



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Исходя из условия, $A = \alpha \cdot 1111$, где α -цифра от 1 до 9. Тогда если $A = \alpha \cdot 11 \cdot 101$.

Так $A \cdot B \cdot C$ -кодом памят. гласа, то все простые входят в разложении жёстко (исключительно) раз. 101-простое. Тогда ~~число~~ - это либо 101 или с делителем на 101.

C -двузначное памят. гласа, поэтому не может делиться на 101.

Тогда B делится на 101. Так B -трехзначное, то единственное возможное значение $B = 101$. Значит, что одна из цифр B - единица. 11-простое $B/11$. Тогда $C : 111$ и ~~число~~ ^{одна из} 5.

Тогда (C -трехзначное) $C = 111$.

То есть $A \cdot B \cdot C = \alpha \cdot 11 \cdot 101 \cdot 111 = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Тогда $\alpha = 5$, откуда $\alpha = 5$. Откуда есть ошибка.

Ответ: $A = 5555$
 $B = 101$
 $C = 55$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Запишем поленство, исходя из условия

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} - 250$$

рассмотрим

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)} \leftarrow$$

$$\leftarrow \frac{y+g+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \text{ Так же учитывая } x, y > 0, \text{ то } x+y+1 > 0.$$

тогда легко, что $xy = (x-3)(y+3)$.

$(x \neq 3, y \neq -3) (x \neq 0, y \neq 0)$. Так же

$$xy = xy + 3x - 3y - 9, \text{ т.е. } 0 = x - y - 3, \text{ т.е.}$$

$$3 = x - y. \quad (1) \quad M = x^3 - y^3 - 9xy \quad (2) \quad (x \neq y)$$

$$(3) \quad (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy = 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy \quad (3)$$

$$(3) \quad 3x^2 - 6xy + 3y^2 = 3(x-y)^2 = 27. \quad \text{Также}$$

значение выражения, например, при

$$x = y + 3. \quad x = 3, \quad y = \frac{1}{3}, \quad x = \frac{10}{3}.$$

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a) Уравнение из уравнения получено следующим образом:
(раскрытие скобок и переносы (переместить)).

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi y = \cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x$$

но получилось

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$0 = \cos(\pi x - \pi y) + \cos(2\pi x)$$

$$0 = 2 \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y + 2\pi x}{2} + \cos \frac{\pi x - \pi y - 2\pi x}{2}$$

$$0 = \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} + \cos \frac{\pi x + \pi y}{2}$$

тогда $\left[\cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$

$$\left. \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right]$$

но есть $\left[\begin{array}{l} 3x - y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

откуда есть одинак.

Одн. $\left\{ \begin{array}{l} y = t, t \in \mathbb{R}, x = \frac{1+2k+t}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = t, t \in \mathbb{R}, x = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

b) Уравнение имеет ограничения

использовано, необходимо $\begin{cases} \frac{x}{4} \in [-1; 1] \\ \frac{y}{3} \in [-1; 1] \end{cases}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Отмечено $x \in [-4; 4]$, $y \in [-9, 9]$. При таких x, y выражение $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \in [0; \pi]$, т.к. наше из условия лежит в $[0; \pi]$.
Также $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$ неоднозначно, чтобы $\arccos \frac{x}{4} \neq \pi$, но есть $\begin{cases} x \neq -4 \\ \arccos \frac{y}{9} \neq \pi \end{cases}$

Тогда $x \in [-4; 4]$, $y \in (-9, 9]$. Наиболее все такие x, y - симметричные, следующие условиям из а). Будем переводить по логарифмам x , получая $\log_2 x = k$, $\log_2 y = l$.

1) $x+y = 1+2^k + 2^l$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Задача, что $x+y$ даёт нечётное число, потому x, y разные (к наименее)

x	$\log_2 x$	y
0	0	9, 7, 5, 3, 1, -1...
1	1	8, 6, 4, 2, 0...
2	2	7, 5, 3, 1, -1...
3	3	6, 4, 2, 0...
4	4	5, 3, 1, -1...
-1	-1	8, 6, 4, 2, 0...
-2	-2	7, 5, 3, 1, -1...
-3	-3	6, 4, 2, 0...

$$4 \cdot 9 + 4 \cdot 9 = 72.$$

$i+2^k, k \in \mathbb{Z}$.

2) $3x-y = 1+2^k+2^l$. Аналогично 1, 2.

$3x$	$\log_2 x$	y
0	0	9, 7, 5, 3, 1, -1...
1	1	(не четные) 8, 6, 4, 2, 0...
2	2	(не четные) 7, 5, 3, 1, -1...
3	3	6, 4, 2, 0...
4	4	5, 3, 1, -1...
-1	-1	8, 6, 4, 2, 0...
-2	-2	7, 5, 3, 1, -1...
-3	-3	6, 4, 2, 0...
-4	-4	5, 3, 1, -1...

Также с учётом

ограничений, общее количество пар x, y равно

-

-

$$4 \cdot 9 + 4 \cdot 9 = 72.$$

Номер окончательного



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задание, где ~~которое~~ служит 1 и 2
ищет однотипные пары х-у, т.е пересекаются
такие пары различных пары исчезают,
убрав повторяющиеся. Таких есть 3.

Ответ: 72.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решим некоторую задачу о распределении предметов.

Пусть есть x различных предметов, из которых y предметов принадлежат Петре и Вите, а остальные $x-y$ предметам. Рассмотрим задачу о том, сколько способов выбрать из x предметов y предметов.

Решение задачи сводится к нахождению коэффициента при y в разложении выражения $\frac{x!}{y!(x-y)!}$.

Решение в книге показывает, что

коэффициент при y в разложении выражения $\frac{x!}{y!(x-y)!}$ равен

или же, $\frac{y!}{x!} \cdot \frac{x!}{(x-y)!}$, то есть

$$\frac{\frac{y!}{x!} \cdot \frac{x!}{(x-y)!}}{\frac{(x-y)!}{x!}} = \frac{y!}{(x-y)!}, \text{ что равносильно } \frac{\frac{(x-y)!}{2!}(x-y)!}{\frac{y!}{2!}(x-y)!} = \frac{(x-y)!}{y!(x-y)!} \quad (\text{также})$$

$$(\text{также}) \frac{\frac{(x-y)!}{y!(x-y)!}}{\frac{(y-1)!(x-y)!}{y!(x-y)!}} = \frac{1}{x(x-1)} \quad \text{при } x \neq 0, x \neq 1$$

также равносильно

$$42 = y(y-1) \Leftrightarrow (y+7)(y-7)(y+6)=0.$$

Так $y > 0$, то $y=7$. Рассмотрим это значение y и то, что x можно поделить только на 7, т.к. это делит x нацело, например 20, но не делит никакими другими числами кроме 1. Ответ: 7

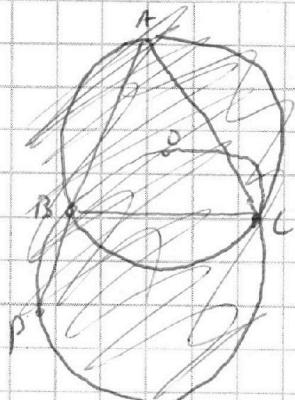


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

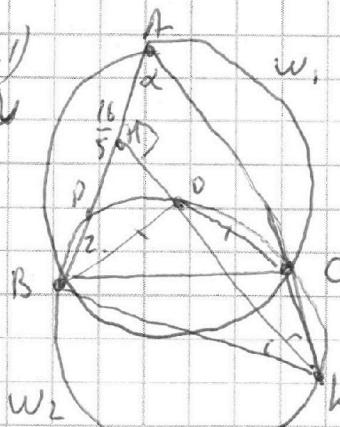
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



(рис 1)



Задача № 1.

О сенокосах где

на огор-ти w_2 :

APA

$$AP \cdot AB = AC \cdot AK$$

$$\text{т.е. } \frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5} = 4 \cdot AK,$$

откуда $AK = \frac{4 \cdot 26}{25} > 4 = AC$, т.е. картинки такие,

как на рис 1). Рассмотрим $\angle BAC = \alpha$. Задача,

см овощи - рис. ℓw_2 , $BO = OC$, т.е. $O-$

одинаковые дюжины w . Тогда $\angle BKO = \angle CKO$ и

также ℓw_2 придел $\angle CKO = \angle CBO$ очевидно

так $\angle BOC = 2\angle BAC$, т.е. $\angle CBO = 90^\circ - \alpha$. Рассмотрим

угол $KO \perp AB$. Тогда по сумме углов $\angle BAK$,

$\angle AKA = 90^\circ$. Из $\triangle AAK$, $\sin \alpha = \frac{AK}{AA}$. Но m .

Найдем же какая наибольшая AK ?

$AK^2 = AK^2 - AK^2$? Задача, это $ABCA -$
 $- P/8$, мы это доказали сомн. с логотипом.

Тогда $AK = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{5} = \frac{13}{5}$. Тогда

$$AK^2 = \left(\frac{13}{5}\right)^2 - \left(\frac{13}{5}\right)^2 = \frac{13^2}{25} \cdot 39, \text{ т.е. } m = \frac{13}{25} \sqrt{39}.$$

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{также } \sin x = \frac{\frac{13}{25} \sqrt{39}}{\frac{4\sqrt{26}}{25}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

Также $S_{ABC} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{39}}{2} \cdot \frac{26}{5} =$$

$$= \frac{26\sqrt{39}}{20}$$

Ответ:

$$\frac{26\sqrt{39}}{20}$$

I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

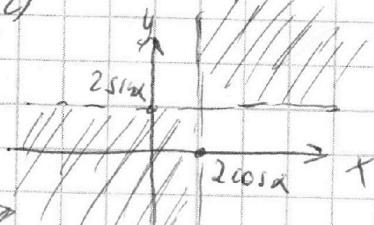
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 \leq 9 \quad (2) \end{cases}$$

Для (1):



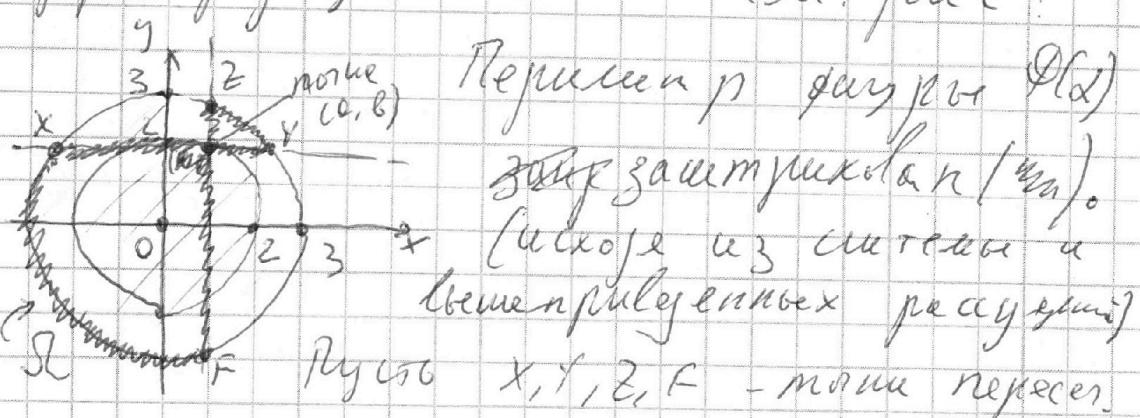
Будет две части

одной части
(по линии
одна часть)

Следовательно, предположим $x = 2 \cos \alpha$ и $y = 2 \sin \alpha$

согут расположиться (и позаду) от
 Ox и Oy). Далее, что они являются
берега Γ . Рассмотрим $2 \cos \alpha = a$, $2 \sin \alpha = b$.

Тогда $a^2 + b^2 = 4$. Т.е. точка (a, b) находится
на окр-ти радиусом 2. (2) Задача
округ радиусом 3 — с. рис:



Из рис. X, Y, Z, F — точки пересеч.

предмес $y = b$, $x = a$ с окр-тию Γ . (с. рис.)

В т.к. $XY \perp ZF$, то сумма градусов
мер угл $ZF + XY = 180^\circ$. Так же имеем

от a, b .

I-

I-



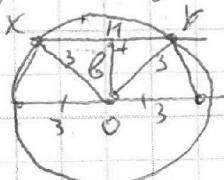
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Также необходимо найти сумму изображенных сумм двух корней XY и ZF .



Так $XY \parallel Ox$, то получается P/S трапеция откуда $H = XY \cap Oy$ - серединка XY т.ч. по м. Рисберга где $XK = \sqrt{9-b^2}$, т.е.

$$XY = 2\sqrt{9-b^2}. \text{ Аналогично } ZF = 2\sqrt{9-a^2}.$$

$$XY + ZF = 2\left(\sqrt{9-b^2} + \sqrt{9-a^2}\right). \text{ Задачами, 250}$$

надо теперь найти сумму ср. дроби ср. квадратов, $\frac{\sqrt{9-b^2} + \sqrt{9-a^2}}{2} \leq \sqrt{\frac{(9-b^2)+(9-a^2)}{2}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{18-(a^2+b^2)}{2}} = \sqrt{\frac{18-9}{2}} = \sqrt{7}, \text{ при этом получим}$$

достигнем при $\sqrt{9-b^2} = \sqrt{9-a^2}$, т.е.

$a^2 = b^2$ (5).

$$\text{Так } XY + ZF \leq 2(2\sqrt{7}) = 4\sqrt{7}. \text{ (сумма 942)}$$

$$XY + ZF = \frac{2\pi \cdot 3}{2} = 3\pi. \quad \text{Уз } 5, \quad \begin{cases} 2\cos x = 2\sin x \\ -2\cos x = 2\sin x \end{cases}$$

$$\text{но если } \begin{cases} \cos x = \sin x & (6) \\ \cos x = \sin(-x) & (7) \end{cases}$$

$$(6) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad (7) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Итак нам нужно переключить $\phi(x)$ максимумы с x на $\phi(x)$ минимумы т.к. они одинаковы.

I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Phi_{\max} = 3\pi + 2(\sqrt{9-a^2} + \sqrt{9-a^2}). \text{ При получении}$$

$$a \quad a^2 = b^2 = 2. \quad (\text{т.к. } a^2 + b^2 = 4). \quad \text{T.e}$$

$$\Phi_{\max} = 3\pi + 2(\sqrt{9-2} + \sqrt{9-2}) = 3\pi + 4\sqrt{7}$$

$$\text{Ответ: } M = 3\pi + 4\sqrt{7}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A, B, C \in \mathbb{N} \quad A = \overline{0000} \quad \text{в зан. } B \text{ есть } 1$$

тройка

$$A \cdot B \cdot C = N^2 \quad \text{at } 1 \dots g \quad \text{в зан. } C \text{ есть } 5$$

двойка

$$A = a \cdot \cancel{11} \cdot \boxed{101}$$

101

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 101 \\ \hline 11 \\ 110 \\ \hline 11101 \end{array}$$

$$\cancel{a} \mid C : 101$$

$$B : 101$$

$$B : \boxed{101}$$

$$B = 101 \quad C : 11$$

$$\boxed{55}$$

$$101 \quad \cancel{11}$$

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot \cancel{55} \quad \cancel{\sqrt{55}} \cdot \cancel{11} \cdot \cancel{101} \cdot \cancel{101}$$

a = 5

$$N^2 \quad x, y > 0 \quad b = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\cancel{y/x+y} = \cancel{x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{y+3} \quad \cancel{x} = \frac{1}{x} \quad \cancel{y} = \cancel{t}$$

$$\cancel{\frac{y/x+y}{x}} - \cancel{\frac{y/x+y}{x}} = \frac{1}{x-3} \quad \cancel{1+} \quad \cancel{x} = \frac{1}{x-3} = \frac{1}{\cancel{1-3a}} =$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \pi x$$

$$\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x) = \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi y \cdot \sin \pi x$$

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\theta = \cos(\pi x - \pi y) + \cos(2\pi x) \quad \theta = \cancel{\cos} \frac{\pi x - \pi y + 2\pi x}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y - 2\pi x}{2}$$

$$0 = \cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \quad \text{if } \cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0$$

- $\frac{\pi x - \pi y}{2}$

$$\text{if } \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \quad \text{but } 2k \quad \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad 3\pi x - \pi y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

(4k+2)

$$\text{if } \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \quad \text{but } 2k \quad \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad 3\pi x - \pi y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \pi k \quad \text{if } \pi x + \pi y = \pi k \quad \text{if } x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \pi k \quad \text{if } x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\frac{64}{25} \cdot \frac{y^2 - 2^2 - 13^2}{25^2} - \frac{13^2 \cdot 25}{25^2} = \frac{13^2 (64 - 25)}{25^2}$$

$$x = \frac{1+2k+y}{3} \quad \frac{564}{25} - \frac{25}{39}$$

$$\frac{44}{25} = 39$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} < 2\pi$$

$x \in [-4, 4]$

$y \in [0, \pi]$



$$x \in [-5, 5], y \in [-3, 3]$$

$$\begin{aligned} \arccos \frac{x}{4} \neq \pi & \quad x \neq -4 \\ \arccos \frac{y}{3} \neq \pi & \quad y = -3 \Rightarrow x \in [-4, 4], y \in (-3, 3] \\ x, y \in \mathbb{R} & \quad || \sqrt{x^2 + y^2} = 1+2k \quad || \sqrt{3x-y} = 1+2k \end{aligned}$$

$$1) \begin{array}{c} x \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{array} \quad y \in \mathbb{R} - \{-3\}$$

$$y = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{array}$$

$$= 1+2k - y$$

$$\begin{aligned} AP = \frac{16}{5} \\ BP = 2 \\ M \text{ (средн)} \end{aligned}$$

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{16}{5} = 4 \cdot 16$$

$$\frac{6 \cdot 4}{25} = R \cdot \sin \angle A$$

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{4}{5} = 16 \cdot \frac{1}{25}$$

$$\frac{24}{25}$$

$$PK = \sqrt{\frac{62}{25} \cdot 4 - \frac{24^2}{25^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{16^2 \cdot 25 - 24^2}{25^2}} = \frac{16}{5}$$

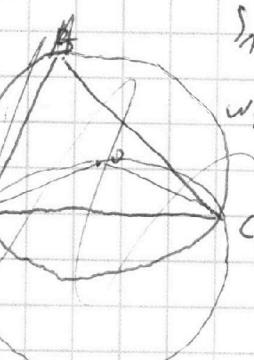
$$= \sqrt{\frac{8^2 \cdot 2^2 \cdot 25 - 7^2 \cdot 3^2}{25^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8^2 \cdot 2^2 \cdot 25 - 7^2 \cdot 3^2}{25^2}} =$$

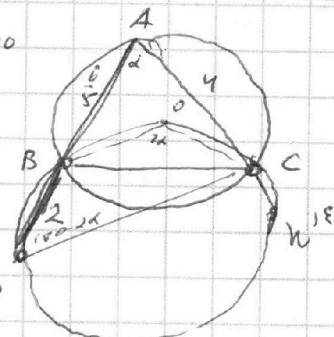
$$= \frac{8}{25} \sqrt{4 \cdot 25 - 9} = \frac{8}{25} \sqrt{91}$$



$$\frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5} = 4x$$

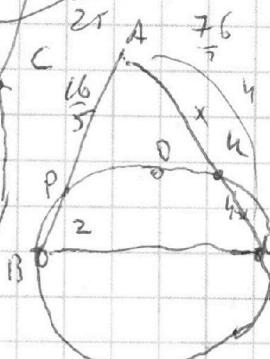
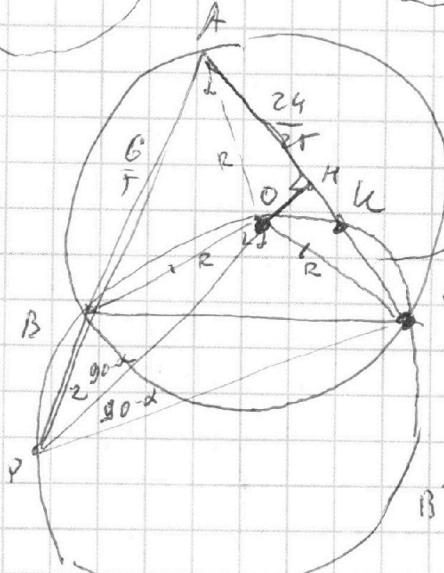


$$\delta_{ABC} \frac{16-10}{5}$$



$$\frac{108-24}{25}$$

$$\frac{80-4}{25}$$



$$\sin \alpha = \frac{\frac{8}{25} \sqrt{91}}{\frac{6}{5}} = \frac{8}{25} \sqrt{91} \cdot \frac{5}{6} = \frac{4}{3} \sqrt{91}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \sqrt{91} \cdot \frac{6}{5} \cdot 4$$

$$\frac{4 \cdot 26}{25} = x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad x^3 + 3xy \\ x^3 - y^3 - 9xy \quad \frac{x+y+1}{xy} = (x-3) + (y+3) + \cancel{(x-3)(y+3)} \\ (x+y+1)(x-3)(y+3) = \cancel{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad \text{if } x+y+1=0 \quad x, y > 0 \quad x$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy \quad 2) \quad xy = (x-3)(y-3) \quad xy - 3x - 3y + 9$$

$$(x-y)((x+y)^2 - 2xy) - 9xy \quad 0 \neq x \quad 3(x+y) = 9 \\ (x+y)^2 - 2xy - 9xy \quad \cancel{(x+y=3)}, \quad y = 3-x$$

$$\frac{4}{xy} = \frac{4}{(x-3)(y+3)} \quad xy = 9(x-3)(y+3) \quad y \quad |y = 3-x \\ 4(3-x) = (x-3)($$

$$x(3-x) = (x-3)(6-x) \quad \cancel{x \neq 0} \quad 3-x > 0$$

$$\cancel{x=3} \quad \text{and } y \geq 0 \quad -\cancel{4x+12} \quad \cancel{x-3} \quad 3-x > 0$$

$$xy = (x-3)(y+3) \quad x(3-x) = (x-3)(6-x)$$

$$\cancel{x = -x} \quad 0 = 0$$

$$x, y > 0 \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x^3 - y^3 - 9xy \quad \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3-1}{(x-3)(y+3)} \quad xy + 1 > 1 \\ (x-y) = (x-3)(y+3) \quad \cancel{xy} + 3x - 3y - 9 \quad 0 = x - y - 3 \\ x^2y \cdot (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy = \cancel{xy} \quad 3 = x - y$$

$$3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy = 3x^2 - 6xy + 3y^2 = 3(x^2 - 2xy + y^2) \\ = 3(x-y)^2 = \quad 3 = x - y \quad y + 3 = x \quad \frac{1}{3} \text{ or}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

17 $y > 4$ x одинак.

P 3, ГР

$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4}$ P_1 $\frac{C_y^2}{C_x^y}$ $\frac{3!}{2}$ $\frac{C_y^{y-2}}{C_x^{x-2}}$ $x > 2 - y + 2$

$\frac{(x-2)!}{2!(x-y)!} \cdot \frac{y!(x-y)!}{x!} = \frac{12}{(x-1)x}$ $\frac{(x-2)!}{(y-2)!(x-y)!} \cdot \frac{y!(x-y)!}{x!} = \frac{7}{2(y-2)!x(x-1)}$

~~$\frac{12}{(x-1)x} = \frac{7}{2(y-2)!x(x-1)}$~~

~~$(y-2)! = \frac{7}{24}$~~ $x > 2 - y + 2$

~~x одинак.~~

$y > 4$ x одинак.

P 3, ГР P_1 $\frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y}$ $\frac{7}{2} \frac{12}{\cancel{24}} = \frac{(y-1)y}{\cancel{24}}$

$\frac{(x-2)!}{2!(x-y)!} \cdot \frac{y!(x-y)!}{x!} = \frac{12}{(x-1)x}$ $7 \cdot 6 = 42$

$(y-7)(y+6) = 0$ $\boxed{y=7}$ $0 = y^2 - y - 42$

$\frac{(x-2)!}{(y-2)!(x-y)!} \cdot \frac{y!(x-y)!}{x!} = \frac{7}{2}(y-1)y$

$9 - 9, 7, 8, 7, 6, 7, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$

$9 - 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$

72 -



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

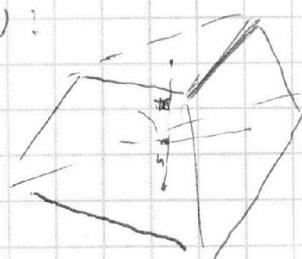
6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

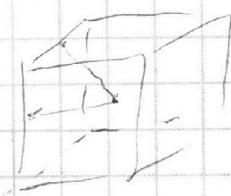
ω:



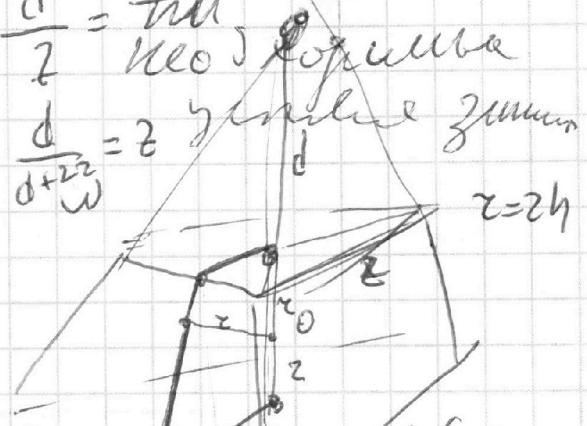
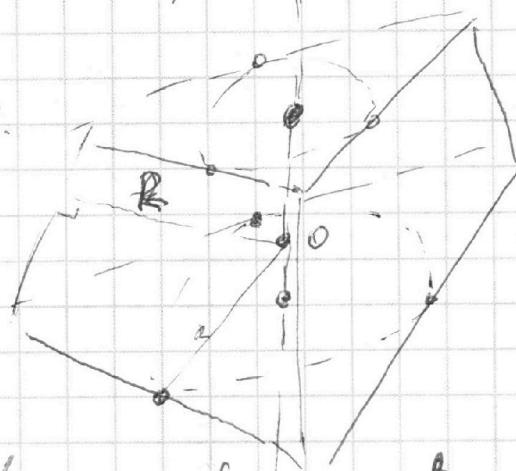
Бесконечное пуговище?

$$h = 2r$$

$$\frac{d}{2} = \frac{d+2r}{\pi d}$$

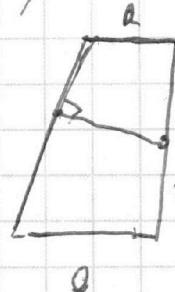


S:

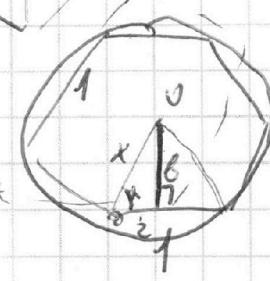


глубина синус верхней

$$b = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$$



$$\alpha = \frac{180(n-2)}{2n}$$



$$x \in [0, \cos \alpha] \quad \frac{x}{2} \in [0, \cos(\alpha/2)]$$

38

35

Ч. 25

Ч. 25 - Ч. 25
Ч. 25 - Ч. 25



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

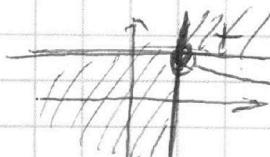
 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№6 $\max M$ периметр $a + b$.

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} \quad \text{-л-бдн.}$$

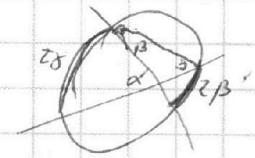
$$y = 2 \cos \alpha \quad y = 2 \sin \alpha$$



$$(2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha)$$

$$a^2 + b^2 = 4$$

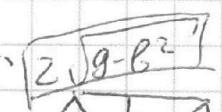
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



$$2\alpha + 2\beta = 2(180^\circ)$$

ограничим

$$y \leq 0 \quad (\alpha \leq 90^\circ)$$



$$2\sqrt{9 - a^2 - b^2}$$

$$2(\sqrt{9 - a^2} + \sqrt{9 - b^2}) \Rightarrow \max$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \frac{18 - (a^2 + b^2)}{2} = \frac{18 - 4}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$2\sqrt{9 - a^2} + \sqrt{9 - b^2} \leq 14\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} 9 - a^2 \geq 0 \\ 9 - b^2 \geq 0 \end{cases} \quad a^2 + b^2 = 4 \quad \begin{cases} a^2 = b^2 \\ a^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \\ \sin \alpha = \cos \alpha \\ \sin \alpha = -\cos \alpha \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 = 4$$

