



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



† 1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

$$aaaa = 1111 \cdot a$$

† 2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

† 3. [5 баллов] † Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

† 4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

† 5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases} \quad \pi R = 13\pi?$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть число A имеет вид $\overline{aaaa}$, тогда

$$A = 1000 \cdot a + 100 \cdot a + 10a + a = 1111 \cdot a$$

$$1111 = 101 \cdot 11 \Rightarrow A = a \cdot 101 \cdot 11, a \neq 0$$

$A \cdot B \cdot C$ - квадрат натурального числа, тогда каждый простой множитель $A \cdot B \cdot C$ встречается в этом произведении четное количество раз

$$A \cdot B \cdot C = (a \cdot 101 \cdot 11) \cdot B \cdot C \Rightarrow B \cdot C : 101, B \cdot C : 11$$

$$\text{т.к. } C - \text{двухзначное число } C : 101 \Rightarrow B : 101$$

$$\Rightarrow B \text{ имеет вид: } B = b \cdot 101, b \in [1; 9], b \in \mathbb{Z}$$

$$B = \overline{b0b} \quad \text{т.к. одна из цифр } B - b \Rightarrow b = 6$$

↓
ном

$$\text{Тогда } B = 606$$

(B не может иметь другой вид и быть кратным 11 т.к. 101 - четырехзн.)

$$A \cdot B \cdot C = (a \cdot 101 \cdot 11) \cdot (6 \cdot 101) \cdot C$$

$$a \nmid 11 \quad \text{т.к. } a - \text{цифра} \Rightarrow C : 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = c \cdot 11, \text{ тогда } C = \overline{cc} \quad \text{т.к. одна из цифр } C - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 33$$

$$A \cdot B \cdot C = (a \cdot 101 \cdot 11) \cdot (6 \cdot 101) \cdot (3 \cdot 11) = (a \cdot 101 \cdot 11) (3 \cdot 2 \cdot 101) (3 \cdot 11)$$

101 - имеет парный множитель

11 - имеет парный множитель

3 - имеет парный множитель

$\uparrow \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a$ - квадрат тогда $a \in \{2; 8\}$

a	$2a$
1	2 $\neq n^2$
2	4 $= 2^2$
3	6 $\neq n^2$
4	8 $\neq n^2$
5	10 $\neq n^2$
6	12 $\neq n^2$
7	14 $\neq n^2$
8	16 $= 4^2$
9	18 $\neq n^2$

$\Rightarrow$ всего троек две:

A	B	C
2222	606	33
8888	606	33

Ответ: $(A; B; C) = \left[\begin{array}{l} (2222; 606; 33) \\ (8888; 606; 33) \end{array} \right]$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy}$$

пусть $K(x; y) = \frac{x+y+5}{xy} = K_0$, тогда $K(x-2; y+2) = K_0$

$$\frac{(x-2) + (y+2) + 5}{(x-2)(y+2)} = K_0$$

$$\frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{xy} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot y = (x-2)(y+2) \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = xy + 2x - 2y - 4 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow x = y + 2$$

$$M = (y+2)^3 + y^3 - 6(y+2)y = (y^3 + 6y^2 + 12y + 8) - y^3 - (6y^2 + 12y) - 8$$

$$\boxed{\text{ОТВЕТ: } M = 8}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cdot \cos \pi x \\ & \sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cdot \cos \pi x \\ & \cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x \\ & \cos(\pi y - \pi x) = \cos 2\pi x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \pi y - \pi x = 2\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi x - \pi y = 2\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ y = -x + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi \\ & \arcsin \frac{x}{6} < \pi - \arcsin \frac{y}{2} \\ & \arcsin \frac{x}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ & \arcsin \frac{y}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \pi - \arcsin \frac{y}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

Заметим, что при $x \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$
 y тоже $\in \mathbb{Z} \Rightarrow$ ограничимся на
множество y можно не рассматривать

получается $\arcsin \frac{x}{6} = \pi - \arcsin \frac{y}{2}$ всегда, кроме $\arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2}$,
 $\arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}$, рассмотрим этот случай:

$$\arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{6} = 1 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = \begin{cases} 18 + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ -6 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow y = 2 \quad \begin{aligned} 1) \quad & 2 = 18 + 2k \Rightarrow k = -8 \\ 2) \quad & 2 = -6 + 2k \Rightarrow k = 4 \end{aligned}$$

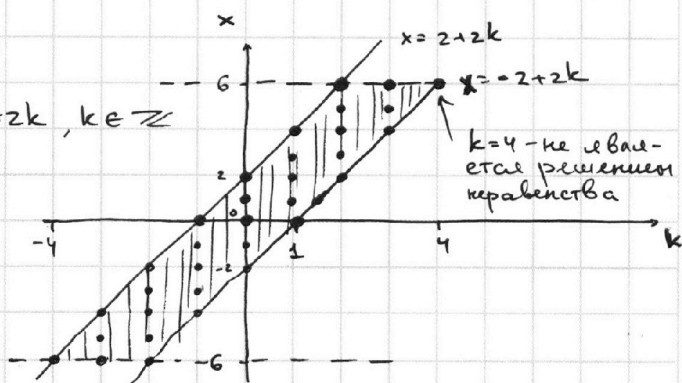
тогда $k \notin \{-8; 4\}$

если $\arcsin \frac{x}{6} \neq \frac{\pi}{2}$ или $\arcsin \frac{y}{2} \neq \frac{\pi}{2}$, то достаточно
ограничений на область определения $\arcsin$:

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{1) рассмотрим } y = -x + 2k: \\ \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq -x + 2k \leq 2, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ 2k - 2 \leq x \leq 2 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

видно, что при четных x - есть 3
подходящих $k \in \mathbb{Z}$
при нечетных x - есть 2
подходящих $k \in \mathbb{Z}$
при этом $k \neq 4$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

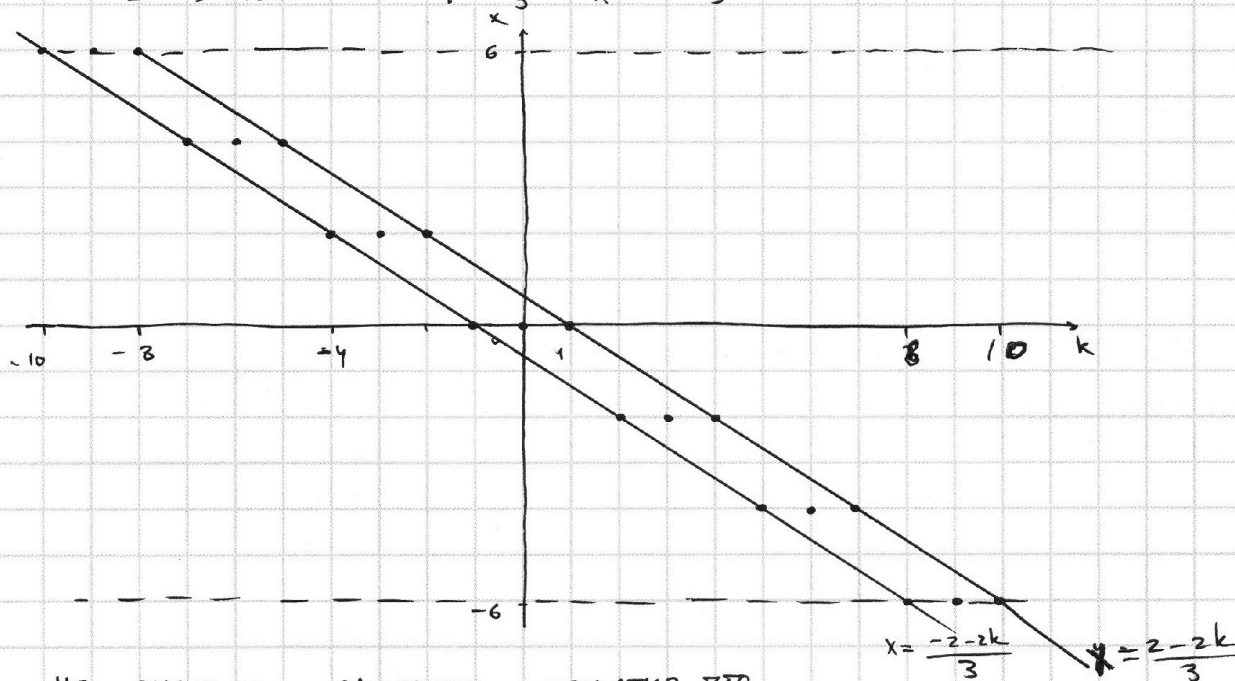
тогда в этом случае таких пар $(x; y)$ всего:

$$3 \cdot 7 - 1 + 2 \cdot 6 = 32$$

по $3k$ для $x \in \{6; 4; 2; 0; -2; -4; -6\}$ где $x=6$, $k=4$ — не решение
 по $2k$ для $x \in \{5; 3; 1; -1; -3; -5\}$

2) $y = 3x + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ — рассмотрим этот случай

$$\begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq 3x + 2k \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ \frac{-2-2k}{3} \leq x \leq \frac{2-2k}{3} \end{cases}$$



из анализа графика понятно, что при $x \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ только при $x=2$, а всего $k=3$ причем, $k=-8$ — не является решением неравенства тогда в этом случае пар $(x; y)$ всего:

$$3 \cdot 7 - 1 = 20$$

по $3k$ $\rightarrow k \neq -8$
 для $x \in \{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6\}$

~~тогда в этом случае таких пар $(x; y)$ всего:~~

~~по $3k$ $\rightarrow k \neq -8$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

выпишем все пары для $y = -x + 2k$ и $y = 3x + 2k$

$$y = -x + 2k$$

x	k	y
6	2	-2
	3	0
	4	2
5	2	-1
	3	1
4	1	-2
	2	0
	3	2
3	1	-1
	2	1
2	0	-2
	1	0
	2	2
1	0	-1
	1	1
0	-1	-2
	0	0
	1	2
-1	-1	-1
	0	1
-2	-2	-2
	-1	0
	0	2
-3	-2	-1
	-1	1
-4	-3	-2
	-2	0
	-1	2
-5	-3	-1
	-2	1
-6	-4	-2
	-3	0
	-2	2

$$y = 3x + 2k$$

x	k	y
6	-10	-2
	-9	0
	-8	2
4	-7	-2
	-6	0
	-5	2
2	-4	-2
	-3	0
	-2	2
0	-1	-2
	0	0
	1	2
-2	2	-2
	3	0
	4	2
-4	5	-2
	6	0
	7	2
-6	8	-2
	9	0
	10	2

Заметим, что при целых x решения $y = -x + 2k$ и $y = 3x + 2k$ совпадают, тогда уникальных решений будет столько, сколько при $y = -x + 2k$, то есть 32

ОТВЕТ: 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

рассмотрим вероятность того, что человек получит билет
пусть у нас x билетов и n человек
1 билет: вероятность получить 1ый билет $= p_1$
 $p_1 = \frac{1}{n}$

2 билет: вероятность получить 2ой билет $= p_2$ (не получив 1ый)
т.к. билет разыгрывается между $n-1$ человеком
уже купив 1ый билет
 $p_2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$
вероятность не получить 1ый билет $= 1 - p_1$

3 билет: вероятность получить 3ий билет $= p_3$
(не получив 1ый и 2ой)

~~рассмотрим~~
 $p_3 = \left(1 - p_1 - p_2\right) \cdot \frac{1}{n-2}$
т.к. первые два билета разыграны
выбираем из $n-2$ человек
 $p_3 = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$

тогда каждый k -ый билет можно получить с вероятностью p_k :

$$p_k = \left(1 - (p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1})\right) \cdot \frac{1}{n - (k-1)}$$

$k-1$ билет уже разыгран

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k-1} p_i = (k-1) \cdot \frac{1}{n}$$

$p_1 = p_2 = \dots = p_{k-1} = \frac{1}{n}$

$$\text{тогда } p_k = \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n - (k-1)} = \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow p_k$ всегда равно $\frac{1}{n}$

вероятность получить билет при x розыгрышах x билетов $= p$, $p = p_1 + p_2 + \dots + p_x = x \cdot \frac{1}{n}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☒☐☐☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда вероятность того, что поиграют оба мальчика:

$$p_0 = p^2 - \underbrace{\left(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 \right)}_{\substack{\text{вероятность того что они поиграют один} \\ \text{и тот же билет}}} = \frac{x^2}{n^2} - x \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{x^2 - x}{n^2}$$

~~вероятность~~ вероятность того что они поиграют один и тот же билет

тогда при четырех билетах $p_0(4) = \frac{12}{n^2}$ $n = \text{const}$

при m -количестве билетов в конце месяца $p_0(m) = \frac{m^2 - m}{n^2}$ $n = \text{const}$

$$\frac{p_0(m)}{p_0(4)} = 6 = \frac{m^2 - m}{12} \Rightarrow m^2 - m - 72 = 0$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{289}}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = -8 \\ m = 9 \end{cases}, \text{ очевидно } m > 0 \Rightarrow m = 9$$

Ответ: 9 билетов

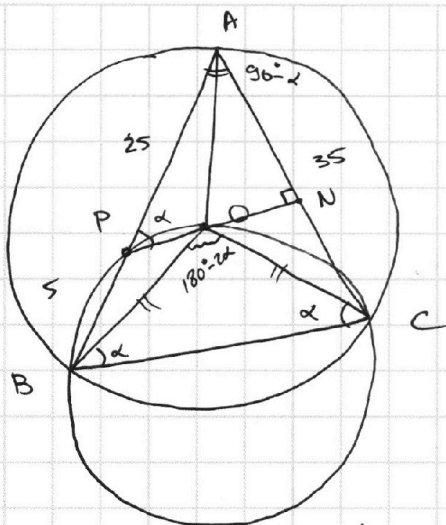


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $PO \cap AC = N$

$BO = OC = R$, где R — радиус ω_1
 $\Rightarrow \angle BOC$ равнобедренный $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OBC = \angle OCB$, пусть
 $\angle OBC = \angle OCB = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по сумме углов $\triangle BOC$
 $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$

т.к. $\angle BOC$ — центральный для ω_1 ,
 опирающийся на дугу $BC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \angle BOC = 90^\circ - \alpha$

$BPOC$ — вписанный в ω_2 четырехугольник

$\Rightarrow \angle BPO + \angle OCB = 180^\circ \Rightarrow \angle BPO = 180^\circ - \alpha$, тогда

$\angle APN = 180^\circ - \angle BPO = \alpha$ (т.к. смежный)

тогда по сумме углов $\triangle PAN$ $\angle PNA = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $AO = OC = R \Rightarrow \triangle AOC$ — равнобедренный $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. ON — высота $\triangle AOC \Rightarrow ON$ — медиана, тогда
 $AN = NC = \frac{35}{2}$

$$\sin \alpha = \frac{AN}{AP} = \frac{\frac{35}{2}}{25} = \frac{7}{10} = 0,7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10} \quad \text{и} \quad AB = 25 + 5 = 30$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 35 \cdot \sin 90^\circ - \alpha =$$

$$= 15 \cdot 35 \cdot \cos \alpha = 15 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

~~Ответ: $S = \frac{105\sqrt{51}}{2}$~~

~~Ответ: $S = \frac{105\sqrt{51}}{2}$~~

Ответ: $S = \frac{105\sqrt{51}}{2}$

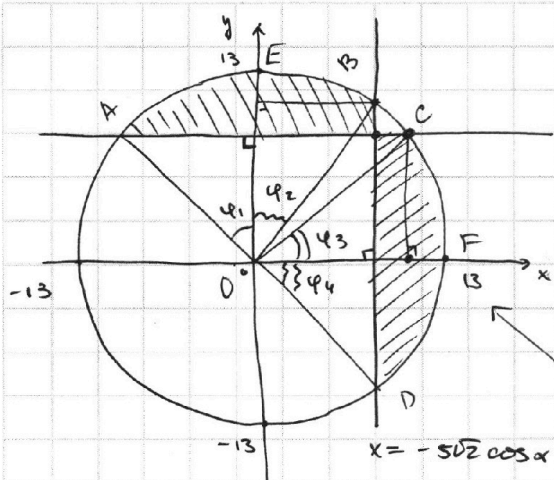


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



найдем периметр $P(\alpha)$
 P — периметр

$$P = \underbrace{AB + CD + BD + AC}_{\text{дуги окружности}}$$

пусть $\angle ADE = \varphi_1$, $\angle EOB = \varphi_2$

$\angle COF = \varphi_3$, $\angle FOD = \varphi_4$

$AO = BO = CO = OD = 13$ — радиусы окружности

$$\text{тогда } \cos \varphi_1 = \left| \frac{-5\sqrt{2} \sin \alpha}{13} \right|$$

$$\sin \varphi_2 = \left| \frac{-5\sqrt{2} \cos \alpha}{13} \right|$$

$$\sin \varphi_3 = \left| \frac{-5\sqrt{2} \sin \alpha}{13} \right|$$

$$\cos \varphi_4 = \left| \frac{-5\sqrt{2} \cos \alpha}{13} \right|$$

$$AB + CD = 13 \cdot (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)$$

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_2 + \varphi_4) &= \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_4 + \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_4 = \frac{50}{169} \cdot \cos^2 \alpha + \\ &+ \left(\sqrt{1 - \left(\frac{-5\sqrt{2} \cos \alpha}{13} \right)^2} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{169 - 50 \cos^2 \alpha}{169}} \right)^2 + \frac{50}{169} \cdot \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi_2 + \varphi_4 = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

$$y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$$

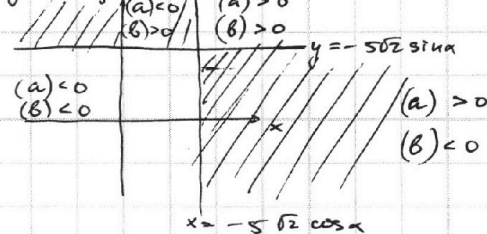
$$1) x^2 + y^2 \leq 13^2 - \text{круг радиусом } 13$$

$$2) \underbrace{(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)}_{(a)} \underbrace{(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha)}_{(b)} \leq 0$$

обозначим слагаемые (выражения):

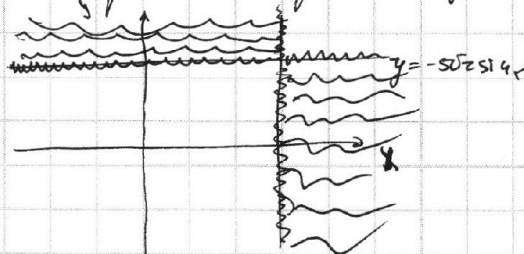
$$x + 5\sqrt{2} \cos \alpha = (a)$$

$$y + 5\sqrt{2} \sin \alpha = (b)$$



$(a)(b) \leq 0$ только там, где

$(a), (b)$ имеют разный знак или равное нулю, тогда



все вышесказанное подходит нам

берем модули так как $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 < \frac{\pi}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

аналогично

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_3) = \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_3 + \sin \varphi_3 \cdot \cos \varphi_1 = \frac{50}{169} \sin^2 \alpha + \sqrt{1 - \left(\frac{1 - 50 \sin^2 \alpha}{13}\right)^2} = \frac{50}{169} \sin^2 \alpha + \frac{169 - 50 \sin^4 \alpha}{169} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_1 + \varphi_3 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \pi$$

$$\Rightarrow AB + CD = 13\pi \rightarrow \text{не зависит от } \alpha$$

теперь рассмотрим AC и BD

$$AC: x_c = \sqrt{169 - (5\sqrt{2} \sin \alpha)^2} = \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

т.к. окружность симметрична относительно оси y, то

$$AC = 2x_c = 2\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$BD: y_b = \sqrt{169 - (5\sqrt{2} \cos \alpha)^2} = \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} \xrightarrow{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \sqrt{119 + 50 \sin^2 \alpha}$$

т.к. окружность симметрична относительно оси x, то

$$BD = 2y_b = 2\sqrt{119 + 50 \sin^2 \alpha}$$

$$AC + BD = 2\sqrt{119 + 50 \sin^2 \alpha} + 2\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

сделаем замену: $50 \sin^2 \alpha = t$, тогда

$$AC + BD = 2\sqrt{119 + t} + 2\sqrt{169 - t} = g(t) \xrightarrow{t} \max$$

$$g'(t) = \frac{1}{\sqrt{119 + t}} - \frac{1}{\sqrt{169 - t}} = 0$$

$$169 - t = 119 + t \Rightarrow t = 25$$

$$g''(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{119 + t}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{169 - t}} < 0 \Rightarrow t = 25 - \text{максимум}$$

$$\text{обратная замена: } 25 = 50 \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{тогда: } AC = 2\sqrt{169 - 25} = 2\sqrt{144} = 2 \cdot 12 = 24$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BD = 2\sqrt{119 + 25} = 2\sqrt{144} = 12 \cdot 2 = 24$$

$$\Rightarrow AB + CD = 13\pi$$

$$BD + AC = 24 \cdot 2 = 48$$

тогда $M = 48 + 13\pi$, при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

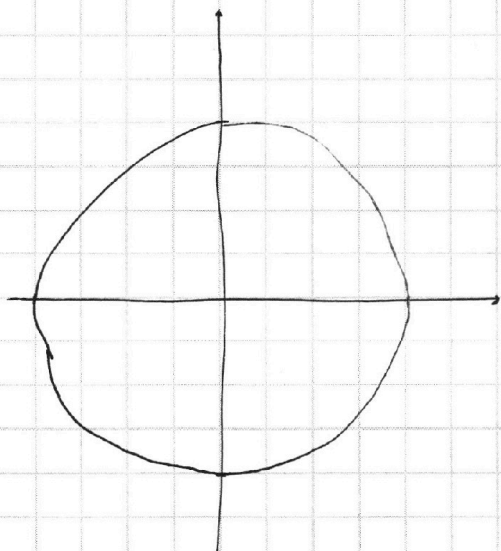
5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

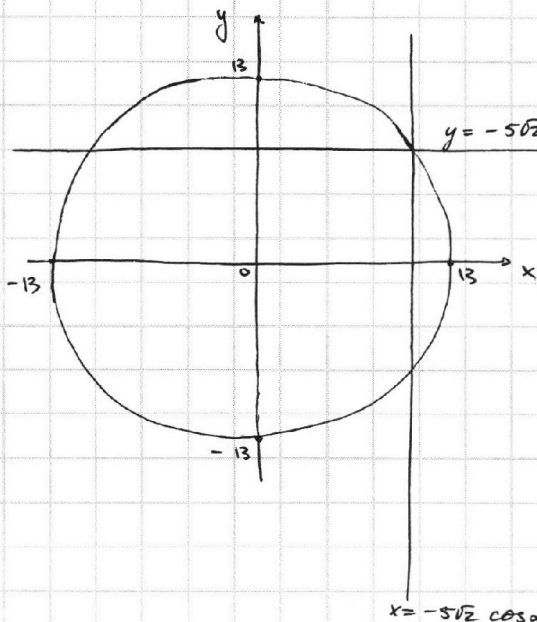
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 169 \\ (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 \leq 169$ — круг радиусом 13

1. 2.

AC⁰₆

$$x = \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$AC = 2 \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$BD = 2 \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$

$$2 \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} + 2 \sqrt{169 + 50 \sin^2 \alpha}$$

$$= 2 \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$\frac{2 \sqrt{169 - t} + 2 \sqrt{169 + t}}{\sqrt{169 - t} + \sqrt{169 + t}} = 0$$

$$169 + t = 169 + t$$

$$2t = 50 \Rightarrow t = 25 \Rightarrow \sin^2 \alpha$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

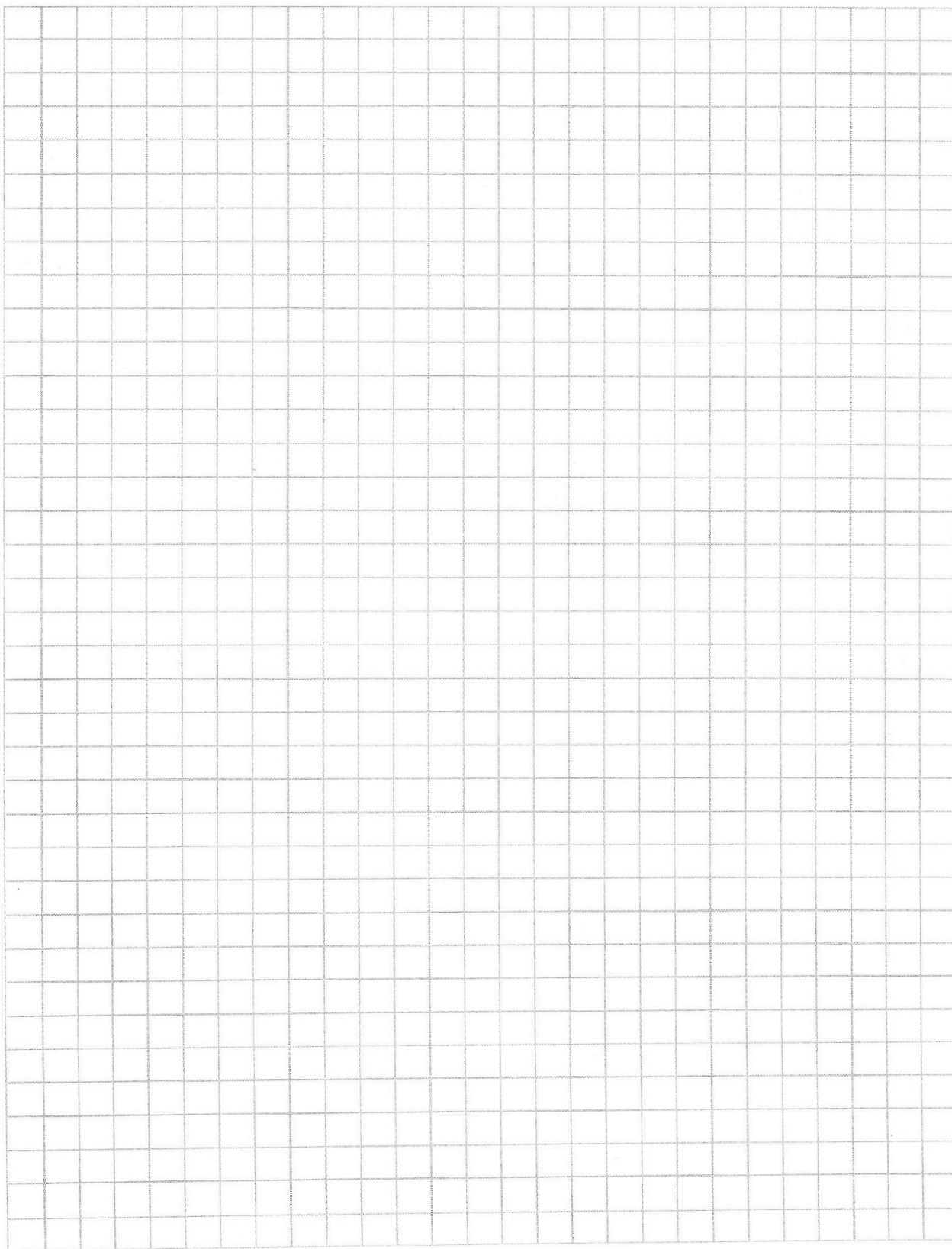
5
☐

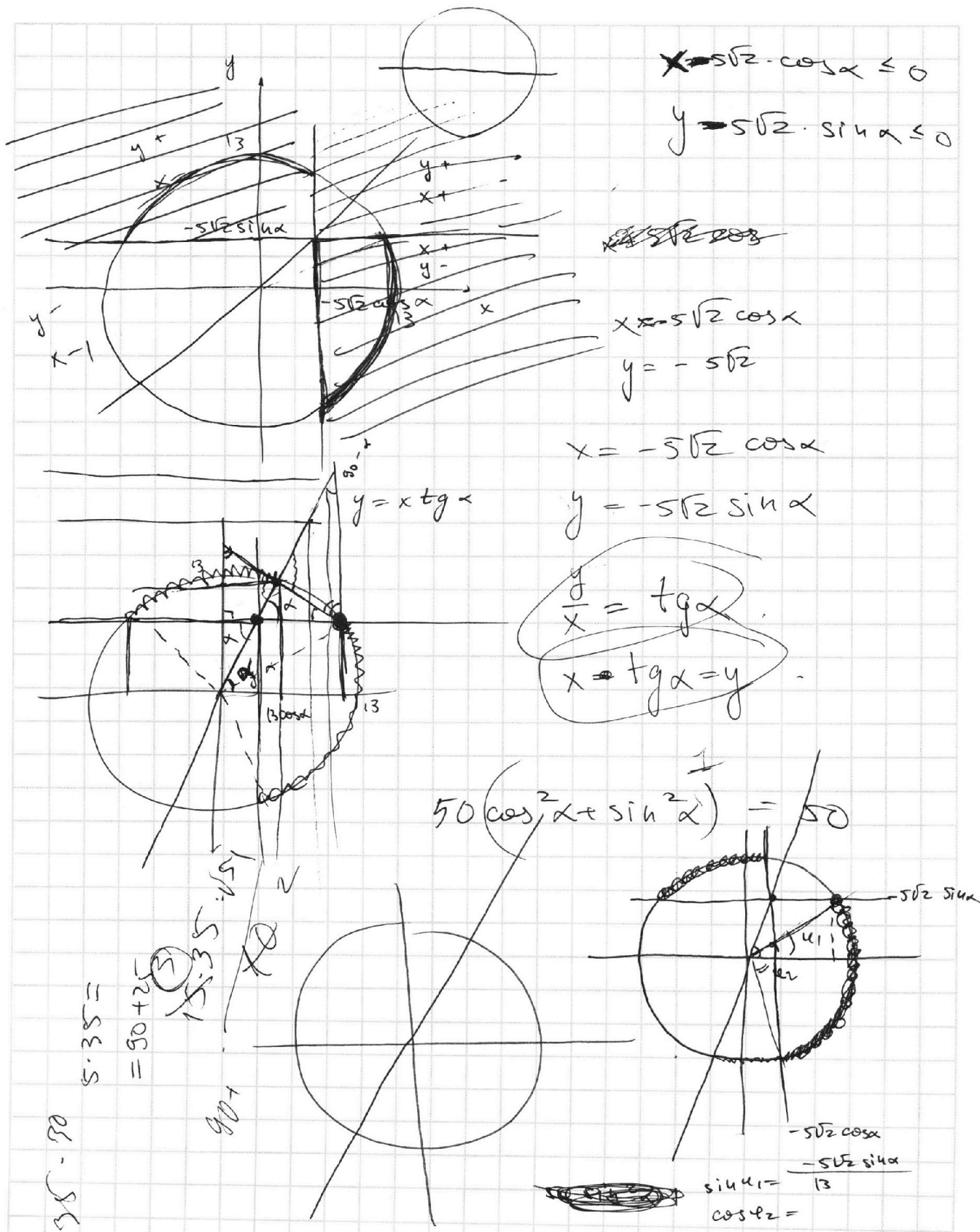
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





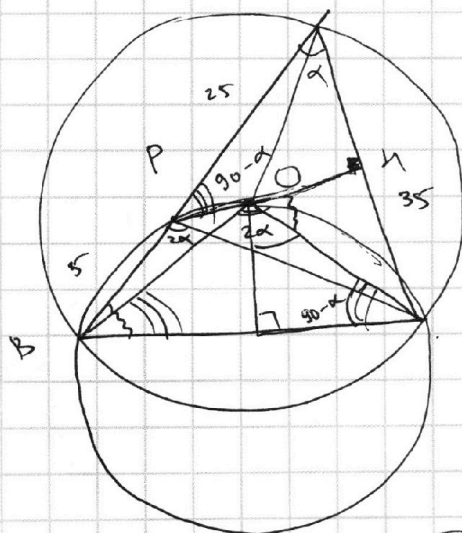
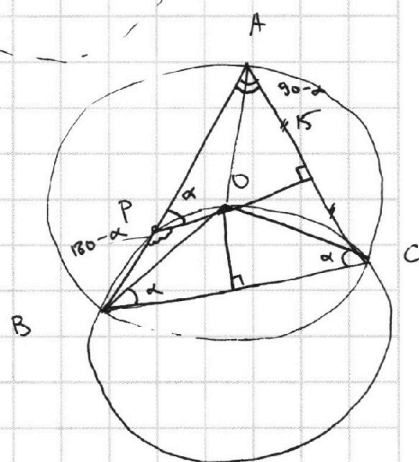
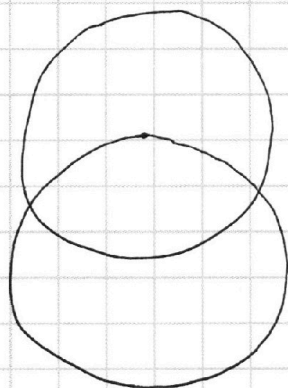
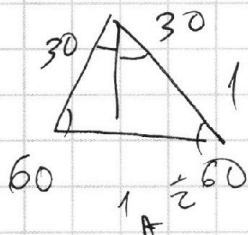
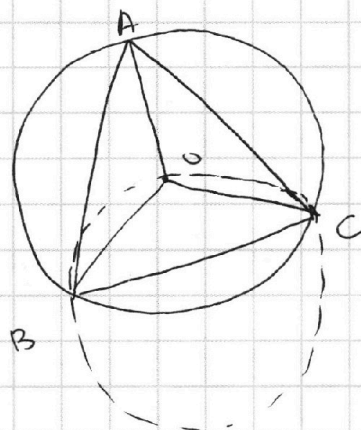
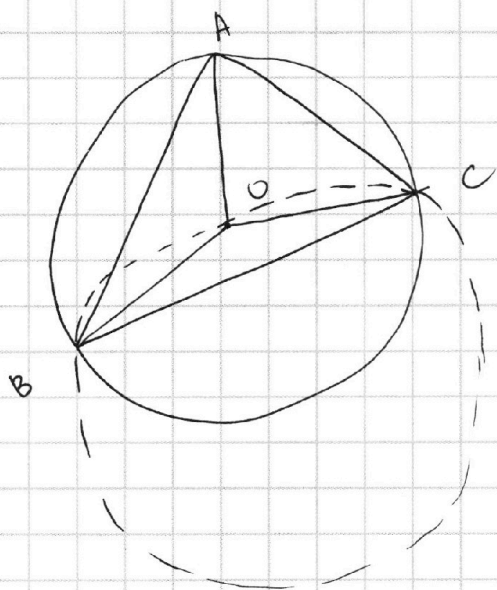


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BC = R^2 + R^2 - 2 \cos 2\alpha \cdot R^2$$

$$BC = 2 \cdot R \cdot \sin \alpha$$

$$2R = \frac{BC}{\sin \alpha}$$

$$\frac{BC}{2R} = \frac{PH}{25}$$

$$\frac{15 \cdot 35}{102}$$

$$90 + 15$$

$$1.1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{35}{5} = 7$$

$$\frac{7}{2} = 3.5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

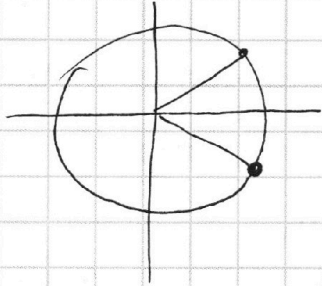
СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\cos 2\pi x = \cos(\pi y - \pi x)$$



4.3

1- 2-
 1 2
 5 5

$$25 = 21 + 1 - 12$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy}$$

$$k_{new} = \frac{x-2+y+2+5}{(x+2)(y+2)}$$

$$xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$y+2=x$$

$$M = y^3 + (y+2)^3 - 6 \cdot (y+2) \cdot y$$

$$M = y^3 + y^3 + 6y^2 + 24y + 8 - 6y^2 - 12y = 2y^3 + 12y + 8$$

$$\frac{m^2}{16} = 6$$

$$16 \cdot 6 =$$

$$M' = 6y^2 + 12 = 0$$

$$y^2 = -$$

$$\frac{m \cdot m}{n^2} = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{n} \cdot \frac{4}{n} = \frac{16}{n^2}$$

$$\frac{4}{n} + \frac{4}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{4}{n} + \frac{4}{n} = \frac{4}{n}$$

$$\frac{4}{n} + \frac{4}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{4}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{4}{n}$$

$$-6+4$$

$$-6+6$$

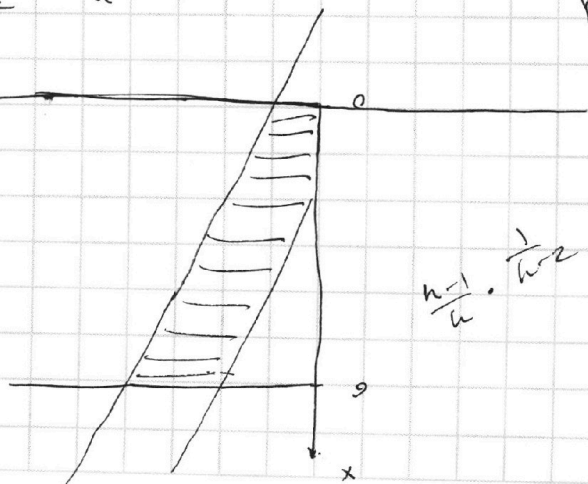
$$-x+2$$

$$12-14$$

$$18-20$$

$$-16$$

$$-18$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \left(\frac{3x}{2} + k \right) = \pi$$

$$-1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \Rightarrow -6 \leq x \leq 6$$

$$-1 \leq \frac{3x}{2} + k \leq 1$$

$$\frac{-2-2k}{3} \leq x \leq \frac{2-2k}{3}$$

$$-1 \leq -\frac{x}{2} + k \leq 1$$

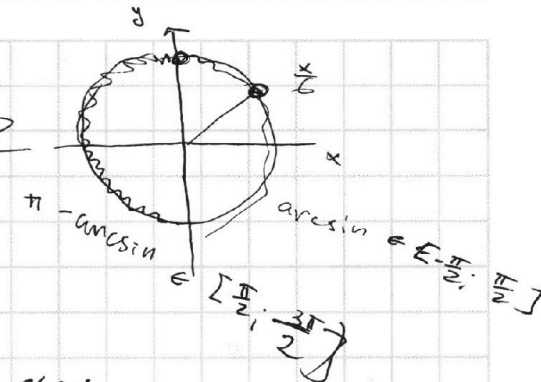
$$-1 \leq \frac{y}{2} \leq 1$$

$$-2 \leq y \leq 2$$

$$-2 \leq -x + 2k \leq 2$$

$$2k - 2 \leq x \leq 2 + 2k$$

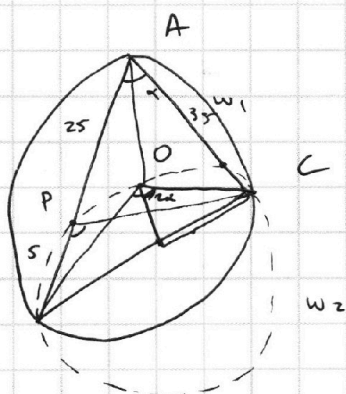
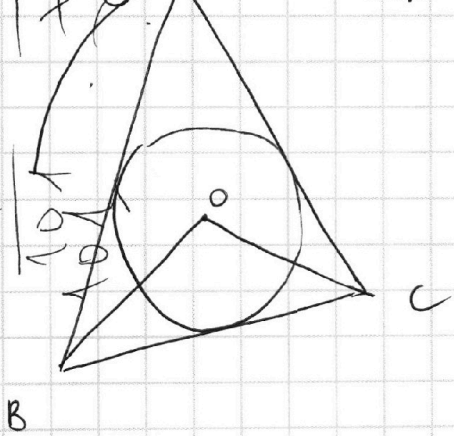
$$2 \geq x - 2k \geq -2$$



$$6 - 2 \leq -2k$$

$$k = -2$$

$$2R = \frac{BC}{\sin \alpha}$$



$$\frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot 5 \cdot PC$$

$$R^2 = 5 \cdot PC$$

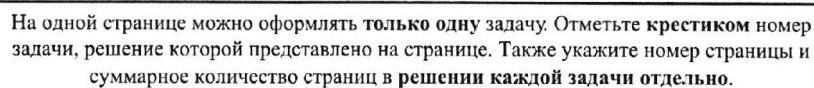
$$BC = 30^2 + 35^2 - 2 \cos \alpha \cdot 30 \cdot 35$$

$$S = \frac{1}{2} 30 \cdot 35 \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{R^2}{2 \cdot PC \cdot R} = \frac{R^2}{2 \cdot PC \cdot R}$$

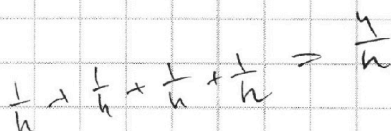
$$PC = 25^2 + 35^2 - 2 \cdot 25 \cdot 35 \cdot \cos \alpha = \frac{R^2}{5} = 25(25 + 49) - 2 \cdot 25 \cdot 35 \cos \alpha$$

$$BC = 30^2 + 35^2 - 2 \cdot 30 \cdot 35 \cdot \cos \alpha =$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{16}{h^2} - \frac{4}{h^2} = \frac{12}{h^2}$$

$$\frac{m^2}{h^2} - \frac{m}{h^2} = \frac{m^2 - m}{h^2}$$

$$\frac{m_2 - m}{2} = 6$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$x^2 - u - x^2 = 0$$

$$\begin{array}{r} +2 \\ -4 \\ \hline 288 \end{array}$$

$$1 \pm \sqrt{1 + 288}$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 288}}{2}$$

$$\frac{1+1}{2} = 1$$

81-9-72

$$72 = 6 \cdot 12 =$$

$$\begin{array}{r} 146 \\ \times 17 \\ \hline 1002 \\ 1460 \\ \hline 2482 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Чертова

$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$

$\sin \varphi_1 = \frac{-5\sqrt{2} \sin \alpha}{13}$
 $\sin \varphi_2 = \frac{\cos \varphi_2}{13}$
 $\sin \varphi_3 = \frac{-5\sqrt{2} \cos \alpha}{13}$
 $\cos \varphi_4 = \frac{-5\sqrt{2} \sin \alpha}{13}$

$\cos \varphi_1 = \frac{\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}}{13}$
 $\sin \varphi_2 = \frac{\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}}{13}$
 $\cos \varphi_3 = \frac{\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}}{13}$
 $\sin \varphi_4 = \frac{\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}}{13}$

$\sin(\varphi_1 + \varphi_4) = \frac{169 - 50 \sin^2 \alpha}{169} + \frac{50 \sin^2 \alpha}{169} = 1$
 $\Rightarrow \varphi_1 + \varphi_4 = \frac{\pi}{2}$