begin{cases} y+x=2n+1 \\ 3y-x=2n+1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$4x \leq 7y$$

Ответ: 33 пары



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4x \geq y + 7 \\ x, y \text{ — целые } \\ -7 \leq x \leq 7 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

При каждом y выберем x , удовлетворяющий условиям.

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3	-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3	-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3	-2, -1, 0, 1, 2, 3	-1, 0, 1, 2, 3	0, 1, 2, 3	1, 2, 3	2, 3

Ответ: 33 пары



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 4 билета $\rightarrow$ n билетов стало

~~пусть~~ пусть x — одиннадцатиклассников
вероятность в начале месяца:

$$1) w_1 = \frac{(x-2)(x-3)}{2} = \frac{12}{x(x-1)}$$

выбираем 2-х
человек помимо
Петю и Васи

вероятность в конце месяца:

$$2) w_2 = 11 w_1 = \frac{C_{x-2}^{n-2}}{C_x^n} = \frac{n!}{(n-2)! x(x-1)}$$

выбираем людей помимо
Васи и Петю

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 121$$

случайным образом

распределим билеты между всеми одиннадцатиклассниками

$$n \cdot (n-1) = 121 \Rightarrow n = 12, \text{ т.к. } 121 = 11 \cdot 12, \text{ а } n - \text{натуральное число}$$

Ответ: 12 билетов всего было выдано на концерт (на 8 билетов, чем
отидут в начале месяца) (8 билетов выдано в конце месяца)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

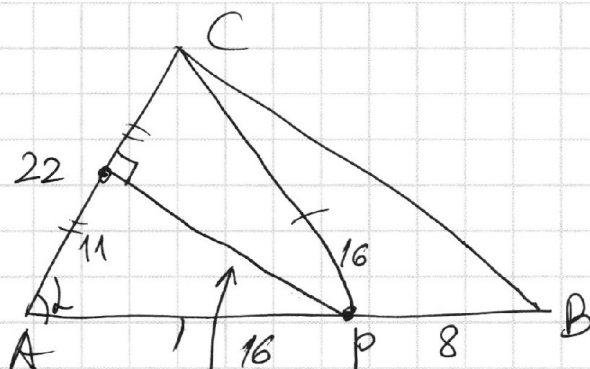
5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{16^2 - 11^2} = \sqrt{27.5} \Rightarrow \sin \angle C = \frac{\sqrt{27.5}}{16}$$
$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot AB}{2} \cdot \sin \angle C = \frac{22 \cdot 24}{2} \cdot \frac{\sqrt{27.5}}{16} = \frac{33}{2} \cdot 3\sqrt{15} = \frac{99}{2} \sqrt{15}$$

$$\text{Ответ: } \frac{99}{2} \sqrt{15} = S_{ABC}$$



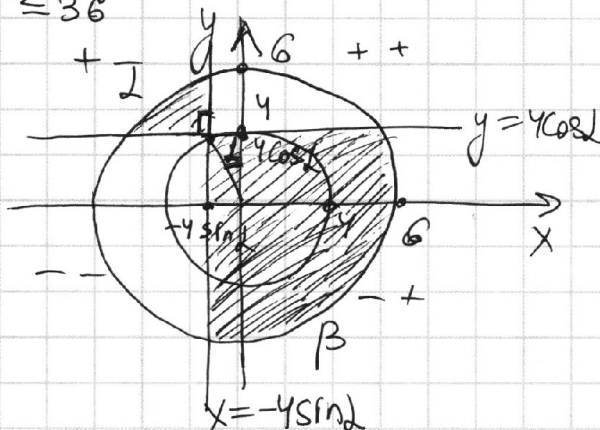
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

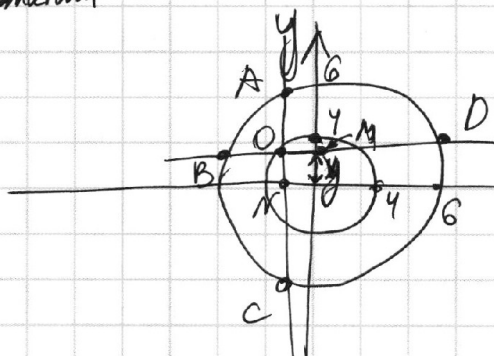
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{6} \begin{cases} (x+4\sin 2)(y-4\cos 2) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$



длины на окружности в сумме дают $\pi \cdot 6$, т.к. $90^\circ = \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = \pi$ — половина длины окружности — это сумма дуг при любом положении



$$M = \pi \cdot 6 + 2NA + 2BM$$

$$y = 4 \cos 2$$

$$OM = \sqrt{16 - y^2}$$

$$BM = MD = \sqrt{36 - y^2}$$

$$AN = NC = \sqrt{36 - (16 - y^2)} = \sqrt{20 + y^2}$$

$$2AN + 2BM \rightarrow \max \Rightarrow \sqrt{20 + y^2} + \sqrt{36 - y^2} \rightarrow \max$$

Пусть max значение = m

Тогда m^2 тоже стремиться к

$$\left(\sqrt{20 + y^2} + \sqrt{36 - y^2} \right)^2 = m^2$$

$$\underbrace{20 + y^2 + 36 - y^2}_{const} + 2\sqrt{(20 + y^2)(36 - y^2)} = m^2$$

$$\Rightarrow (20 + y^2)(36 - y^2) \rightarrow \max$$

$$20 \cdot 36 - y^4 + 16y^2 \rightarrow \max, \text{ при } y^2 = -16$$

$$\frac{-2}{-2} = 8$$

$$\Rightarrow \text{максимум достигается при } y^2 = 8 \Rightarrow (4 \cos 2)^2 = 8$$

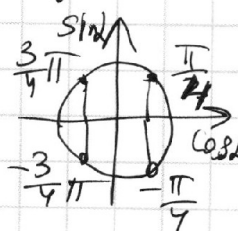
$$\Rightarrow \cos^2 2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $M = \pi \cdot 6 + 4\sqrt{28}$

при $2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$





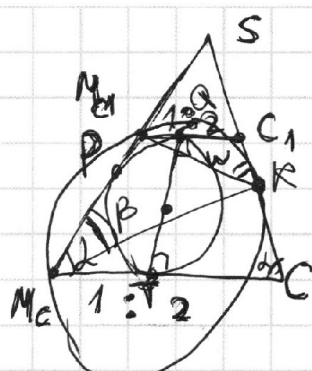
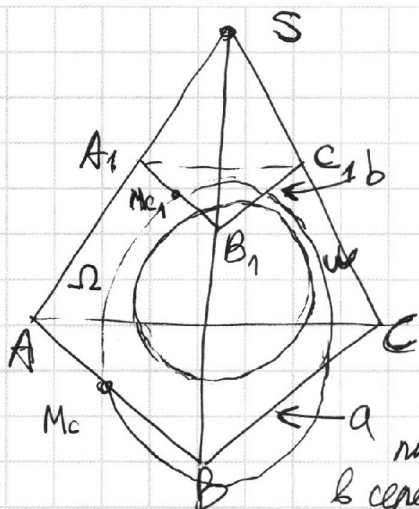
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7



В силу симметрии правильной пирамиды SC касается ребер оснований в серединах, а SB касается оснований в точке пересечения медиан, а боковой грани на оси симметрии трапеции

M_c - середина $A_1 B_1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} b = C_1 M_c$

M_c - середина $AB \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} a = M_c C$

$\Rightarrow$ т.к. T - центр Ω медиан $\triangle ABC$, то $M_c T = \frac{\sqrt{3}}{6} a = M_c P$ (касание

$M_c Q = \frac{\sqrt{3}}{6} b = M_c R$ (касание окружности

угол наклона боковой грани пирамиды $= \beta$, т.к. $M_c SC \perp AB$.

$$\cos \beta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} (a+b)}{\frac{\sqrt{3}}{6} (a+b)} \Rightarrow \frac{a-b}{a+b}$$

TK - касание Ω с SC

$\angle M_c K C = \angle M_c K C_1$ (угол между касательной и хордой)

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} b\right)^2 = C_1 K^2 + M_c K^2 - 2 C_1 K \cdot M_c K \cdot \cos \beta$$

$$M_c K^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6} (a+b)\right)^2 + M_c C^2 - 2 M_c C \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} (a+b) \cdot \cos \beta$$

$$M_c K^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} (a+b) - C K\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6} (a+b) - C K\right) \cos \beta$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \beta}{\frac{\sqrt{3}}{2} a} = \frac{\sin (180^\circ - \beta)}{M_c K} = \frac{\sin \beta}{M_c K} \Rightarrow M_c K = \frac{\sqrt{3}}{2} a \frac{\sin \beta}{\sin \beta}$$

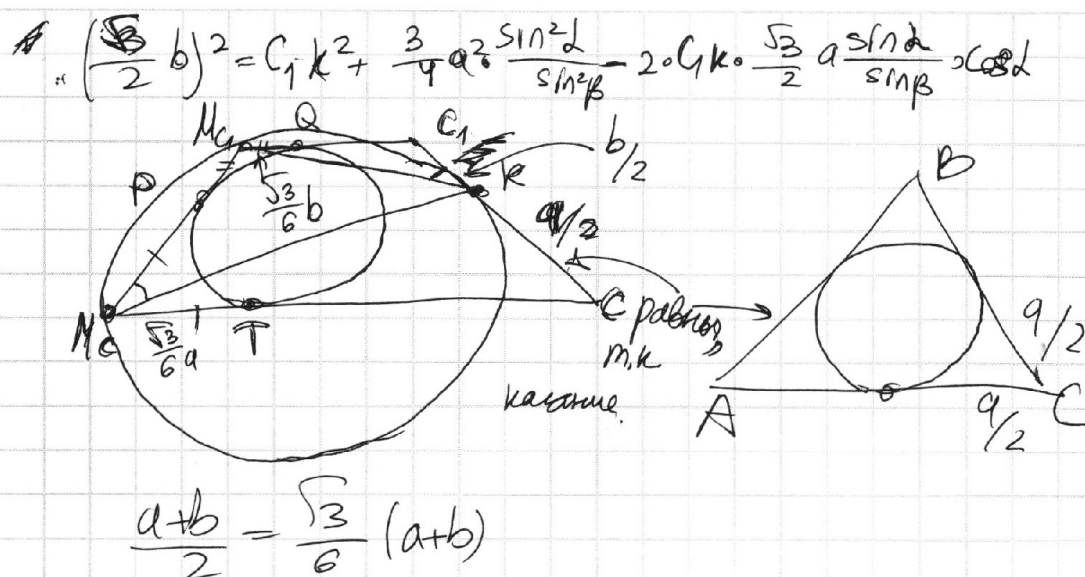


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

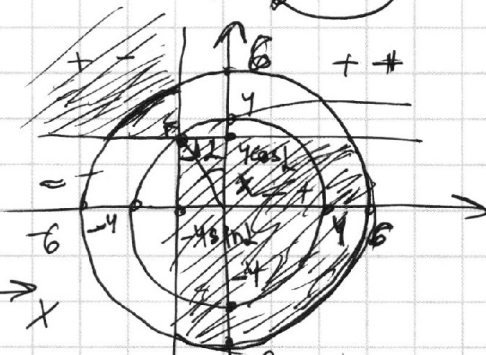
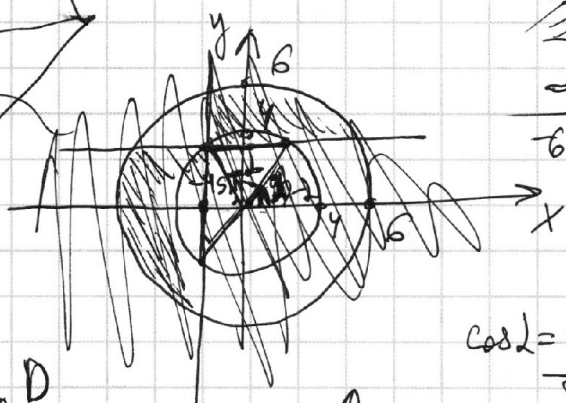
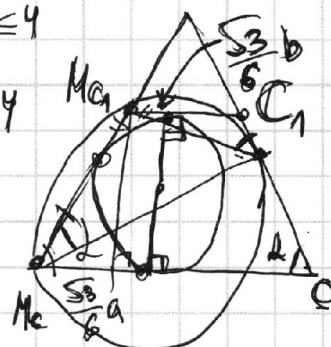
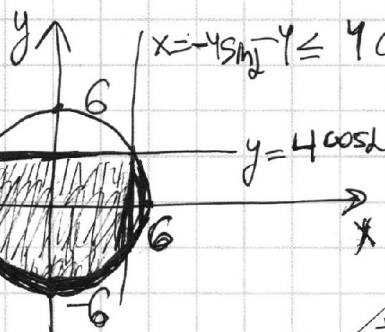
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

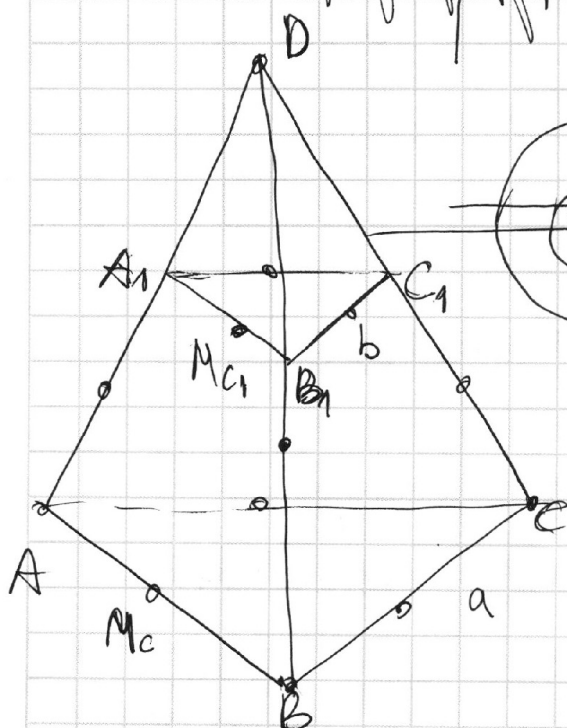
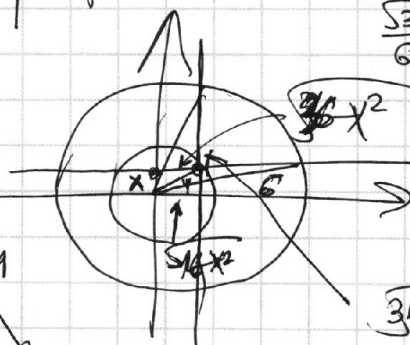
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{6} \begin{cases} (x+4\sin 2)(y-4\cos 2) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

$$-4 \leq 4\sin 2 \leq 4$$



$$\cos 2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}(a-b)}{\frac{\sqrt{3}}{6}(a+b)} = \frac{a-b}{a+b} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha+\beta = \pi$$



$$36 - 16 + x^2 = \sqrt{20+x^2}$$

$$\sqrt{36-x^2} + \sqrt{20+x^2} \rightarrow \max$$

$$0 < x^2 \leq 16$$

$$(36-x^2)(20+x^2) \rightarrow \max$$

$$-x^4 + 16x^2 + 36 \cdot 20 \rightarrow \max$$

$$x^2 = \frac{46}{2} = 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

