



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



+ 1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

$$aaaa = 1111 \cdot a$$

+ 2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

+ 3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
 $\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = \cos^2 \pi x - \cos^2 \pi y$

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

+ 4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

+ 5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases} \quad \pi R = 13\pi ?$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть число A имеет вид \overline{aaaa} , тогда

$$A = 1000 \cdot a + 100 \cdot a + 10a + a = 1111 \cdot a$$

$$1111 = 101 \cdot 11 \Rightarrow A = a \cdot 101 \cdot 11, a \neq 0$$

$A \cdot B \cdot C$ - квадрат натурального числа, тогда
каждый простой множитель $A \cdot B \cdot C$ встречается в
этом произведении четное количество раз

$$A \cdot B \cdot C = (a \cdot 101 \cdot 11) \cdot B \cdot C \Rightarrow B \cdot C : 101, B \cdot C : 11$$

т.к. C - двузначное число $C \not\equiv 101 \Rightarrow B : 101$

$$\Rightarrow B \text{ имеет вид } \overset{\circ}{B} = b \cdot 101, b \in [1; 9], b \in \mathbb{Z}$$

$$B = \frac{B0B}{\downarrow \text{посл}} \quad \text{т.к. одна из цифр } B - b \Rightarrow b = 6$$

$$\text{тогда } B = 606$$

(B не может иметь другой вид и быть кратным 11 т.к. 10111 - гетверхзк)

$$A \cdot B \cdot C = (a \cdot 101 \cdot 11) \cdot (6 \cdot 101) \cdot C$$

$$a \not\equiv 11 \quad \text{т.к. } a - \text{цифра} \Rightarrow C : 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = c \cdot 11, \text{ тогда } C = \overline{cc} \quad \text{т.к. одна из цифр } C - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 33$$

$$A \cdot B \cdot C = (a \cdot 101 \cdot 11) \cdot (6 \cdot 101) \cdot (3 \cdot 11) = (a \cdot 101 \cdot 11)(3 \cdot 2 \cdot 101)(3 \cdot 11)$$

101 - имеет **парный** множитель

11 - имеет **парный** множитель

3 - имеет **парный** множитель

\Rightarrow за - квадрат $\text{тогда } a \in \{2; 8\}$

a	za
1	$2 \neq n^2$
2	$4 = 2^2$
3	$6 \neq n^2$
4	$8 \neq n^2$
5	$10 \neq n^2$
6	$12 \neq n^2$
7	$14 \neq n^2$
8	$16 = 4^2$
9	$18 \neq n^2$

\Rightarrow всего трое $\overset{\circ}{a}$

A	B	C
2222	606	33
8888	606	33

$$\boxed{\text{Ответ: } (A; B; C) = [(2222; 606; 33), (8888; 606; 33)]}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy}$$

$$\text{последовательность } K(x,y) = \frac{x+y+5}{xy} = k_0, \text{ тогда } K(x-2,y+2) = k_0$$

$$\frac{(x-2)+(y+2)+5}{(x-2)(y+2)} = k_0$$

$$\frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{xy} \Rightarrow \begin{cases} xy = (x-2)(y+2) \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = xy + 2x - 2y - 4 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y+2 \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow x = y+2$$

$$M = (y+2)^3 + y^3 - 6(y+2)y = (y^3 + 6y^2 + 12y + 8) - y^3 - (6y^2 + 12y) = 8$$

ОТВЕТ: $M = 8$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi y - \pi x) = \cos 2\pi x$$

$$\begin{cases} \pi y - \pi x = 2\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi x - \pi y = 2\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ y = -x + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$b) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} < \pi - \arcsin \frac{y}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin \frac{y}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \pi - \arcsin \frac{y}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

получается $\arcsin \frac{x}{6} < \pi - \arcsin \frac{y}{2}$ всегда, кроме $\arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2}$,

$\arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow y = 2$, рассмотрим этот случай:

$$\arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{6} = 1 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = \begin{cases} 18 + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ -6 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow y = 2 \quad 1) 2 = 18 + 2k \Rightarrow k = -8 \\ 2) 2 = -6 + 2k \Rightarrow k = 4$$

тогда $k \in \{-8; 4\}$

если $\arcsin \frac{x}{6} \neq \frac{\pi}{2}$ или $\arcsin \frac{y}{2} \neq \frac{\pi}{2}$, то достаточно ограничить на область определения \arcsin :

$$\begin{cases} \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

1) рассмотрим $y = -x + 2k$:

$$\begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -6 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq -x + 2k \leq 2, k \in \mathbb{Z} \\ 2k - 2 \leq x \leq 2 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

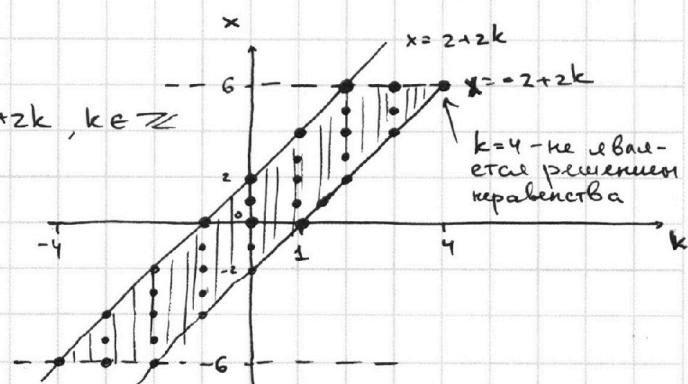
видно, что при четных x есть 3

подходящих $k \in \mathbb{Z}$

при нечетных x есть 2

подходящих $k \in \mathbb{Z}$

притом $k \neq 4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

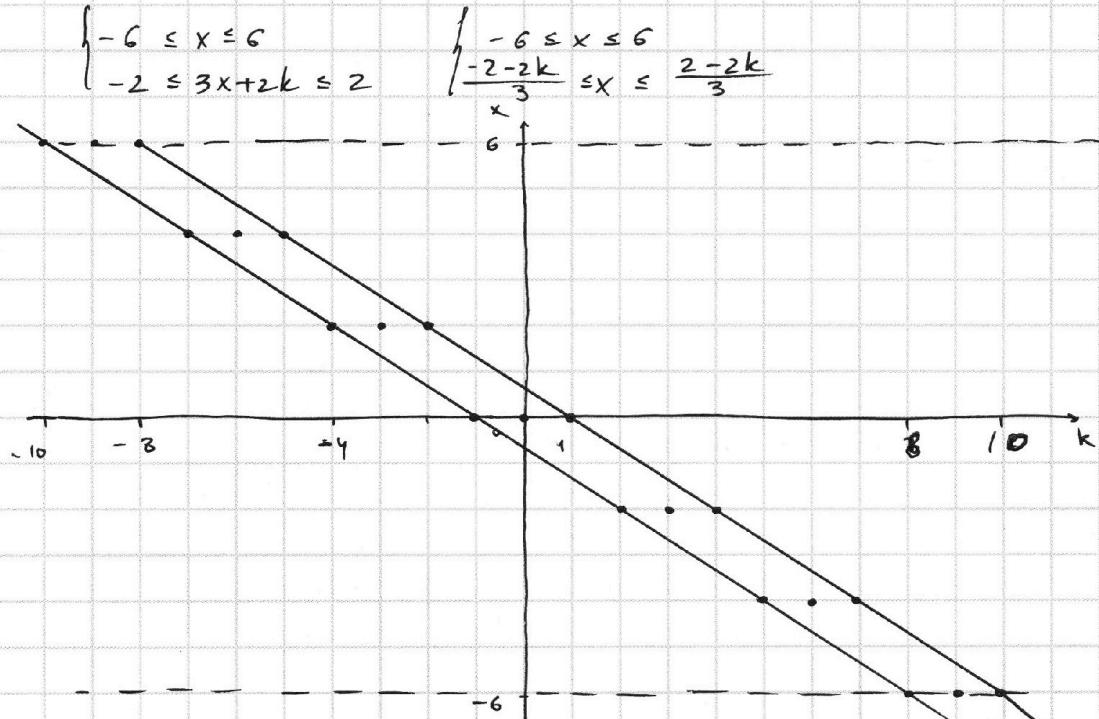
тогда в этом случае таких пар $(x; y)$ всего:

$$3 \cdot 7 - 1 + 2 \cdot 6 = 32$$

по $3k$ где $x=6$, $k=4$ — не решение
для $x \in \{6; 4; 2; 0; -2; -4; -6\}$

по $2k$ где $x \in \{5; 3; 1; -1; -3; -5\}$

2) $y = 3x + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ — рассмотрим этот случай



из анализа графика понятно, что при $x \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ только при $x=2$, а всего $k=3$ при этом, $k=-8$ — не является решением неравенства

тогда в этом случае пар $(x; y)$ всего 8

$$3 \cdot 7 - 1 = 20$$

по $3k$ $\rightarrow k \neq -8$
где $k \in \{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вспомогательные пары для $y = -x+2k$ и $y = 3x+2k$		
$y = -x+2k$		$y = 3x+2k$
x	k	y
6	2	-2
3	0	
4	\emptyset	
5	2	-1
3	1	
4	-1	-2
2	0	
3	2	
3	1	-1
2	1	
2	0	-2
1	0	
2	2	
1	0	-1
1	1	
0	-1	-2
0	0	
1	2	
-1	-1	-1
0	1	
-2	-2	-2
-1	0	
0	2	
-3	-2	-1
-1	1	
-4	-3	-2
-2	0	
-1	2	
-5	-3	-1
-2	1	
-6	-4	-2
-3	0	
-2	2	

Заметили, что при значениях x , решения $y = -x+2k$ и $y = 3x+2k$ совпадают, тогда упомянутых решений будет столько, сколько при $y = -x+2k$, то есть 32.

Ответ 3 32

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

рассмотрим вероятность того, что шансов получит билет

пусть у нас x билетов и n учеников
购票 \Rightarrow вероятность получить 1-ый билет $= p_1$

$$p_1 = \frac{1}{n}$$

2 билет \Rightarrow вероятность получить 2-ой билет $- p_2$ (не получив 1-ый)
 Теперь т.к. 1-ый билет разыгрывается между $n-1$ учениками
 $p_2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$
 вероятность не получить 1-ый билет $= 1-p_2$

3 билет \Rightarrow вероятность получить 3-ий билет $- p_3$
 (не получив 1-ый и 2-ой)

4 билет \Rightarrow

$$p_3 = \left(1 - p_1 - p_2\right) \cdot \frac{1}{n-2} \quad \begin{matrix} \text{выводится из } n-2 \text{ учеников} \\ \text{т.к. первое из двух билетов разыграно} \end{matrix}$$

$$p_3 = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$$

тогда шансовой k -ый билет можно получить с вероятностью p_k :

$$p_k = \underbrace{\left(1 - (p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1})\right)}_{\substack{\text{последовательность} \\ \text{вероятностей}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n-(k-1)}}_{\substack{k-1 \text{ билеты разыграны}}} = \frac{1}{n-(k-1)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k-1} p_i = (k-1) \cdot \frac{1}{n}$$

$$\text{тогда } p_k = \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow p_k$ всегда равно $\frac{1}{n}$

вероятность получить билет при разыгрывании x билетов $= p$, $p = p_1 + p_2 + \dots + p_x = x \cdot \frac{1}{n}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда вероятность того, что получат одно налогицо

$$P_0 = \sqrt{P^2 - \underbrace{(P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_n^2)}_{\frac{1}{n^2}}} = \frac{x^2}{n^2} - x \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{x^2 - x}{n^2}$$

~~тогда~~ вероятность того что они получат одно и тот же баллот

тогда при четырех баллотах $P_0(4) = \frac{12}{n^2}$

при m - количестве баллот в конце месяца $P_0(m) = \frac{m^2 - m}{n^2}$

$$\frac{P_0(m)}{P_0(4)} = 6 = \frac{m^2 - m}{12} \Rightarrow m^2 - m - 72 = 0$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1289}}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = -8 \\ m = 9 \end{cases}, \text{ оговариво } m > 0 \Rightarrow m = 9$$

Ответ: 9 баллот

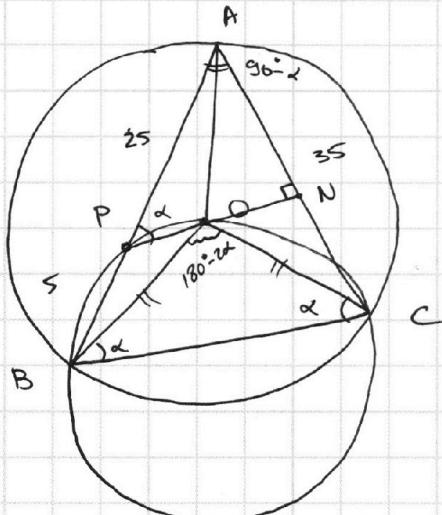


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $PO \cap AC = N$

$BO = OC = R$, где R - радиус ω_1

$\Rightarrow \angle BOC$ равноделенности \Rightarrow

$\Rightarrow \angle OBC = \angle OCB$, пусть

$\angle OBC = \angle OCB = \alpha \Rightarrow$

\Rightarrow по сумме углов $\triangle BOC$

$$\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$$

т.к. $\angle BOC$ - центральный угол ω_1 , опирающийся на дугу $BC =$

$$\Rightarrow \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \angle BOC = 90^\circ - \alpha$$

$\angle BPO$ - вписанный в ω_2 четырехугольник

$$\Rightarrow \angle BPO + \angle OCB = 180^\circ \Rightarrow \angle BPO = 180^\circ - \alpha, \text{ тогда}$$

$$\angle APN = 180^\circ - \angle BPO = \alpha \quad (\text{т.к. смежные})$$

тогда по сумме углов $\triangle PAN \Rightarrow \angle PNA = 90^\circ =$

\Rightarrow т.к. $AO = OC = R \Rightarrow \triangle AOC$ - равноделенности \Rightarrow

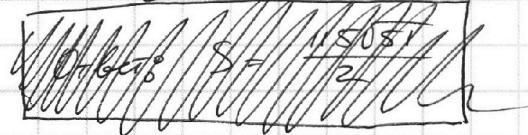
\Rightarrow т.к. ON - бисектриса $\triangle ADC \Rightarrow DN$ - медиана, тогда

$$AN = NC = \frac{35}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{AN}{AP} = \frac{\frac{35}{2}}{25} = \frac{7}{10} = 0,7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10} \quad \text{т.к. } AB = 25 + 5 = 30$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 35 \cdot \sin 90^\circ - \alpha = \\ = 15 \cdot 35 \cdot \cos \alpha = 15 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$



$$\text{Ошибка!} \quad S = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

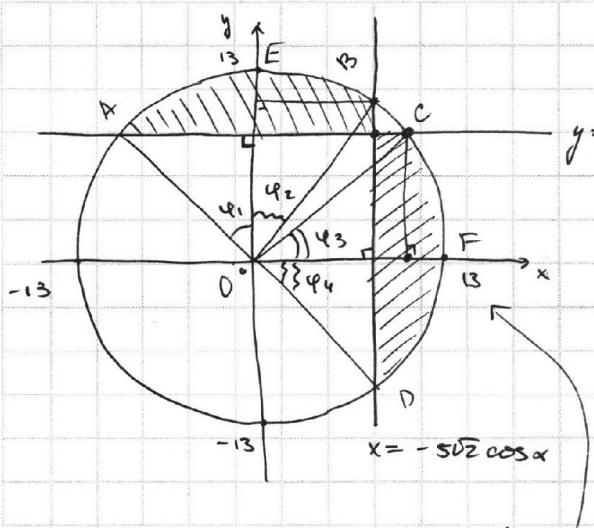
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



найдем периметр $P(x)$
 P — периметр

$$P = \underbrace{AB + CD}_{\text{дуги}} + BD + AC$$

сущности

постр $\angle AOE = \varphi_1$, $\angle EOB = \varphi_2$

$\angle COD = \varphi_3$, $\angle FOD = \varphi_4$

$AO = BO = CO = OD = 13$ — радиусы
сущности

$$\text{тогда } \cos \varphi_1 = \left| \frac{-5\sqrt{2} \sin \alpha}{13} \right|$$

$$\sin \varphi_2 = \left| \frac{-5\sqrt{2} \cos \alpha}{13} \right|$$

$$\sin \varphi_3 = \left| \frac{-5\sqrt{2} \sin \alpha}{13} \right|$$

$$\cos \varphi_4 = \left| \frac{-5\sqrt{2} \cos \alpha}{13} \right|$$

$$AB + CD = 13 \cdot (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)$$

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_2 + \varphi_4) &= \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_4 + \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_4 = \frac{50}{169} \cdot \cos^2 \alpha + \\ &+ \left(\sqrt{1 - \left(\frac{-5\sqrt{2} \cos \alpha}{13} \right)^2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}}{13} \right)^2 + \frac{50}{169} \cdot \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi_2 + \varphi_4 = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

1) $x^2 + y^2 \leq 13^2$ — круг радиусом 13

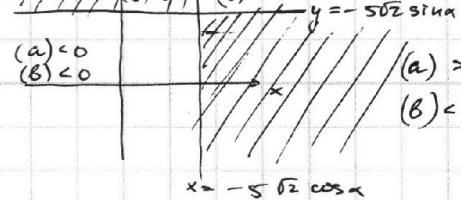
2) $(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0$

обозначим следующим образом:

$$x + 5\sqrt{2} \cos \alpha = (a)$$

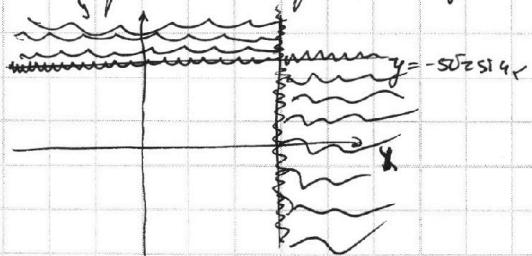
$$y + 5\sqrt{2} \sin \alpha = (b)$$

$$\begin{array}{ll} (a) < 0 & (a) > 0 \\ \hline \hline (b) < 0 & (b) > 0 \end{array}$$



(a), (b) ≤ 0 только такие, где

(a), (b) имеют различный знак или равны нулю, тогда



бесконечные области
подходит нам

Берем любые так как

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 < \frac{\pi}{2}$

записи



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

аналогично

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_3) = \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_3 + \sin \varphi_3 \cdot \cos \varphi_1 = -\frac{50}{169} \sin^2 \alpha + \\ + \sqrt{1 - \left(\frac{50 \sin \alpha}{169}\right)^2} = \frac{50}{169} \sin^2 \alpha + \frac{169 - 50 \sin^2 \alpha}{169} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_1 + \varphi_3 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \pi$$

$\Rightarrow AB + CD = 13\pi \rightarrow$ не зависит от α

теперь рассмотрим AC и BD

$$AC = \sqrt{169 - (50 \sin \alpha)^2} = \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

т.к. окружность симметрична относительно оси y , то
 $AC = 2x_c = 2\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$

$$BD = y_B = \sqrt{169 - (50 \cos \alpha)^2} = \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} = \sqrt{169 + 50 \sin^2 \alpha}$$

т.к. окружность симметрична относительно оси x , то

$$BD = 2y_B = 2\sqrt{169 + 50 \sin^2 \alpha}$$

$$AC + BD = 2\sqrt{169 + 50 \sin^2 \alpha} + 2\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

сделаем замену: $50 \sin^2 \alpha = t$, тогда

$$AC + BD = 2\sqrt{169 + t} + 2\sqrt{169 - t} = g(t) \rightarrow t \text{ макс}$$

$$g'(t) = \frac{1}{\sqrt{169 + t}} + \frac{-1}{\sqrt{169 - t}} = 0$$

$$169 - t = 169 + t \Rightarrow t = 25$$

$$g''(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(169+t)\sqrt{169+t}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(169-t)\sqrt{169-t}} < 0 \Rightarrow t = 25 - \text{ максимум}$$

обратная замена: $25 = 50 \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{тогда: } AC = 2\sqrt{169 - 25} = 2\sqrt{144} = 212 = 24$$

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BD = 2\sqrt{119 + 25} = 2\sqrt{144} = 12 \cdot 2 = 24$$

$$\Rightarrow AB + CD = 13\pi$$

$$BD + AC = 24 \cdot 2 = 48$$

тогда $M = 48 + 13\pi$, при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

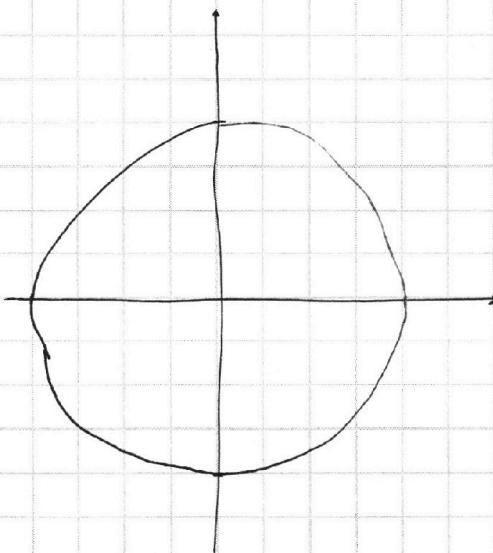
6

7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

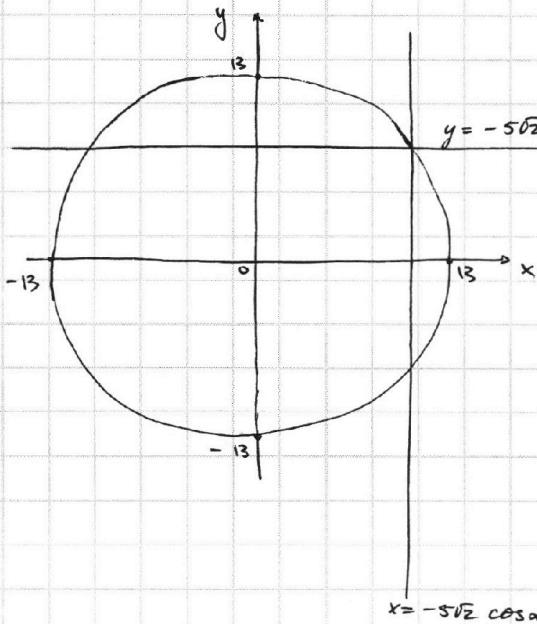
6

7

СТРАНИЦА

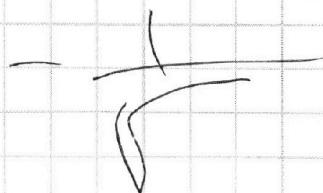
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 169 \\ (x + 50\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 50\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 \leq 169$ — круг радиусом 13



1
2 -

$$x = \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

AC $\overset{\circ}{\angle}$ 6

$$AC = 2 \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$BD = 2 \sqrt{68 - 50 \cos^2 \alpha}$$

$$2 \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} +$$

$$+ 2 \sqrt{68 - 50 \cos^2 \alpha}$$

$$= 2 \left(\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} \right)$$

$$-\frac{2 \sqrt{169 - t}}{\sqrt{169 - t}} + \frac{2 \sqrt{119 + t}}{\sqrt{119 + t}} = 0$$

$$119 + t = 169 + t$$

$$2t = 50 \Rightarrow t = 25 \Rightarrow \sin^2 \alpha$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

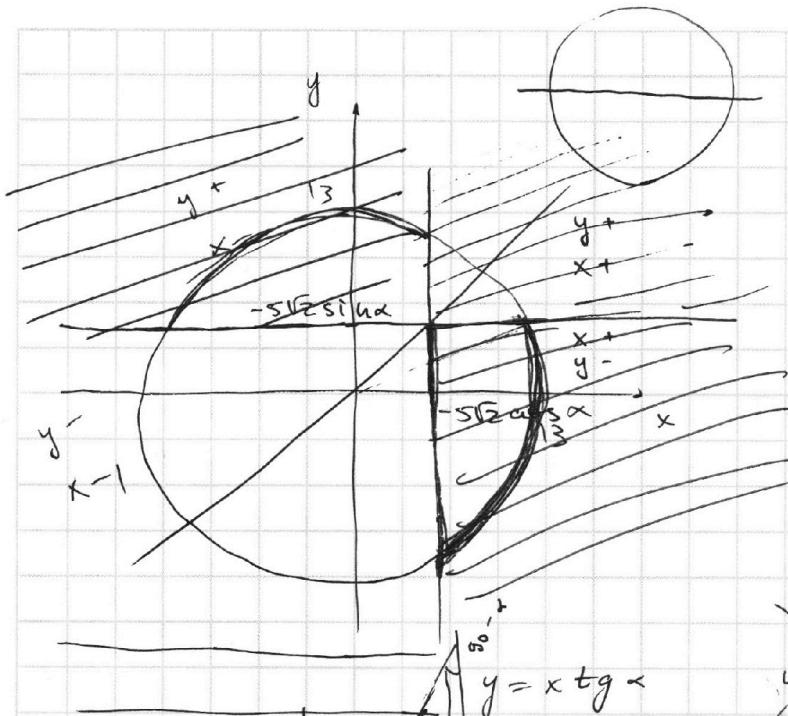
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$x = \sqrt{2} \cdot \cos x \leq 0$$

$$y = \sin x \leq 0$$

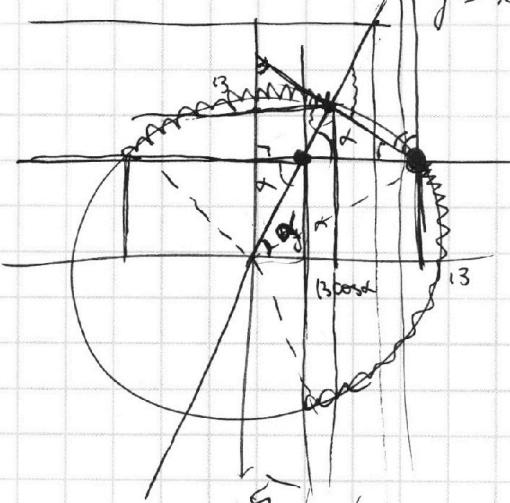
~~10/18/2003~~

$$x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$$

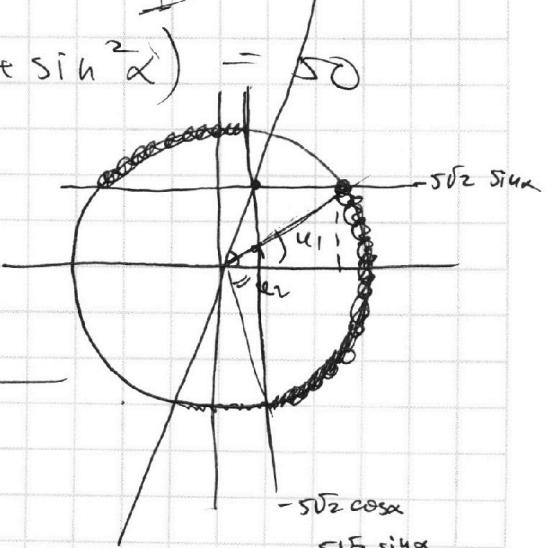
$$y = -5\sqrt{2}$$

$$x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$$



$$50 \left(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \right)^{\frac{1}{2}} = 50$$



$$\sin 41 = \frac{-5\sqrt{2} \sin 4\alpha}{13}$$

5.351

38 - 30



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

The page contains several handwritten geometric diagrams and associated calculations:

- Diagram 1:** A circle with center O. Points A, B, and C are on the circumference. Chords AC and BC are drawn. Angle AOC is labeled α . Dashed lines connect O to A and O to C.
- Diagram 2:** Similar to Diagram 1, but angle AOC is labeled 15° .
- Diagram 3:** A triangle ABC inscribed in a circle. Angle A is labeled 60° . Angle B is labeled 30° . Angle C is labeled 30° . A dashed line connects O to C.
- Diagram 4:** Two circles intersect at points P and Q. Chords AB and CD are drawn, where A, B, C, and D are points on the outer circle. Angle AOB is labeled 120° . Angle COD is labeled 15° . Chords AC and BD are also drawn.
- Diagram 5:** Similar to Diagram 4, but angle AOB is labeled 102° and angle COD is labeled 35° .
- Equation 1:** $BC = R^2 + R^2 - 2 \cos 2\alpha \cdot R^2 \Leftrightarrow$
- Equation 2:** $BC = 2 \cdot R \cdot \sin \alpha$
 $2R = \frac{BC}{\sin \alpha}$
- Equation 3:** $\frac{BC}{2R} = \frac{PH}{25}$
- Equation 4:** $1.1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$
- Equation 5:** $\frac{\sqrt{3}}{25} \cdot \frac{5}{2} = \frac{\sqrt{3}}{10}$
- Equation 6:** $90^\circ + 15^\circ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \left(\frac{3x}{2} + k \right) < \pi \Rightarrow$$

$$-1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \Rightarrow -6 \leq x \leq 6$$

$$-1 \leq \frac{3x}{2} + k \leq 1$$

$$\frac{-2-2k}{3} \leq x \leq \frac{2-2k}{3}$$

$$-1 \leq -\frac{x}{2} + k \leq 1$$

$$\text{c: } 1 \Rightarrow c = c$$

$$-1 \leq \frac{y}{2} \leq 1$$

$$-2 \leq y \leq 2$$

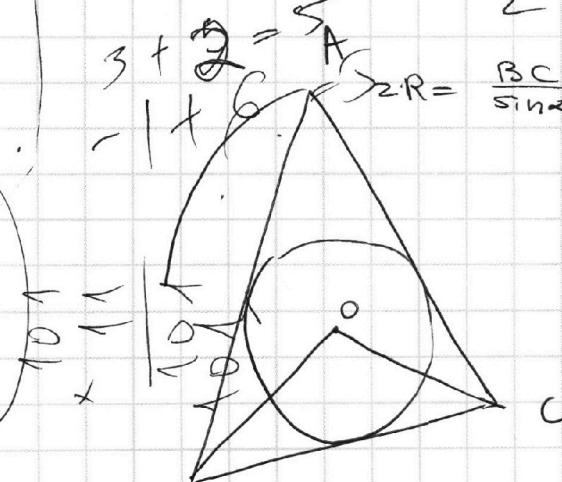
$$2k-2 \leq x \leq 2+2k$$

$$\pi - \arcsin \frac{x}{6} = \pi - \arcsin \frac{3x}{2} + k \Rightarrow$$

$$\pi - \arcsin \frac{x}{6} = \pi - \arcsin \frac{3x}{2} + k \Rightarrow$$

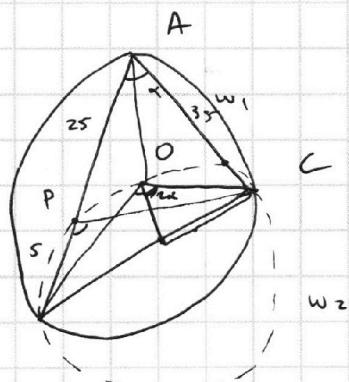
$$6-2 = -2k \Rightarrow k = -2$$

$$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot c = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 6$$



$$2 \geq x - 2k \geq -2$$

$$\frac{BC}{\sin 2\alpha}$$



$$\frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot 5 \cdot PC$$

$$R^2 = 5 \cdot PC$$

$$S = \frac{1}{2} 30 \cdot 35 \cdot \sin \alpha$$

$$BC = 30^2 + 35^2 - 2 \cos \alpha \cdot 30 \cdot 35$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{R}{2} \cdot BC}{\frac{R}{2} \cdot PC} = \frac{BC}{PC} = \frac{30^2 + 35^2 - 2 \cos \alpha \cdot 30 \cdot 35}{30^2 + 35^2 - 2 \cos \alpha \cdot 30 \cdot 35}$$

$$PC = 25^2 + 35^2 - 2 \cdot 25 \cdot 35 \cdot \cos \alpha = \frac{R^2}{S} = 25(25+49) - 2 \cdot 25 \cdot 35 \cos \alpha$$

$$BC = 30^2 + 35^2 - 2 \cdot 30 \cdot 35 \cdot \cos \alpha =$$

$$BC = 30^2 + 35^2 - 2 \cdot 30 \cdot 35 \cdot \cos \alpha =$$

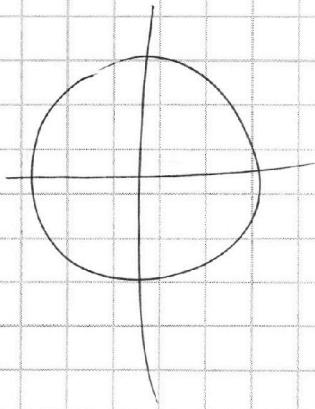


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{l}{n} \geq \frac{l}{n} + \frac{l}{n} + \frac{l}{n} = \frac{l}{m}$$

$$\frac{16}{n^2} - \frac{m}{n^2} = \frac{12}{n^2}$$

$$\frac{m^2 - m}{n^2} = \frac{m^2 - m}{n^2}$$

$$\frac{m^2 - m}{n^2} = 6$$

$$\frac{m^2 - m}{n^2} = 6$$

$$x^2 = m^2 - m$$

$$m^2 - m = 0$$

$$x^2 = 6 \cdot 12 =$$

$$= 72$$

$$256$$

$$288$$

$$\frac{12}{n^2}$$

$$288$$

$$1 \pm \sqrt{1+288}$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{289}}{2} = 9.$$

$$1 \pm \frac{\sqrt{289}}{2} = 9.$$

$$1 \pm \frac{\sqrt{289}}{2} = 9 - 22 -$$

$$81 - 9 - 22 -$$

$$1 \times 12 - 9 = 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

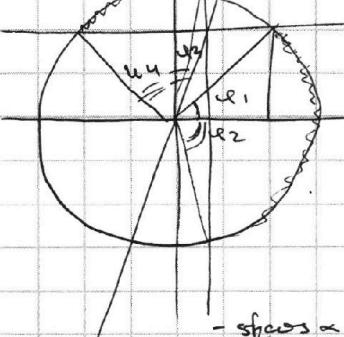
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

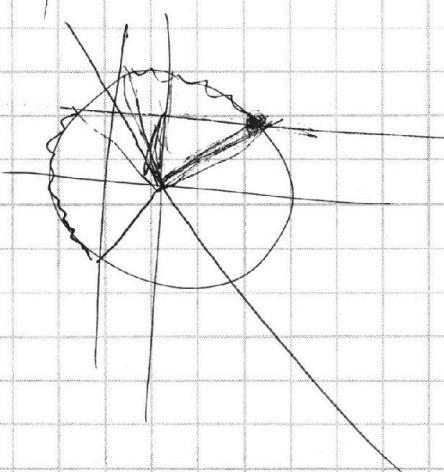
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Чертёжка



- $\sin \alpha$



- $\sin \alpha$

- $\sin \alpha$

$$\sin \varphi_1 = \frac{\sqrt{13}}{13}$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{-\sqrt{13} \cos \alpha}{13}$$

$$\sin \varphi_3 = \frac{-5\sqrt{2} \cos \alpha}{13}$$

$$\cos \varphi_4 = \frac{-5\sqrt{2} \sin \alpha}{13}$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}}{169} =$$

$$\frac{\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}}$$

$$\sin \varphi_2 = \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$

$$\cos \varphi_3 = \sqrt{\frac{169 - \cos^2 \alpha}{169}}$$

$$\sin \varphi_4 = \frac{\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}}{169}$$

~~$\cos \varphi_1 + \varphi_2 =$~~

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{169 - 50 \sin^2 \alpha}{169} + \frac{50 \sin^2 \alpha}{169} = 1$$

$$\Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

