МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} \left(x + 5\sqrt{2}\cos\alpha\right)\left(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha\right) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 169. \end{cases}$$

   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача (1)

Рассмотрим, какие значения может принимать число A: это 1111, 2222, 3333, ..., 9999. Каждое из этих чисел представимо в виде $n \cdot 11 \cdot 101$, где n - это натуральное число от 1 до 9. Заметим, что т.к. $A \cdot B \cdot C$ - квадрат натурального числа, то в разложении ABC на простые $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ все степени α_i - четные. В разложение ABC входит 101 в четной степени, причем в A 101 входит в степени 1, в C 101 входит в степени 0 (C двузнач.) => 101 входит в B в степени 1 (B трехзнач.), но по условию хотя бы одна из цифр B - это 6 => B определяется единственным образом: B = 606. Заметим также, что 11 входит в A в степени 1, в B не входит => $C \vdots 11$, но C - двузнач. число, хотя бы одна из цифр которого 3 =>

=> C = 33. Итого $A \cdot B \cdot C = (n \cdot 11 \cdot 101) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 101) \cdot (3 \cdot 11) =$

$= 11^2 \cdot 3^2 \cdot 101^2 \cdot n \cdot 2$ => n должно быть представимо в виде квадрата $\cdot 2$, $n \in [1;9]$ =>

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

① $\Rightarrow n \in \{2; 8\} \Rightarrow A = 2222$ или 8888.

Ответ: $(2222; 606; 33)$ и $(8888; 606; 33)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

По условию $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{5}{xy}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{y+2}+\frac{5}{(x-2)(y+2)}$

$$\frac{x+y+5}{xy}=\frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$(x+y+5)\left(\frac{1}{xy}-\frac{1}{(x-2)(y+2)}\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{ll} x+y+5=0 & (1) \\ xy=(x-2)(y+2) & (2) \end{array}\right.$$

(1): Это невозможно, т.к. $x,y>0 \Rightarrow x+y+5>5$.

(2): $\cancel{xy}=\cancel{xy}+2x-2y-4$

$2=x-y$ — запомним это.

$$M=x^3-y^3-6xy=(x-y)(x^2+xy+y^2)-6xy=$$

$$=(x-y)((x-y)^2+3xy)-6xy=2(4+3xy)-6xy=8.$$

Ответ: $M=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

а) $(\sin \pi x + \sin \pi y)\sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y)\cos \pi x$

$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi x \cdot \cos \pi y$

$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = 0$

$-\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0$

$\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi n \\ 2\pi x = \pi y - \pi x + 2\pi n \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} \pi x = -\pi y + 2\pi n \\ 3\pi x = \pi y + 2\pi n \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = -y + 2n \\ 3x = y + 2n \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y = -x + 2n \\ y = 3x - 2n \end{array}\right.$$

Ответ: это пары вида $(x; -x+2n)$ и $(x; 3x-2n)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

Найдем вероятность, что Петя и Вася попадут на концерт в начале месяца. Благоприятные исходы – выбирают 4 человек, 2 из которых – Петя и Вася. Пусть k – кол-во 11-классников. Тогда кол-во способов так выбрать C_{k-2}^{2} (кол-во способов выбрать 2 человек кроме Пети и Васи). Кол-во исходов всего = кол-во способов выбрать 4 человек из k (которым достанутся билеты) $= C_k^4$. Вероятность $P_H = \frac{C_{k-2}^{2}}{C_k^4}$.

Пусть выделили дополнительно n билетов. Благоприятные исходы в конце месяца – это исходы, когда выбрали $4+n$ человек, 2 из которых Петя и Вася. Кол-во способов выбрать $n+2$ человека из $k-2$ (не Петя и Вася) – C_{k-2}^{n+2}. Кол-во исходов всего в конце месяца = кол-во способов выбрать $(4+n)$ человек из $k = C_k^{n+4}$.

Вероятность в конце $P_K = \frac{C_{k-2}^{n+2}}{C_k^{n+4}} \Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

4 => т.к. мы знаем, что $6P_n = P_k$, то:

$$6 \cdot \frac{C_{k-2}^{2}}{C_k^4} = \frac{C_{k-2}^{n+2}}{C_k^{n+4}}$$

$$6 \cdot \frac{\frac{\cancel{(k-2)!}}{2!\cancel{(k-4)!}}}{\frac{\cancel{k!}}{4!\cancel{(k-4)!}}} = \frac{\frac{\cancel{(k-2)!}}{(n+2)!\cancel{(k-n-4)!}}}{\frac{\cancel{k!}}{(n+4)!\cancel{(k-n-4)!}}}$$

$$\frac{6\cdot 4!}{2!} = \frac{(n+4)!}{(n+2)!}$$

$$72 = (n+4)(n+3)$$

$$72 = n^2 + 7n + 12$$

$$n^2 + 7n - 60 = 0$$

$$(n-5)(n+12) = 0$$

Т.к. n - кол-во билетов, которые добавили, то $n \in \mathbb{N}$ по смыслу задачи $\Rightarrow n+12 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 5$. - ед. значение => всего в конце месяца было выделено 9 билетов.

Ответ: 9.

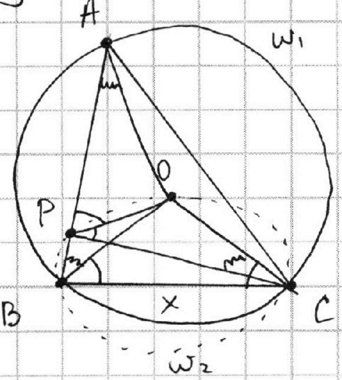
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 5



а) $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$, $BC = x$.

1) O – центр опис. окр $\Rightarrow$

$OA = OB = OC \Rightarrow \triangle AOB$ и $\triangle BOC$ – р/б $\Rightarrow \angle BAO = \angle ABO = \angle PCO$ (т.к. BPOC – впис.) и

$\angle OBC = \angle OCB = \angle APO = \angle OPC$ (т.к. BPOC – впис.).

Значит, $\triangle APO = \triangle CPO$ по II п.р.т (имеют общую сторону, все углы соответственно равны) $\Rightarrow AP = PC$.

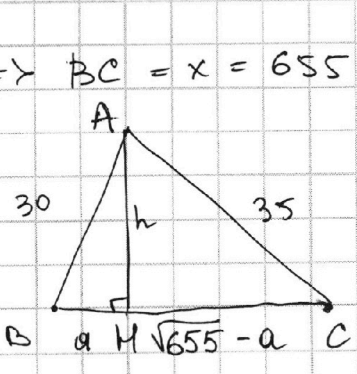
2) Пусть $\angle APC = \alpha$, тогда $\angle BPC = 180^\circ - \alpha$. Запишем теорему косинусов для $\triangle APC$ и $\triangle BPC$:

$$\begin{cases} BC^2 = BP^2 + PC^2 + 2 \cdot BP \cdot PC \cdot \cos\alpha \\ AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2 \cdot AP \cdot PC \cdot \cos\alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 25 + 625 + 2 \cdot 5 \cdot 25 \cdot \cos\alpha \\ 1225 = 625 + 625 - 2 \cdot 625 \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 650 + 250\cos\alpha \\ 245 = 250 - 250\cos\alpha \end{cases} \oplus \Rightarrow \begin{array}{c} x^2 + 245 = 900 \\ x^2 = 655 \Rightarrow \end{array}$$

$\Rightarrow BC = x = 655$.



3) Проведем высоту AH, $\triangle ABC$ – остроуг. $\Rightarrow BH = a > 0$, $HC = \sqrt{655} - a > 0$, $BM = h$. $\Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

5) => Запишем теорему Пифагора для

ΔBHA и ΔCHA:

$$\begin{cases} a^2 + h^2 = 900 \\ 655 + a^2 - 2\sqrt{655}\,a + h^2 = 1225 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 655 - 2\sqrt{655}\,a = 325$$

$$2\sqrt{655}\,a = 330$$

$$\sqrt{655}\,a = 165$$

$$a = \frac{165}{\sqrt{655}} \Rightarrow a^2 = \frac{165^2}{655}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{900 - \frac{165^2}{655}} = \sqrt{\frac{589500 - 27225}{655}} =$$

$$= \sqrt{\frac{562175}{655}} = \sqrt{\frac{112435}{131}}$$

4) $S_{ABC} = \dfrac{AH \cdot BC}{2} = \dfrac{h \cdot x}{2} = \dfrac{655 \cdot \sqrt{\frac{112435}{131}}}{2} = \dfrac{\sqrt{655^2 \cdot 112435}}{\sqrt{131} \cdot 2} =$

$$= \frac{\sqrt{655 \cdot 5 \cdot 112435}}{2}$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{368224625}}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

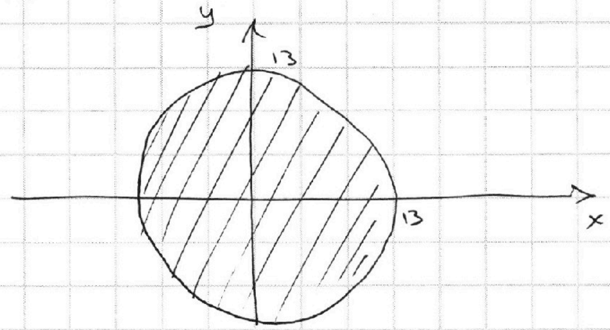
СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

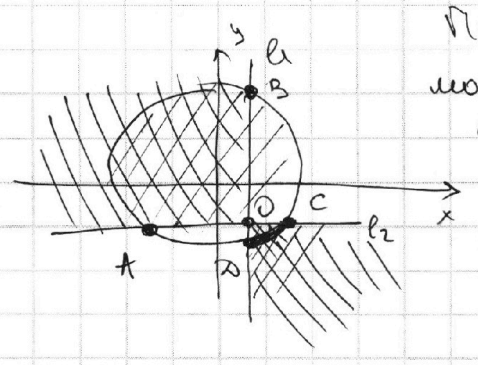
Задача 6

$$\begin{cases}(x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha)\le 0 & (1)\\ x^2+y^2\le 169 & (2)\end{cases}$$

(2): Это круг с центром (0;0) и радиусом 13:



(1): Это 2 области огр. прямыми $y=-5\sqrt{2}\sin\alpha$, $x=-5\sqrt{2}\cos\alpha$:



При этом прямые l_1 и l_2 могут двигаться вдоль осей в зависимости от значений α.

Область на рисунке.

Мы хотим макс. периметр. Заметим, что $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{DC} = const = \frac{2\pi R}{2} = 13\pi$ (т.к. $\angle AOB = \angle DOC = 90°$ $\Rightarrow$ $\angle AOB = ((\overset{\frown}{AB})^\circ+(\overset{\frown}{DC})^\circ)/2$).

Значит, нам нужно максимизировать $AC+DB$. Заметим, что чем ближе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

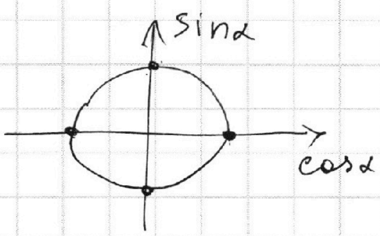
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

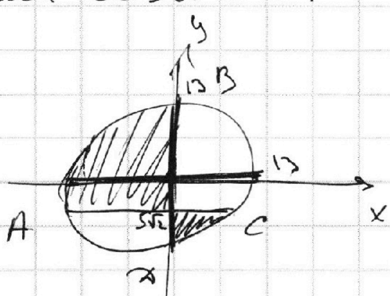
6) AC к Ox и BD к Oy, то тем больше $AC + DB$. $\Rightarrow$ будем минимизировать $|\sin\alpha| + |\cos\alpha|$.

$|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \geq 1 \Rightarrow$ либо $|\sin\alpha| = 1$, $|\cos\alpha| = 0$, либо $|\sin\alpha| = 0$, $|\cos\alpha| = 1$

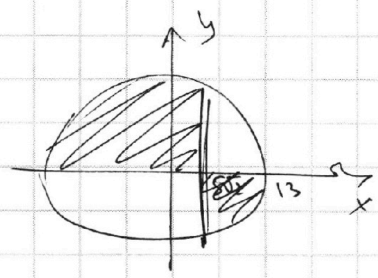


$$\boxed{\alpha = \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}}$$

Если $\cos\alpha = 0$:



Если $\sin\alpha = 0$



Случаи симметричны, периметр в обоих случаях один и тот же.

$P = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DC} + 2\cdot 13 + AC = 13\pi + 26 + AC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

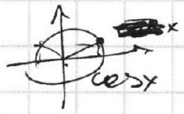
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3 $(\sin\pi x + \sin\pi y)\sin\pi x = (\cos\pi x - \cos\pi y)\cos\pi x$

$\sin^2\pi x + \sin\pi y\sin\pi x = \cos^2\pi x - \cos\pi y\cos\pi x$

$\underbrace{\sin^2\pi x - \cos^2\pi x}_{\cos(2\pi x)} + \underbrace{\cos\pi y\cos\pi x + \sin\pi y\sin\pi x}_{\cos(\pi y - \pi x)} = 0$



$\cos(2\pi x) = \cos(\pi - \pi y + \pi x)$

$\begin{cases} \cancel{2}\pi x = \pi - \pi y + \cancel{\pi x} + 2\pi n \\ \cancel{2}\pi x = -\pi + \pi y - \cancel{\pi x} + 2\pi n \end{cases}$ 3

$\begin{cases} x = 1 - y + 2n \\ 3x = -1 + y + 2n \end{cases}$

$\begin{cases} y = 1 - x + 2n \\ y = 3x + 1 - 2n \end{cases}$

$x - x + 2n = 3x + x - 2n$

$4x = 4n$

$x = n$

$(x,\ 1 - x + 2n)$ и $(x,\ 3x + 1 - 2n)$

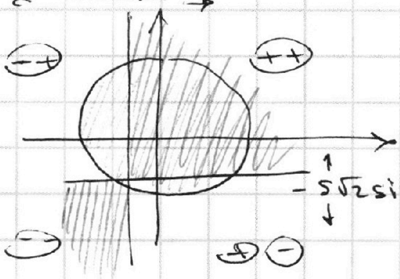
$n \in \mathbb{Z}$

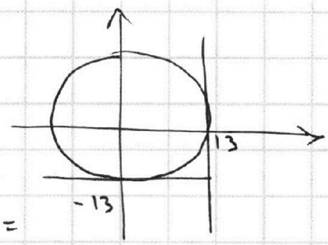
$\arcsin\frac{x}{6} + \arcsin\frac{y}{2} < \pi$

№6 $\begin{cases} (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \le 0 \\ x^2 + y^2 \le 169 \end{cases}$

(−)(+) (+)(−) подходит

$\leftarrow -5\sqrt{2}\cos\alpha \rightarrow$





$-5\sqrt{2}\sin\alpha =$

$-5\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= -5$

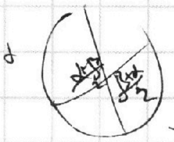
$-5\sqrt{2}\cos\alpha = 13$

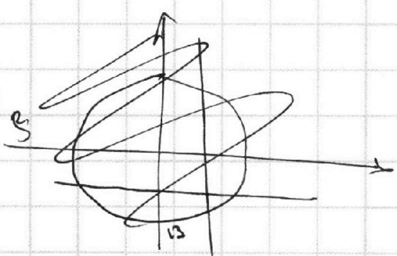
$5\sqrt{2}\sin\alpha = 13$

$\cos\alpha = -\frac{13}{5\sqrt{2}}$

$\sin\alpha = \frac{13}{5\sqrt{2}}$

$\frac{169}{25\cdot 2} + \frac{169}{25\cdot 2} = 1$





~~$-5\sqrt{2}\cos\alpha$ max $5\sqrt{2}$~~

~~$-5\sqrt{2}\sin\alpha$ min $-5\sqrt{2}$~~

~~$\cos\alpha = -1$~~

~~$\sin\alpha$~~

max 5

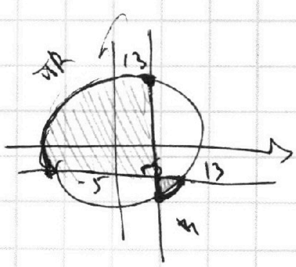
$5\sqrt{2}(\sin\alpha - \cos\alpha) \to \max$

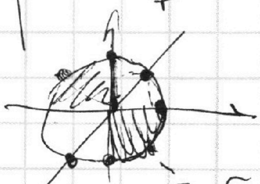
$\sin\alpha - \cos\alpha \to \max$

~~$\sin\alpha - \cos\alpha = \max$~~

~~$\sin\alpha = \cos\alpha + \max$~~

$\sqrt{1-\cos^2\alpha}\ \cos\alpha$





$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= \sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

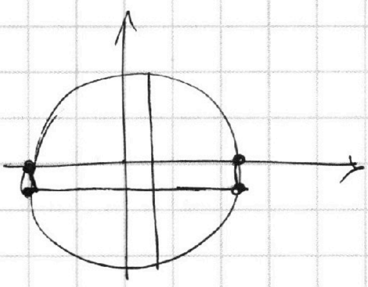
№1

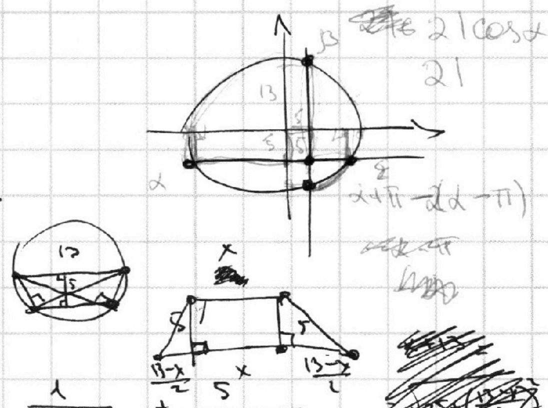
$A \cdot B \cdot C = x^2$ либо A, B, C - квадраты

$A > B > C$ либо 1 из чисел - квадрат

либо $(A, B, C) \neq 1$

1111
2222
3333
4444
5555
6666
7777
8888
9999





№2 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$

$x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2+y^2+xy) - 6xy = (x-y)((x-y)^2 + 3xy) - 6xy$

$\frac{x+y}{xy} + \frac{5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy}$

$\frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{x+y+5=0} \\ xy = (x-2)(y+2) \end{array}\right.$

$\hookrightarrow \cancel{xy} = \cancel{xy} + 2x - 2y - 4$

$x - y = 2$

$\left\{\begin{array}{l} \cancel{y = -x-5} \\ x - y = 2 \end{array}\right.$

$\cancel{(1)\ x^3 + (x+5)^3 + 6x(x+5) = x^3 + x^3 + 3x^2 \cdot 5 + 3x \cdot 25 + 125 + 6x^2 + 30x}$

$\cancel{= 2x^3 + 21x^2 + 105x + 125}$

$\cancel{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+7} + \frac{5}{(x-2)(x+7)}}$

$x + 7 - x + 2 + 5$

$\frac{y+x+5}{xy} \to \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)}$

$x - y = 2$

$\cancel{xy = (x+2)(y-2)}$

$2(\overset{4}{2^2} + 3xy) - 6xy = \boxed{8}$

655
× 5
3275

112435
× 3275
562175
787045
224870
337305
368224625

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(\sin \pi x + \sin \pi y)\sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y)\cos \pi x$

$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = - \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$

$x + y = 0$ или π

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

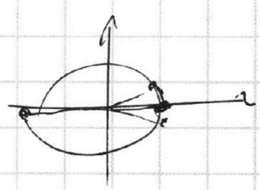
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a + \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\sin \pi x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}(x-y)\right) + \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}(x-y)\right)\right)$

$\sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \cdot \cos \pi x = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}(y-x)\right) + \sin\left(-\pi x + \frac{\pi}{2}(y-x)\right)\right)$

$\sin(\alpha) = \sin(-\alpha)$

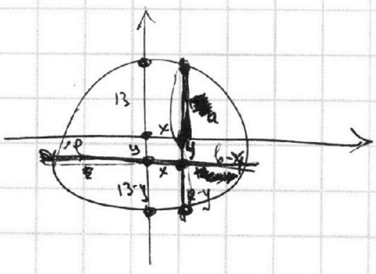
$\alpha = 0$ или π



$\pi x + \frac{\pi}{2}(x-y) = \pi n$

$x + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = n$

$3x - y = 2n$



$\max(a+y+a-y+$

$\begin{cases}(a+y)(a-y) = (b+x)(b-x)\end{cases}$

$a^2 - y^2 = b^2 - x^2$

$a^2 - b^2 + x^2 - y^2 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\arcsin\frac{x}{6} + \arcsin\frac{y}{2} < \pi$

A·B·C – квадрат

A·B·C – кв.

$655 = 5 \cdot 131$

$562175 : 5 = 112435$

$589500 - 27225 = 562175$

$655 \times 900 = 589500$

$165 \times 165 = 27225$

1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999

1, 4, 9, 6, 5

1, 4, 5, 6, 9

$9999 : 3 = 3333$

$9999 = 9 \cdot 1111$

$1111 = 11 \cdot 100 + 11 = 11 \cdot 101$

4·1111

5·1111

6·1111

9·1111

11·101

2·11·101

3·11·101

...

9·11·101

101·k

$101 \times 11 = 1111$

$101 \times 2 = 202$

202, 303, 404, 505, 606, 707, 808

101

17·

$170 - 101 = 69$

$17 \cdot 5 = 85$

$131 \times 6 = 786$

n·11·101·

от 1 до 9

$112435 : 131 = 858$

$112435 - 1048 = 763$, $763 - 655 = 108$

606

$131 \times 5 = 655$

(n·11·101)(6·101)(33)

:11

33

$131 \times 8 = 1048$

$13 \cdot 8 = 80 + 24 = 104$

n·11·101·2·3·101·3·11

1 7 3 ~~8~~ ~~8~~

7 9

$763 - 655 = 108$

$11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot n =$

2, 8

$1124 - 1048 = 0076$

29

...1

...3

...7

...9

10·10

131·5

1310

-1035

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4 k - кол-во один.-ов, Δ - выделенных еще

C_k^4 $\quad \frac{6 \cdot 2}{C_k^4} = \frac{2}{C_k^{4+\Delta}}$

1 2 3 4 5 6 7

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\quad \frac{6}{\frac{k!}{4!(k-4)!}} = \frac{1}{\frac{(k+\Delta)!}{4!(k+\Delta-4)!}}$

$4! = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$

$24 \times 6 = 20 \cdot 6 + 24 = 144$

$\frac{144}{k(k-1)(k-2)(k-3)} = \frac{1}{(k+\Delta)(k+\Delta-1)(k+\Delta-2)(k+\Delta-3)}$

$144(k+\Delta)(k+\Delta-1)(k+\Delta-2)(k+\Delta-3) = k(k-1)$

$C_k^4 = 6 \cdot C_k^{4+\Delta}$

$\frac{k!}{4!(k-4)!} = 6 \cdot \frac{k!}{(4+\Delta)!(k-4-\Delta)!}$

$(4+\Delta)!(k-4-\Delta)! = 144(k-4)!$

П В

C_{k-2}^2

C_k^4

П Δ

$C_{k-2}^{2+\Delta}$

$4+\Delta$

$6 \cdot \frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} = \frac{C_{k-2}^{2+\Delta}}{C_k^{4+\Delta}}$

$6 \cdot \frac{\frac{(k-2)!}{2!\cdot(k-4)!}}{\frac{k!}{4!(k-4)!}} = \frac{\frac{(k-2)!}{(2+\Delta)!(k-4-\Delta)!}}{\frac{k!}{(4+\Delta)!(k-4-\Delta)!}}$

$\frac{1}{72} = \frac{(2+\Delta)!}{(4+\Delta)!}$

$~~8 = (\Delta+3)(\Delta+4)~~$

$~~8 = \Delta^2 + 7\Delta + 12~~$

$~~\Delta^2 + 7\Delta - 4 = 0~~$

$3 \cdot 4! = 3 \cdot 24 = 60+1$

$72 = \Delta^2 + 7\Delta + 12$

$\Delta^2 + 7\Delta - 60 = 0$

$\Delta = 5$

$4+5 = \boxed{9}$

$-12 \cdot 5$

$3\cdot 24 = 60+1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

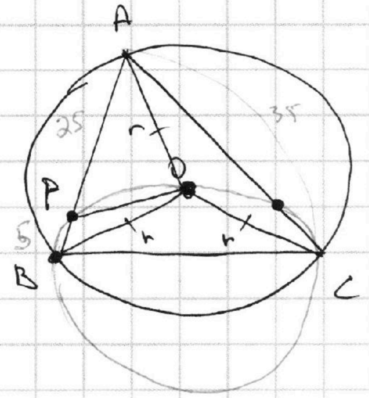
СТРАНИЦА __ ИЗ __

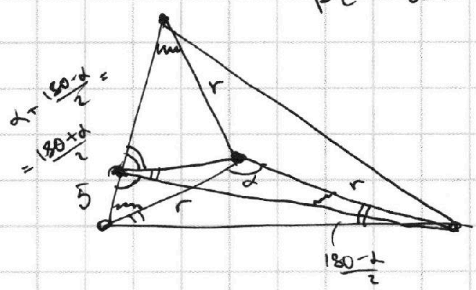
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

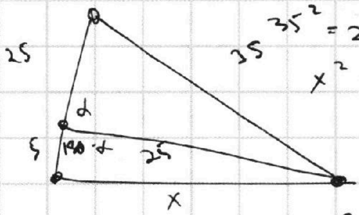
№5

S_{ABC} - ?

$PC = 25$







$35^2 = 25^2 + 25^2 - 2\cdot 25^2 \cos\alpha$

$x^2 = 25 + 25^2 + 2\cdot 5\cdot 25\cdot \cos\alpha$

$35^2 = 2\cdot 25^2 (1-\cos\alpha)$

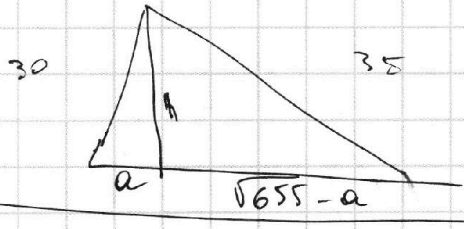
$1-\cos\alpha = \frac{35^2}{2\cdot 25^2}$

$\cos\alpha = \frac{2\cdot 25^2 - 35^2}{2\cdot 25^2}$

$x^2 = 25 + 25^2 + \frac{2\cdot 25^2 - 35^2}{5}$

$x^2 = 25 + 25^2 + \frac{25}{5} = 30 + 25^2 = 655$

$25\cdot 25 = 625$, $35\cdot 35 = 1225$, $625+625 = 1250$



$$\begin{cases} h^2 + a^2 = 900 \\ h^2 + 655 + a^2 - 2\sqrt{655}\,a = 1225 \end{cases}$$

$\boxed{\ldots}$

$1225 : 5 = 245$

$655 : 5 = 131$

$625\cdot 2$

$625 : 5 = 125$

$p \cdot q = 90$

$150 + 15 = 165$

$900 - 245 = 655$