



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 2, а  $y$  — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 6xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекла отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 25$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 35$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☒

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Рассмотрим число  $A$ :  $A = x \cdot 1111 = x \cdot 11 \cdot 101$ , где

$x \in [1; 9]$ .  $A \cdot B \cdot C$  — квадрат,  $A : 101$  и  $A : 11$ , но

$A \nmid 101^2$  и  $A \nmid 11^2 \Rightarrow B \cdot C : 101$  и  $B \cdot C : 11$ .

Заметим, что  $C \nmid 101$ , так как  $101 > 100 > C$  и

$C \geq 10 > 0$  (двузначные числа не могут делиться на трехзначные)  $\Rightarrow B : 101$ . Любое трехзначное число, делящееся на

$101$  имеет вид  $\overline{y0y}$ , где  $y \in [1; 9]$ , но  $B$  содержит

цифру 6  $\Rightarrow y = 6$ .  $B = 606 \Rightarrow B : 11 \Rightarrow C : 11$ , любое дву-

значное число, делящееся на 11, представимо как  $\overline{zz}$ , где

$z \in [1; 9]$ , но  $C$  содержит цифру 3  $\Rightarrow C = 33$  ( $z = 3$ ).

$A \cdot B \cdot C = (x \cdot 1111) \cdot 606 \cdot 33 = x \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2$

$ABC$  — квадрат  $\Rightarrow x$  представим как  $p^2 \cdot 2$ , где  $p$  — натуральное и  $x \in [1; 9]$ .  $p = 1 \Rightarrow x = 1^2 \cdot 2 = 2$  подходит;

$p = 2 \Rightarrow x = 2^2 \cdot 2 = 8$  подходит;  $p = 3 \Rightarrow x = 3^2 \cdot 2 = 18 > 9$

не подходит; при  $p > 3$   $x = p^2 \cdot 2 > 3^2 \cdot 2 > 9$

либо  $A = 2222$ , либо  $A = 8888$

Ответ:  $(2222; 606; 33)$ ,  $(8888; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☒

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$$

$$xy \cdot K = \frac{xy}{x} + \frac{xy}{y} + \frac{5xy}{xy}$$

$$xy \cdot K = y + x + 5$$

$$K = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$(x-2)(y+2)K = \frac{(x-2)(y+2)}{x-2} + \frac{(x-2)(y+2)}{y+2} +$$

$$+ \frac{5(x-2)(y+2)}{(x-2)(y+2)}$$

$$(x-2)(y+2)K = (y+2) + (x-2) + 5 = y + x + 5$$

$$xy \cdot K = x + 5 + y = (x-2)(y+2)K$$

$$xyK = (x-2)(y+2)K \quad (x > 0; y > 0 \Rightarrow K > 0, \text{ сумма положительных чисел})$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$y - x = -2 \Rightarrow x - y = 2$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy =$$

$$= 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6xy = 2(x^2 - 2xy + y^2) = 2(x-y)^2 =$$

$$= 2 \cdot 2^2 = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$(\sin \pi x)^2 + \sin \pi y \sin \pi x = (\cos \pi x)^2 - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin \pi x \sin \pi y + \cos \pi x \cos \pi y = (\cos \pi x)^2 - (\sin \pi x)^2$$

$$\cos(\pi x - \pi y) = \cos(2\pi x)$$

$$\begin{cases} \pi x - \pi y = 2\pi x - 2\pi k_1 \\ \pi x - \pi y = -2\pi x + 2\pi k_2 \end{cases} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x + y = 2k_1 \\ 3x - y = 2k_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2k_1 - x \\ y = 3x - 2k_2 \end{cases}$$

$$d) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$\begin{cases} \uparrow \\ -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad \text{предельно все } y$$

$$\begin{cases} x \neq 6 \\ y \neq 2 \end{cases}$$

Ответ:  $(x; 2k_1 - x); (x; 3x - 2k_2); k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Пусть людей в классе  $n$ , билетов  $a$ . Тогда количество способов раздать  $a$  билетов  $= C_n^a$ . Если 2 билета дать Теме и Вase, то количество способов раздать билеты остальным  $= C_{n-2}^{a-2}$  (2 билета отдали, 2 человека уже с билетами)

Тогда вероятности для Теме и Васи пойти вместе:

$$\frac{C_{n-2}^{a-2}}{C_n^a} \leftarrow \begin{array}{l} \text{подходящие варианты (исходы)} \\ \text{все варианты (исходы)} \end{array}$$

$$\frac{C_{n-2}^{a-2}}{C_n^a} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-a)!(a-2)!}}{\frac{n!}{(n-a)!a!}} = \frac{(n-2)! \cdot a!}{n! (a-2)!} = \frac{a(a-1)}{n(n-1)}$$

Изначально билетов 4, в конце  $x$ . Запишем условие роста

вероятности в 6 раз:

$$\frac{4(4-1)}{n(n-1)} \cdot 6 = \frac{x(x-1)}{n(n-1)} \quad (\text{людей в классе} \geq 2 \Rightarrow$$

$$6 \cdot 4 \cdot 3 = x(x-1) \quad \Rightarrow \text{нет деления на 0)}$$

$$x^2 - x - 72 = 0$$

$$(x-9)(x+8) = 0$$

$$\begin{cases} x=9 \\ x=-8, \text{ количество билетов не может быть } < 0 \end{cases}$$

Ответ: 9 билетов



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

Пусть  $\angle BAC = \alpha$  ( $\angle BC$  в  $\text{окр}(ABC) = 2\alpha$ )

Тогда  $\angle BOC = 2\alpha$  ( $\angle BC$  в  $\text{окр}(ABC)$ )

$\triangle ABC$  — остроугольный

↓

O лежит внутри треугольника A

BOC — вписанный и O внутр-

при треугольнике  $\Rightarrow \angle BPC = \angle BOC$  (опираются на  $\angle BC$ )  
↓  
вокр.(BOC)

$\angle BPC = 2\alpha \Rightarrow \angle APC = 180 - 2\alpha$  (смежный)

по сумме углов  $\triangle APC$ :  $\alpha + (180 - 2\alpha) + \angle PCA = 180 \Rightarrow \angle PCA = \alpha$

$\angle PAC = \angle PCA = \alpha \Rightarrow \triangle APC$  равнобедренный  $\Rightarrow AP = PC = 25$

по теореме косинусов:

$$|AP|^2 + |AC|^2 - 2 \cos \alpha |AP| |AC| = |PC|^2$$

$$25^2 + 35^2 - 2 \cos \alpha \cdot 25 \cdot 35 = 25^2$$

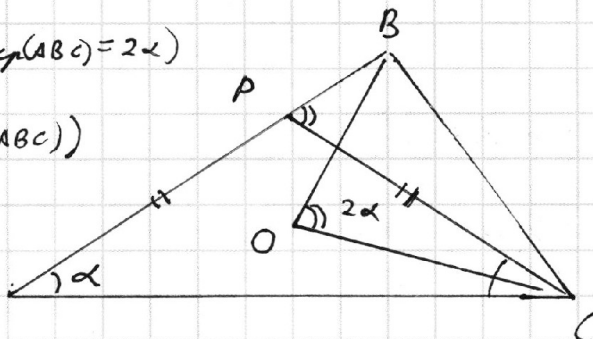
$$\cos \alpha \cdot 50 \cdot 35 = 35^2 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{51}}{10} \quad \alpha < 90 \Rightarrow \sin \alpha \geq 0$$

по формуле площади:  $S_{ABC} = \frac{1}{2} |AB| |AC| \sin \alpha$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot (25 + 5) \cdot (35) \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

Ответ:  $\frac{105\sqrt{51}}{2}$



$$AP = 25; PB = 5; AC = 35$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \\ x^2 + y^2 \leq 13^2 \end{array} \right.$$

2 из 4 четвертей плоскости,  
образованных прямыми

$$x = -5\sqrt{2} \cos \alpha; y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$$

> окружность с центром в (0;0) и  $r = 13$   
и ее внутренности

Заметим, что точка пересечения прямых  $x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$

и  $y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$  — это  $(-5\sqrt{2} \cos \alpha; -5\sqrt{2} \sin \alpha)$ , удалена  
от (0;0) на  $L = \sqrt{(5\sqrt{2} \cos \alpha)^2 + (5\sqrt{2} \sin \alpha)^2} = \sqrt{50(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} =$   
 $= \sqrt{50}$ ;  $\sqrt{50} < 13$  ( $50 < 169$ )  $\Rightarrow$  точка пересечения всегда  
внутри окружности.

К тому же эти прямые перпендикулярны  $\Rightarrow$  полуокруж-  
ность, входящая в нашу фигуру  $= 90^\circ \Rightarrow$  часть периметра  
фигуры, ограниченная окружностью всегда  $= 180^\circ =$   
 $= \frac{1}{2} \cdot 2\pi R = \pi \cdot 13$

Чтобы максимизировать периметр нужно максимизировать сумму длин отрезков, отсекаемых от 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 граники окружности

мы можем найти их сумму

по теореме Пифагора:

$$2\sqrt{13^2 - (5\sqrt{2}\cos\alpha)^2} + 2\sqrt{13^2 - (5\sqrt{2}\sin\alpha)^2}$$

радиус

расстояние от центра (0;0) до прямой

$$2\sqrt{169 - 50\cos^2\alpha} + 2\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha} - \max$$

$$2\sqrt{169 - 50\cos^2\alpha} + 2\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha} - \max$$

$$t = 50\cos^2\alpha - 25$$

$$2\sqrt{144 - t} + 2\sqrt{144 + t} = f(t) - \max$$

$$f'(t) = -\frac{2}{2\sqrt{144-t}} + \frac{2}{2\sqrt{144+t}} = 0 \quad (\text{лемма Ферма})$$

$$\frac{\sqrt{144+t} - \sqrt{144-t}}{2\sqrt{144+t}\sqrt{144-t}} = 0 \Rightarrow \sqrt{144-t} = \sqrt{144+t}$$

$$2t = 0$$

в силу монотонности корней  
 $144 - t = 144 + t$

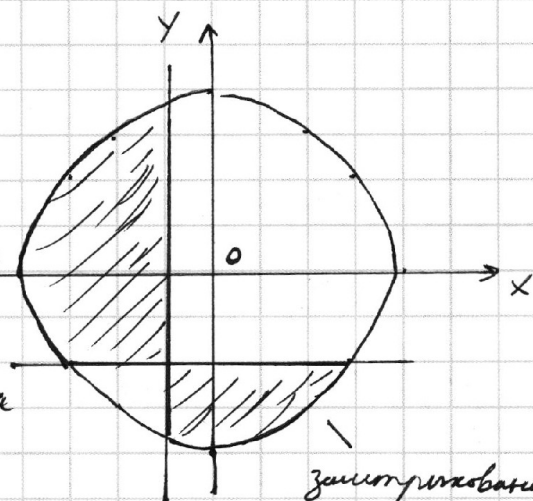
$$t = 0 \Rightarrow 50\cos^2\alpha - 25 = 0 \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k; k \in \mathbb{Z}$$

$$f(t) = 2\sqrt{144-0} + 2\sqrt{144+0} = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 12 = 48$$

$$f(\alpha) = f(t) + 13\pi = 48 + 13\pi$$

$$\text{Ответ: } f(\alpha) = 48 + 13\pi; \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k; k \in \mathbb{Z}$$



заштрихованная фигура





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

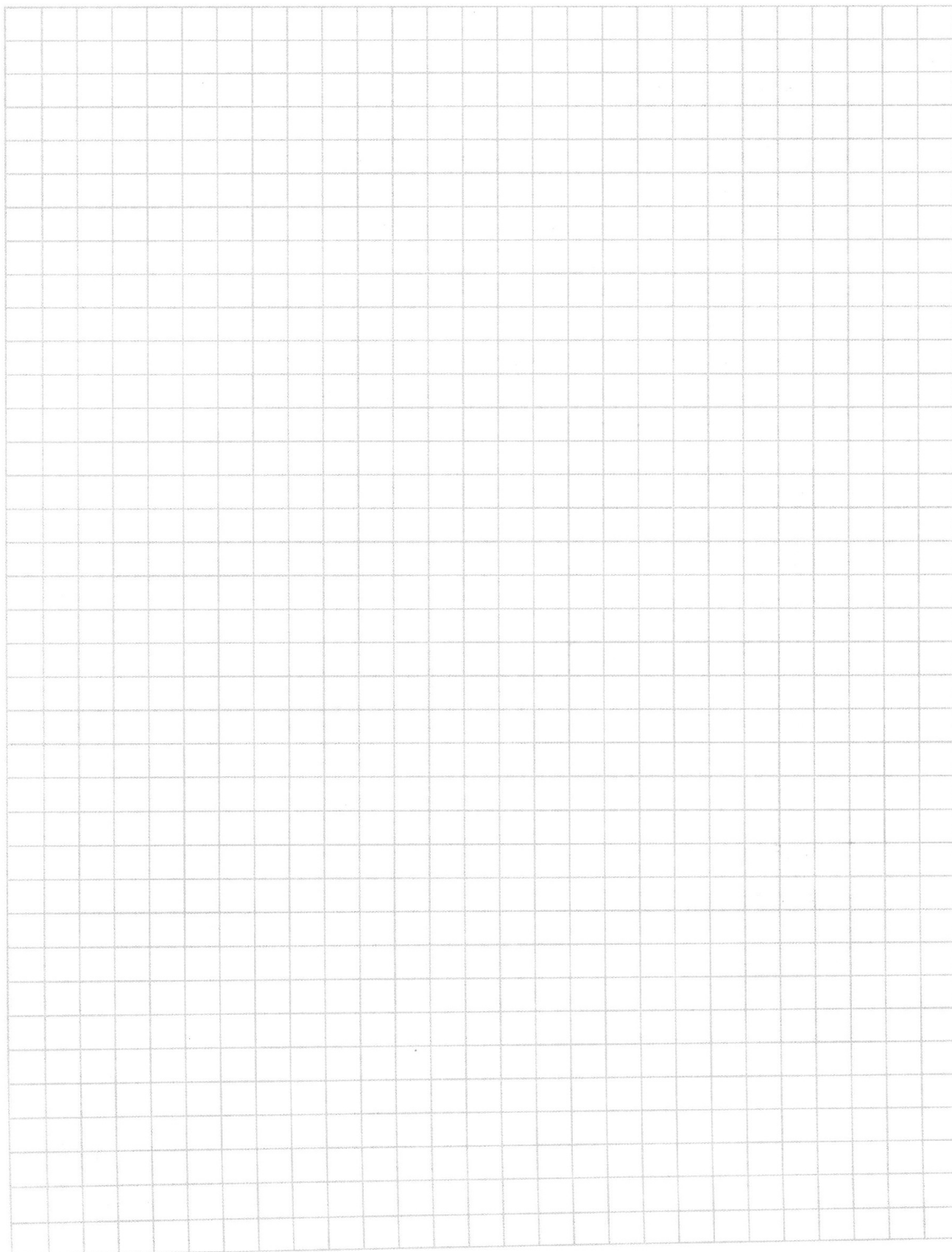
5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1111 - 11 \cdot 101$$

$$A \cdot B \cdot C \cdot 101$$

$$X(X + 5\sqrt{2} \sin \alpha)$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \times 1111 \\ \hline \end{array}$$

$$3888$$

$$2222$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x =$$

$$= (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin \pi y \sin \pi x + \cos \pi y \cos \pi x =$$

$$= \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos 2\pi x$$

$$\cos(\pi x - \pi y) = \cos(2\pi k)$$

$$\begin{cases} \pi x - \pi y = 2\pi k + 2\pi h \\ \pi x - \pi y = -2\pi k + 2\pi h \end{cases}$$

$$\frac{(n-k)!}{n! \cdot k!}$$

$$\frac{C_n^2}{C_n^4}$$

$$\frac{C_n^{a-2}}{C_n^a}$$

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{(a-2)}$$

$$\frac{(n-k)! \cdot k!}{n!} \cdot \frac{n!}{(n-a+2)!(a-2)!} = \frac{(n-a)! \cdot a!}{(n-a+2)!(a-4)!} = \frac{a(a-1)}{(n-a+2)(n-a+1)}$$

$$\frac{a(a-1)}{(n-a+2)(n-a+1)} = 6 \cdot \frac{4 \cdot 3}{(n-2)(n-1)}$$

$$a(a-1)(n-2)(n-1) = 72(n-a+2)(n-a+1)$$

$$(a^2 - a)(n^2 - 3n + 2) = 72(n^2 - an + n - an + a^2 - a + 2n - 2a + 2)$$

$$a^2 n^2 - 3a^2 n + 2a^2 - an^2 + 3an - 2a = 72a^2 + 72n^2 - 144an + 216n - 216a + 144$$

$$y = x + 5\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$y = -x + 5\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$2x = 5\sqrt{2}(\sin \alpha - \cos \alpha)$$

$$: 5\sqrt{2}$$

$$: 11$$

$$C = 33$$

$$606$$

$$xy + 2x - 2y + 4$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{8}{xy}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{8}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{8}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{2}{x(x-2)} + \frac{2}{y(y+2)} + \frac{(8x-12y+20)}{(x-2)(y+2)} = 0$$

$$\frac{2y^2 + 2y + 2x^2 - 2x + 2x - 2y + 4}{xy(x-2)(y+2)} = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2 = 0$$

$$2y^2 + 2y + 1$$

$$x = y + 5\sqrt{2} \sin \alpha$$

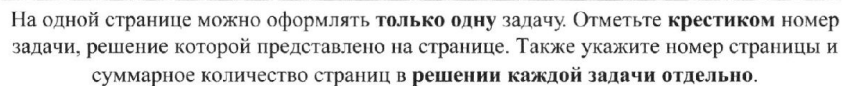
$$y$$

$$\begin{cases} x + y = 2\pi k \\ 3x - y = 2\pi h \end{cases}$$

$$0000$$

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{(a-2)}$$

$$24 \cdot 3 = 72$$



СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

