



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
  - $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 2, а  $y$  — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 6xy$ .
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$ .
- б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 25$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 35$ .
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача ①

Рассмотрим, какие значения может принимать число  $A$ : это  $1111, 2222, 3333, \dots, 9999$ . Каждое из этих чисел представимо в виде  $n \cdot 11 \cdot 101$ , где  $n$  — это натуральное число от 1 до 9. Заметим, что т.к.  $A \cdot B \cdot C$  — квадрат натурального числа, то в разложении  $A \cdot B \cdot C$  на простые  $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$  все степени  $\alpha_i$  — четные. В разложении  $A \cdot B \cdot C$  входит  $101$  в четной степени, причем в  $A$   $101$  входит в степени 1, в  $C$   $101$  входит в степени 0 (с двузнач.)  $\Rightarrow 101$  входит в  $B$  в степени 1 (хотя бы в трехзнач.), но по условию  $\checkmark$  одна из цифр  $B$  — это 6  $\Rightarrow B$  определяется единственным образом:  $B = 606$ . Заметим также, что 11 входит в  $A$  в степени 1, в  $B$  не входит  $\Rightarrow C \equiv 11$ , но  $C$  — двузнач. число,  $\checkmark$  одна из цифр которого 3  $\Rightarrow C = 33$ . Итого  $A \cdot B \cdot C = (n \cdot 11 \cdot 101) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 101) \cdot (3 \cdot 11) = 11^2 \cdot 3^2 \cdot 101^2 \cdot n \cdot 2 \Rightarrow n$  должно быть представимо в виде квадрата  $\cdot 2$ ,  $n \in [1; 9] \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$0 \Rightarrow n \in \{2; 8\} \Rightarrow A = 2222 \text{ или } 8888.$$

Ответ:  $(2222; 606; 33)$  и  $(8888; 606; 33)$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача ②

По условию  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$(x+y+5) \left( \frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-2)(y+2)} \right) = 0$$

$$\begin{cases} x+y+5 = 0 & (1) \\ xy = (x-2)(y+2) & (2) \end{cases}$$

(1): Это невозможно, т.к.  $x, y > 0 \Rightarrow x+y+5 > 5$ .

(2):  $xy = xy + 2x - 2y - 4$   
 $2 = x - y$  — запомнили это.

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy = \\ &= (x-y)((x-y)^2 + 3xy) - 6xy = 2(4 + 3xy) - 6xy = 8. \end{aligned}$$

Ответ:  $M = 8$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☒☐☐☐☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = 0$$

$$- \cos 2\pi x + \cos (\pi x - \pi y) = 0$$

$$\cos 2\pi x = \cos (\pi x - \pi y)$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi n & n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pi y - \pi x + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi x = -\pi y + 2\pi n \\ 3\pi x = \pi y + 2\pi n \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y + 2n \\ 3x = y + 2n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 2n \\ y = 3x - 2n \end{cases}$$

Ответ: эти пары вида  $(x; -x + 2n)$  и  $(x; 3x - 2n)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача (4)

Найдем вероятность, что Петя и Васа попадут на концерт в начале месяца. Благоприятные исходы - выбирают 4 человек, 2 из которых - Петя и Васа. Пусть  $k$  - кол-во 11-классников.

Тогда кол-во способов так выбрать  $C_{k-2}^2$

(кол-во способов выбрать 2 человек кроме Пети и Васи). Кол-во исходов всего = кол-во способов выбрать 4 человек из  $k$  (которым достанутся билеты) =  $C_k^4$ . Вероятность ~~Рн~~  $P_H = \frac{C_{k-2}^2}{C_k^4}$ .

Пусть выданы дополнительно  $n$  билетов.

Благоприятные исходы в конце месяца - это исходы, когда выбрали  $4+n$  человек, 2 из которых Петя и Васа. Кол-во способов выбрать  $n+2$  человека из  $k-2$  (не Петя и Васа) -  $C_{k-2}^{n+2}$ .

Кол-во исходов всего в конце месяца = кол-во способов выбрать  $(4+n)$  человек из  $k = C_k^{n+4}$ .

Вероятность в конце  $P_K = \frac{C_{k-2}^{n+2}}{C_k^{n+4}} \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

④ → Т.к. мы знаем, что  $6P_n = P_k$ , то:

$$6 \cdot \frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} = \frac{C_{k-2}^{n+2}}{C_k^{n+4}}$$

$$6 \cdot \frac{(k-2)!}{2!(k-4)!} = \frac{(k-2)!}{(n+2)!(k-n-4)!}$$
$$\frac{k!}{4!(k-4)!} = \frac{k!}{(n+4)!(k-n-4)!}$$

$$6 \cdot \frac{4!}{2!} = \frac{(n+4)!}{(n+2)!}$$

$$42 = (n+4)(n+3)$$

$$42 = n^2 + 7n + 12$$

$$n^2 + 7n - 60 = 0$$

$$(n-5)(n+12) = 0$$

Т.к.  $n$  - кол-во билетов, которые добавили,

то  $n \in \mathbb{N}$  по условию задачи  $\Rightarrow n+12 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n=5$  - ед. значение  $\Rightarrow$  всего в конце месяца было продано 9 билетов.

Ответ: 9.

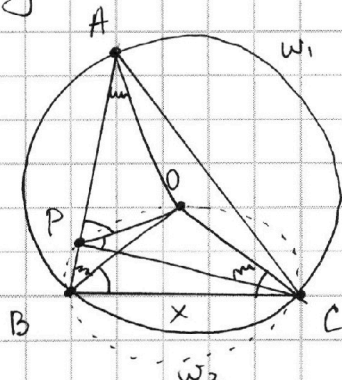


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☒6  
☐7  
☐СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

о)  $AP = 25$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 35$ ,  $BC = x$ .1)  $O$  - центр опис. окр.  $\Rightarrow$  $OA = OB = OC \Rightarrow \triangle AOB$  и  $\triangle BOC$  - $r/\delta \Rightarrow \angle BAO = \angle ABO = \angle PCO$ (т.к.  $BPOC$  - впис.) и $\angle OBC = \angle OCB = \angle APO = \angle OPC$  (т.к.  $BPOC$  - впис.).

Значит,  $\triangle APO = \triangle CPO$  по II п.р.т (имеют общую сторону, все углы соответственно равны)

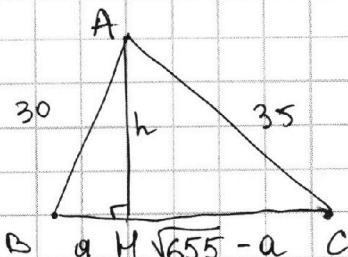
 $\Rightarrow AP = PC$ .

2) Пусть  $\angle APC = \alpha$ , тогда  $\angle BPC = 180^\circ - \alpha$ . Запишем теорему косинусов для  $\triangle APC$  и  $\triangle BPC$ :

$$\begin{cases} BC^2 = BP^2 + PC^2 + 2 \cdot BP \cdot PC \cdot \cos \alpha \\ AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2 \cdot AP \cdot PC \cdot \cos \alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 25 + 625 + 2 \cdot 5 \cdot 25 \cdot \cos \alpha \\ 1225 = 625 + 625 - 2 \cdot 625 \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 650 + 250 \cos \alpha \\ 245 = 250 - 250 \cos \alpha \end{cases} \quad \oplus \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 245 = 900 \\ x^2 = 655 \end{cases} \Rightarrow$$

 $\Rightarrow BC = x = \sqrt{655}$ .

3) Проведем высоту  $AM$ ,  $\triangle ABC$  - острый.  $\Rightarrow BM = a > 0$ ,  $MC = \sqrt{655} - a > 0$ ,  $BM = h$ .  $\Rightarrow$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) => Запишем теорему Пифагора для

$\triangle BHA$  и  $\triangle CHA$ :

$$\begin{cases} a^2 + h^2 = 900 \\ 655 + a^2 - 2\sqrt{655}a + h^2 = 1225 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 655 - 2\sqrt{655}a = 325$$

$$2\sqrt{655}a = 330$$

$$\sqrt{655}a = 165$$

$$a = \frac{165}{\sqrt{655}} \Rightarrow a^2 = \frac{165^2}{655}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{900 - \frac{165^2}{655}} = \sqrt{\frac{589500 - 24225}{655}} =$$

$$= \sqrt{\frac{562175}{655}} = \sqrt{\frac{112435}{131}}$$

$$\begin{aligned} 4) S_{ABC} &= \frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{h \cdot x}{2} = \frac{655 \cdot \sqrt{\frac{112435}{131}}}{2} = \frac{\sqrt{655^3 \cdot 112435}}{\sqrt{131} \cdot 2} = \\ &= \frac{\sqrt{655 \cdot 5 \cdot 112435}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{368224625}}{2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

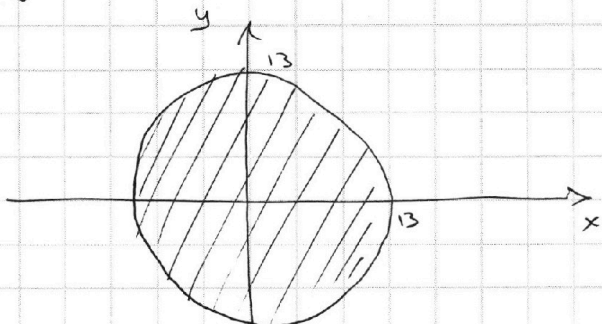
СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

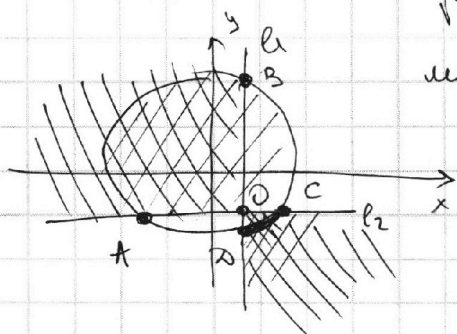
Задача 6

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 169 & (2) \end{cases}$$

(2): Это ~~кружок~~ круг с центром  $(0; 0)$  и радиусом 13:



(1): Это 2 области огр. прямыми  $y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$ ,  
 $x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$ :



При этом прямые  $l_1$  и  $l_2$  могут двигаться вдоль осей в зависимости от значений  $\alpha$ .

Область на рисунке.

Мы хотим макс. периметр. Заметим, что

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DC} = \text{const} = \frac{2\pi R}{2} = 13\pi \quad (\text{т.к. } \angle AOB = \angle DOC = 90^\circ \Rightarrow \angle AOB = (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DC})/2)$$

Значит, нам нужно максимизировать

$AC + DB$ . Заметим, что если опустить



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

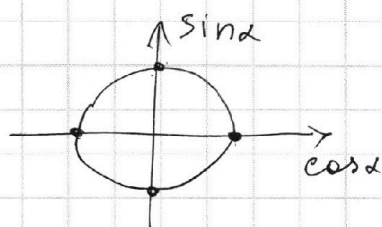
⑥  $AC \perp Ox$  и  $BD \perp Oy$ , то тем больше

$AC + 2B$ .  $\Rightarrow$  будем ~~минимизировать~~

минимизировать  $|\sin \alpha| + |\cos \alpha|$ .

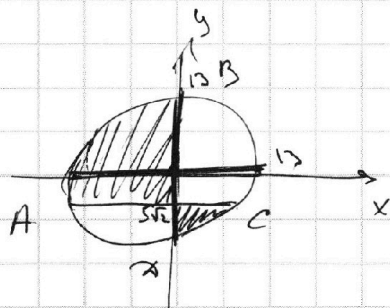
$$|\sin \alpha| + |\cos \alpha| \geq 1 \Rightarrow \text{либо } |\sin \alpha| = 1,$$

$$\text{либо } |\cos \alpha| = 0, \text{ либо } |\sin \alpha| = 0, |\cos \alpha| = 1$$

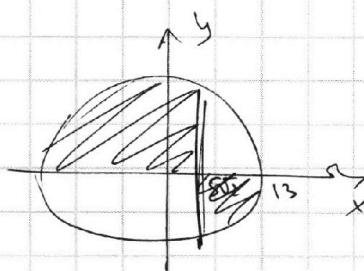


$$\alpha = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

Если  $\cos \alpha = 0$ :



Если  $\sin \alpha = 0$



Случаи симметричны, периметр в обоих случаях одинаков и тот же.

$$P = \overset{\sim}{AB} + \overset{\sim}{AC} + 2 \cdot 13 + AC = 13\pi + 26 + AC.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

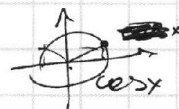
$$\sqrt{3} \quad (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = 0$$

$$\cos(2\pi x) \qquad \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi - \pi y + \pi x)$$



$$\begin{cases} 2\pi x = \pi - \pi y + \pi x + 2\pi n \\ 2\pi x = -\pi + \pi y - \pi x + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - y + 2n \\ 3x = -1 + y + 2n \end{cases}$$

$$x - x + 2n = 3x + x - 2n$$

$$4x = 4n$$

$$x = n$$

$$\begin{cases} y = 1 - x + 2n \\ y = 3x + 1 - 2n \end{cases}$$

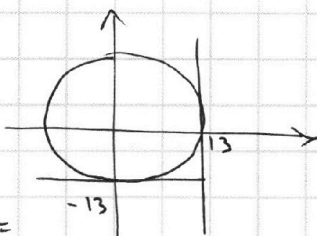
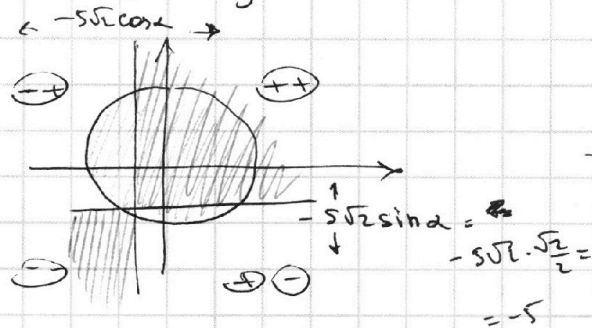
$$(x, 1 - x + 2n) \text{ и } (x, 3x + 1 - 2n)$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

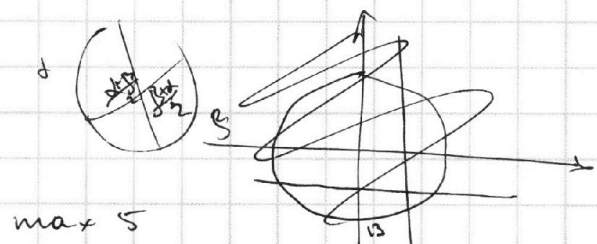
$$\sqrt{6} \quad \begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} - & + \\ + & - \end{pmatrix}$  знаков



$$\begin{aligned} -5\sqrt{2} \cos \alpha &= 13 \\ 5\sqrt{2} \sin \alpha &= 13 \\ \cos \alpha &= -\frac{13}{5\sqrt{2}} \\ \sin \alpha &= \frac{13}{5\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{169}{25 \cdot 2} + \frac{169}{25 \cdot 2} = 1$$



$$\begin{aligned} -5\sqrt{2} \cos \alpha &\text{ max } 5\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} \sin \alpha &\text{ min } -5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = -1$$

$$\sin \alpha = 1$$

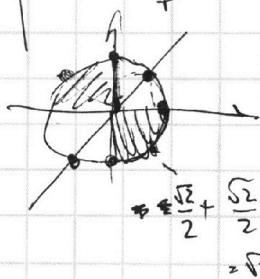
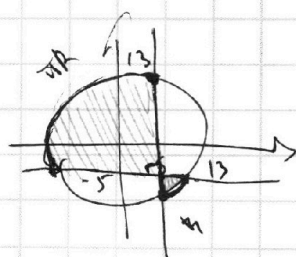
$$5\sqrt{2} (\sin \alpha - \cos \alpha) \rightarrow \text{max}$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha \rightarrow \text{max}$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \text{max}$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha + \text{max}$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$



$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

У1

$$A \cdot B \cdot C = x^2$$

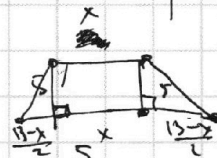
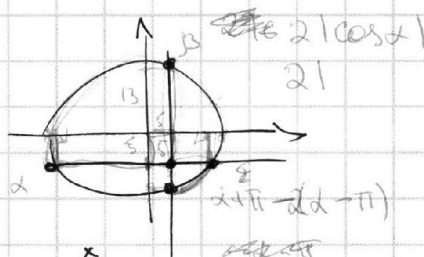
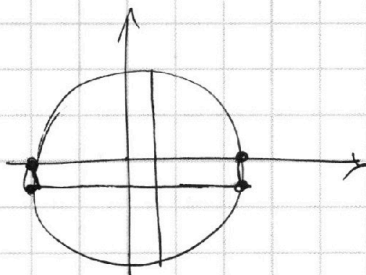
$$A > B > C$$

либо  $A, B, C$  - квадраты

либо 2 из чисел - квадраты

либо  $(A, B, C) \neq 1$

1111  
2222  
3333  
4444  
5555  
6666  
7777  
8888  
9999



$$\sqrt{2} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + y^2 + xy) - 6xy = (x-y)((x-y)^2 + 3xy) - 6xy$$

$$\frac{x+y}{xy} + \frac{5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy}$$

$$\frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\begin{cases} x+y+5=0 \\ xy=(x-2)(y+2) \end{cases}$$

$$\rightarrow xy = xy + 2x - 2y - 4$$

$$x - y = 2$$

$$\begin{cases} y = -x - 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad x^3 + (x+5)^3 + 6x(x+5) &= x^3 + x^3 + 3x^2 \cdot 5 + 3x \cdot 25 + 125 + \\ &+ 6x^2 + 30x = \\ &= 2x^3 + 21x^2 + 105x + 125 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+7} + \frac{5}{(x-2)(x+7)}$$

$$x+7 - x+2 = 5$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$x - y = 2$$

$$2(2^2 + 3xy) - 6xy = 8$$

$$\begin{array}{r} x655 \\ 5 \\ \hline 3275 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 112435 \\ \times 23275 \\ \hline 12562175 \\ + 787045 \\ + 224840 \\ \hline 337305 \\ \hline 36024625 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$x + y = 0 \text{ или } \pi$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

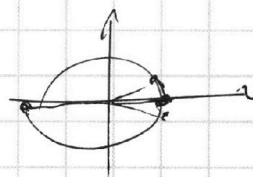
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a + \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\sin \pi x \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2}(x-y) \right) = \frac{1}{2} (\sin(\pi x + \frac{\pi}{2}(x-y)) + \sin(\pi x - \frac{\pi}{2}(x-y)))$$

$$\sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \cdot \cos \pi x = \frac{1}{2} (\sin(\pi x + \frac{\pi}{2}(y-x)) + \sin(-\pi x + \frac{\pi}{2}(y-x)))$$

$$\sin(\alpha) = \sin(-\alpha)$$

$$\alpha = 0 \text{ или } \pi$$

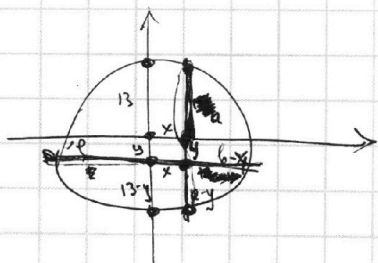


$$\pi x + \frac{\pi}{2}(x-y) = \pi n$$

$$\pi x + \frac{\pi}{2}(x-y) = \pi n$$

$$x + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = n$$

$$3x - y = 2n$$

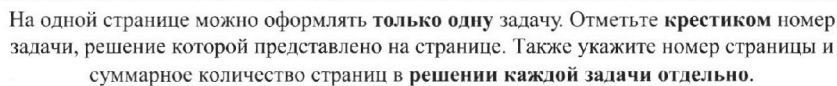


$$\max(a+y, a-y, \dots)$$

$$(a+y)(a-y) = (b+x)(b-x)$$

$$a^2 - y^2 = b^2 - x^2$$

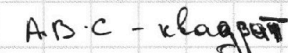
$$a^2 - b^2 + x^2 - y^2 = 0$$



СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!**

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$



A, B, C - w.l.

~~1111~~  
~~2222~~  
~~3333~~  
 4444  
 5555  
 6666  
~~7777~~  
~~8888~~  
 9999

1  
4  
9  
16  
25

1, 4, 9, 16, 25

$$\begin{array}{r} 9999 \overline{) 3} \\ 3333 \end{array}$$
$$9999 = 9.1111$$
$$11 \cdot 12 = 12 \cdot 10 + 11 = 12 \cdot 10 + 11$$

11.101  
2.11.101  
3.11.101

9.11.101 • L • L

101. k

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times 11 \\ \hline 100 \\ + 100 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 2 \\ \hline 202 \\ 202 \\ 404 \\ 505 \\ 606 \\ 707 \\ 808 \end{array}$$
$$13 \cdot 8 = 80 + 24 = 104$$

1 7 3 4 5 6 ~~7 8 9~~  
7 8 9

$$n \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11$$
$$11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot n = n$$

2, 8

$$\begin{array}{r} 1124 \\ - 1048 \\ \hline 0076 \end{array}$$

25/11/11

29

...

10-10

W L A

$$\begin{array}{r} 763 \\ - 655 \\ \hline 108 \end{array}$$

655

131.5

$$\begin{array}{r} 13.10 \\ - 10.85 \\ \hline \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4  $k$  - ком-во орг.-ов,  $\Delta$  - выданных еще

$$C_k^4 = \frac{6^4}{C_k^4} = \frac{2}{C_k^{4+\Delta}}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{6}{4!(k-4)!} = \frac{1}{4!(k+\Delta-4)!}$$

1 2 3 4 5 6 7

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$24 \cdot 6 = 20 \cdot 6 + 24 = 144$$

$$\frac{144}{k(k-1)(k-2)(k-3)} = \frac{1}{(k+\Delta)(k+\Delta-1)(k+\Delta-2)(k+\Delta-3)}$$

$$144(k+\Delta)(k+\Delta-1)(k+\Delta-2)(k+\Delta-3) = k(k-1)(k-2)(k-3)$$

$$C_k^4 = 6 \cdot C_k^{4+\Delta}$$

$$\frac{6^4}{4!(k-4)!} = 6 \cdot \frac{k!}{(4+\Delta)!(k-4-\Delta)!}$$

$$(4+\Delta)!(k-4-\Delta)! = 144(k-4)!$$

$$\frac{C_k^2}{C_k^4} = \frac{C_k^{2+\Delta}}{C_k^4}$$

$$C_k^4$$

$$\frac{C_k^{2+\Delta}}{C_k^4}$$

$$6 \cdot \frac{C_k^{2-2}}{C_k^4} = \frac{C_k^{2+\Delta}}{C_k^{4+\Delta}}$$

$$6 \cdot \frac{(k-2)!}{2! \cdot (k-4)!} = \frac{(k-2)!}{(2+\Delta)!(k-4-\Delta)!}$$

$$\frac{1}{72} = \frac{(2+\Delta)!}{(4+\Delta)!}$$

$$8 = \Delta^2 + 7\Delta + 12$$

$$72 = \Delta^2 + 7\Delta + 12$$

$$\Delta^2 + 7\Delta - 60 = 0$$

$$\Delta = 5$$

$$\Delta = 5$$

$$4+5=9$$

$$3 \cdot 24 = 60+1$$



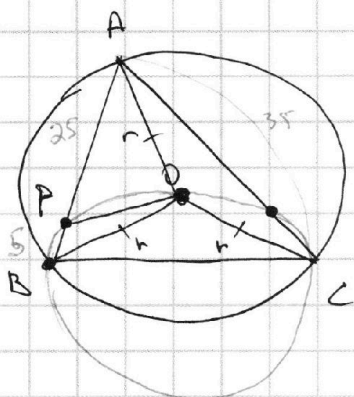
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

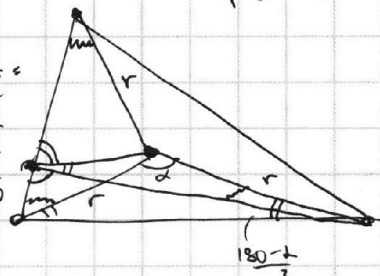
25



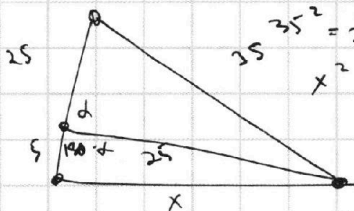
SABC - ?

PC = 25

$$\alpha = \frac{180^\circ - \beta}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$$



$$\begin{array}{r} 1315 \\ \times 655 \\ \hline \end{array}$$



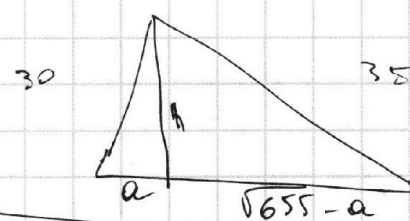
$$35^2 = 25^2 + 25^2 - 2 \cdot 25^2 \cos \alpha$$
$$x^2 = 25^2 + 25^2 + 2 \cdot 25 \cdot 25 \cdot \cos \alpha$$

$$x^2 = 25^2 + 25^2 + \frac{2 \cdot 25^2 - 35^2}{5}$$

$$x^2 = 25^2 + 25^2 + \frac{25}{8} = 30 + 25^2 = 655$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$35^2 = 2 \cdot 25^2 (1 - \cos \alpha)$$
$$1 - \cos \alpha = \frac{35^2}{2 \cdot 25^2}$$
$$\cos \alpha = \frac{2 \cdot 25^2 - 35^2}{2 \cdot 25^2}$$
$$\begin{array}{r} \times 35 \\ 175 \\ \hline 1225 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 625 \\ \hline 1250 \end{array}$$



$$\begin{cases} h^2 + a^2 = 900 \\ h^2 + 655 + a^2 - 2\sqrt{655}a = 1225 \end{cases}$$
$$\begin{array}{r} 655 \\ \times 25 \\ \hline 16375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1225 \\ \times 5 \\ \hline 6125 \end{array}$$

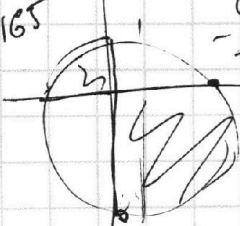
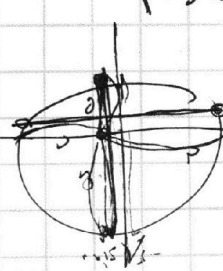
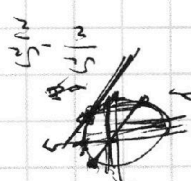
$$\begin{array}{r} 655 \\ \times 5 \\ \hline 3275 \end{array}$$

$$x^2 = r^2 + r^2 + 2rr \cos \alpha$$

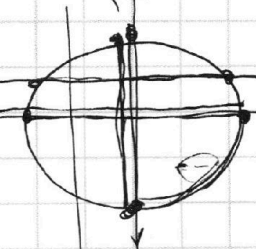
$$P \cdot 2 = 90$$
$$150 + 15 = 165$$

$$625 \cdot 2 = 1250$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 1225 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 625 \\ \times 5 \\ \hline 3125 \end{array}$$



$$r = 100$$
$$r = 115$$

$$\begin{array}{r} 911 \\ 900 \\ \hline 11 \end{array}$$