МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \left(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha\right)\left(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha\right) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25. \end{cases}$$

   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) A — четырехзнач. из одинак. цифр $\Rightarrow A = K\cdot 1111 = K\cdot 11\cdot 101$

$A\cdot B\cdot C = n^2;\ n\in\mathbb{N}$

101 и 11 — простые

$\begin{cases} K\in[1;9] \\ K \text{ — целое} \end{cases}$

т.к. $\begin{cases} A\,\vdots\,11 \\ A\,\vdots\,101 \\ 11 \text{ и } 101 \text{ — простые} \end{cases}$, то $\begin{cases} n\,\vdots\,11 \\ n\,\vdots\,101 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} n^2\,\vdots\,11^2 \\ n^2\,\vdots\,101^2 \end{matrix}$

$\begin{cases} A\,\vdots\,11 \\ A\,\vdots\,101 \\ n^2\,\vdots\,11^2 \\ n^2\,\vdots\,101^2 \\ ABC = n^2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{matrix} B\,\vdots\,101 \\ C\,\vdots\,101, \text{ но } C \text{ — двузнач } (<100) \Rightarrow C \text{ не кратно } 101 \end{matrix}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{matrix} B\,\vdots\,101 \\ B \text{ — содерж. цифру } 2 \end{matrix};\quad \begin{matrix} B\,\vdots\,101 \\ B \text{ — 3-х знач} \end{matrix} \Rightarrow B = K_1\cdot 101;\ \begin{cases} K_1 \text{ — целое} \\ K_1\in[1;9] \end{cases}$

$\times\dfrac{101\ \ }{\ \ K_1}$ / $\overline{K_1 0 K_1}$; $B = \overline{K_1 0 K_1}$

$\begin{cases} B = \overline{K_1 0 K_1} \\ K\in[1;9] \\ B \text{ — содерж. цифру } 2 \end{cases} \Rightarrow K_1 = 2;\ \boxed{B = 202}$

$\begin{cases} n^2\,\vdots\,11 \\ A\,\vdots\,11 \\ ABC = n^2 \\ B \text{ — не кратно } 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C\,\vdots\,11 \\ C \text{ — 2х знач} \end{matrix} \Rightarrow C = 11\cdot m;\ \begin{cases} m \text{ — целое} \\ m\in[1;9] \end{cases}$

$\times\dfrac{11}{\ m}$ / $\overline{mm}$; $C = \overline{mm}$

$\begin{cases} C = \overline{mm} \\ m\in[1;9] \\ C \text{ — содерж. цифру } 3 \end{cases} \Rightarrow m = 3;\ \boxed{C = 33}$

$A = K\cdot 11\cdot 101$, $B = 2\cdot 101$, $C = 3\cdot 11$; $K\cdot 11\cdot 101\cdot 11\cdot 3\cdot 101\cdot 2 = n^2$

$\begin{cases} K\cdot 11^2\cdot 101^2\cdot 6 = n^2 \\ K \text{ — целое} \\ K\in[1;9] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6K = n_1^2 \\ K \text{ — целое} \\ K\in[1;9] \end{cases}$

K:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6K:	6	12	18	24	30	36	42	48	54
6K — это полный квадрат?	нет	нет	нет	нет	нет	да	нет	нет	да

$\Downarrow K = 6$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

7) продолжение

$K=6;\ \begin{cases} A=6666 \\ B=202 \\ C=33 \end{cases}$

~~Отв~~

Ответ: ~~A=6666; B=202; C=33~~ (6666; 202; 33)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

2) $\begin{cases} x, y > 0 \\ K = \frac{7}{x} + \frac{7}{y} + \frac{2}{xy} \\ K = \frac{7}{x-7} + \frac{7}{y+7} + \frac{2}{(x-7)(y+7)} \end{cases}$; $\begin{cases} x, y > 0 \\ \frac{7}{xy}(x+y+2) = \frac{7}{(x-7)(y+7)}(y+\cancel{7}+x-\cancel{7}+2) \end{cases}$

$\begin{cases} x, y > 0 \\ (x+y+2)\left(\frac{7}{xy} - \frac{7}{(x-7)(y+7)}\right) = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x, y > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x+y=-2 \\ \frac{7}{xy} - \frac{7}{(x-7)(y+7)} = 0 \end{array}\right. \end{cases}$ – т.к невозможно при $x, y > 0$ (сумма полож. не даст отриц.)

$\begin{cases} x, y > 0 \\ \frac{(x-7)(y+7) - xy}{xy(x-7)(y+7)} = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x, y > 0 \\ \cancel{xy} + 7x - 7y - 49 - \cancel{xy} = 0 \\ xy \cdot (x-7)(y+7) \neq 0 \end{cases}$ $xy \neq 0$, т.к. $x, y > 0$

$\begin{cases} x, y > 0 \\ x - y = 7 \quad (1) \\ x \neq 7 \\ y \neq -7 \end{cases}$ (1) $x - y = 1$ – диофф. ур-е $x_0 = 2$, $y_0 = 1$ $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$; $2+t - 1 - t = 1$ ✓, $\begin{cases} x, y > 0 \\ x = 2+t \\ y = 1+t \\ t \in \mathbb{Z} \\ x \neq 7 \end{cases}$

одз: $t \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} x = 2+t > 0 \\ y = 1+t > 0 \end{cases}$, $x > 2, t \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} t \in \mathbb{Z} \\ t > -2 \\ t > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$; т.к $t \geq 0$, то $x = 2+t \neq 7$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x, y > 0 \\ x = 2+t \\ y = 1+t \\ t \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$

$M = (2+t)^3 - (1+t)^3 - 3(t+2)(t+1) = t^3 + 3 \cdot t^2 \cdot 2 + 3 \cdot t \cdot 4 + 8 - (t^3 + 3t^2 + 3t + 1) -$
$-3(t^2 + t + 2t + 2) = \cancel{t^3} + \cancel{6t^2} + 12t + 8 - \cancel{t^3} - \cancel{3t^2} - 3t - 1 - \cancel{3t^2} - 3t - 6t - 6 =$
$= 12t + 8 - 3t - 1 - 9t - 6 = 8 - 7 = 1$

Ответ: $M = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

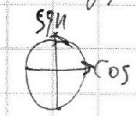
3) продолжение

$$\arcsin\left(\frac{x}{5}\right)+\arccos\left(\frac{y}{4}\right)<\frac{3\pi}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{\pi}{2}\le\arcsin\left(\frac{x}{5}\right)\le\frac{\pi}{2};\\ 0\le\arccos\left(\frac{y}{4}\right)\le\pi\end{array}\right\} \Rightarrow \arcsin\left(\frac{x}{5}\right)+\arccos\left(\frac{y}{4}\right)\le\frac{3\pi}{2}\ \forall\ \frac{x}{5};\frac{y}{4}\in[-1;1]$$

$\Downarrow$ ед. неподх. вариант (на обл. опред)

$$\begin{cases}\arcsin\left(\frac{x}{5}\right)=\frac{\pi}{2}\\ \arccos\left(\frac{y}{4}\right)=\pi\end{cases}$$



$$\begin{cases}\frac{x}{5}=1\\ \frac{y}{4}=-1\end{cases};\quad \begin{cases}x=5\\ y=-4\end{cases}$$ – не подходящая пара

$$\begin{cases}-1\le\frac{x}{5}\le1\\ -1\le\frac{y}{4}\le1\end{cases};\quad \begin{cases}-5\le x\le5\\ -4\le y\le4\\ \begin{cases}x\ne5\\ y\ne-4\end{cases}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-5\le x<5\\ -4\le y<4\end{cases}$$

$$(*)\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=1+2k-3x\\ y=1+2n+x\end{array}\right.\\ k,n\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

если пара $(x;y)$ удовл. одному из ур-й, то она явл. решением ~~исх.~~ ур-я из пункта а)

в ответе к п. а) видно, что 2 серии реш. совпадают, если x явл. целым или полуцелым числом. т.к. мы рассм. целые пары $(x;y)$, то мы можем взять только одно ур-е из $(*)$.

$$\begin{cases}-5\le x<5\\ -4\le y<4\\ x=y-1-2n\\ \cancel{k,n\in\mathbb{Z}}\ \ k,n\in\mathbb{Z}\\ \cancel{x,y,k,n\in\mathbb{Z}}\ \ x,y\in\mathbb{Z}\ (\text{по усл п б})\end{cases}$$

$y\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3\}$ – 8 зн-в. (Δ)

~~мы идем~~ x меняется с шагом ~~$2n$, $n\in\mathbb{Z}$~~ 2 (т.к $n\in\mathbb{Z}$)

т.е. если $y-1$ – нечетное, то ~~его~~ ему соотв все нечет $x\in[-5;5)$; а если $y-1$ – чет, то все чет $x\in[-5;5)$

$-5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$ – 5 чет и 5 нечет целых чисел на $[-5;5)$ $\Rightarrow$ каждому y из (Δ) соотв 5 знач. x.

всего $5\cdot8=40$ реш

Ответ: ~~40~~ 40

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3) $(\sin(\pi x)+\sin(\pi y))\sin(\pi x)=(\cos(\pi x)+\cos(\pi y))\cos(\pi x)$

$\sin^2(\pi x)+\sin(\pi x)\sin(\pi y)=\cos^2(\pi x)+\cos(\pi x)\cos(\pi y)$

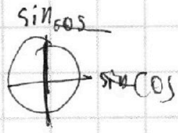
$\sin^2(\pi x)-\cos^2(\pi x)=\cos(\pi x)\cos(\pi y)-\sin(\pi x)\sin(\pi y)$

$-\cos(2\pi x)=\cos(\pi x+\pi y)$

$\cos(\pi x+\pi y)+\cos(2\pi x)=0$

$2\cos\left(\frac{\pi x+\pi y+2\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x+\pi y-2\pi x}{2}\right)=0$

$\cos\left(\frac{3\pi x+\pi y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi y-\pi x}{2}\right)=0$



$\left[\begin{array}{l}\frac{3\pi x+\pi y}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k\\ \frac{\pi y-\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right.$, $k,n\in\mathbb{Z}$; $\left[\begin{array}{l}3\pi x+\pi y=\pi+2\pi k\\ \pi y-\pi x=\pi+2\pi n\end{array}\right.$, $k,n\in\mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{ll}3x+y=1+2k & (1)\ (x_1;y_1)\\ y-x=1+2n & (2)\ (x_2;y_2)\end{array}\right.$, $k;n\in\mathbb{Z}$

Совпадение реш:

$\begin{cases}y=1+2k-3x\\ y=1+2n+x;\quad x=y-1-2n,\\ k,n\in\mathbb{Z}\end{cases}$ $\rightarrow y=1+2k-3(y-1-2n)$

$y=1+2k-3y+3+6n$; $4y=4+2(k+3n)$; $\boxed{y_{совп}=1+\frac{k+3n}{2}}$, $\boxed{k,n\in\mathbb{Z}}$

$x=1+\frac{k+3n}{2}-1-2n=\frac{k+3n-4n}{2}=\boxed{\frac{k-n}{2}=x_{совп}}$

если $x_1=x_2$; то ~~пару~~ ответ: $\left(\frac{k-n}{2};1+\frac{k+3n}{2}\right)$; $k,n\in\mathbb{Z}$

если $x_1\neq x_2$; то ответ: $(\lambda_1;1+2k-3\lambda_1)$; $(\lambda_2;1+2n+\lambda_2)$; $k,n\in\mathbb{Z}$; $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$

Ответ: а) 1) $\lambda_1\neq\lambda_2$: $(\lambda_1;1+2k-3\lambda_1)$; $(\lambda_2;1+2n+\lambda_2)$; $k,n\in\mathbb{Z}$; $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, 2) $\lambda_1=\lambda_2$: $\left(\frac{k-n}{2};1+\frac{k+3n}{2}\right)$ $k,n\in\mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

4) K - на ск-ко увелич кол-во билетов в конце месяца. $\Rightarrow$
$\Rightarrow K > 0$

в нач. мес: 4 бил. ; n - кол-во учеников.

в конце мес: 4+K бил ;

~~и n) пусть 4+K ... n - кол-во учеников,~~ кол-во билетов не превышает кол-во уч

$P(\text{попасть в нач. мес друзьям}) = \frac{C^2_{n-2}}{C^4_n}$ – сколькими сп. можно раздать билеты, чтобы оба попали; C^4_n – всего сп. раздать билеты

$P(\text{попасть в конце мес - друзьям}) = \frac{C^{4+K-2}_{n-2}}{C^{4+K}_n}$ – кол-во сп. раздать так, чтоб оба попали; C^{4+K}_n – всего сп. раздать

$$\frac{C^2_{n-2}}{C^4_n}\cdot\frac{5}{2} = \frac{C^{K+2}_{n-2}}{C^{K+4}_n};\quad \frac{\frac{\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-4)!}\cdot 2!}}{\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-4)!}\cdot 4!}}\cdot\frac{5}{2} = \frac{\frac{\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2-K-2)!}\cdot(K+2)!}}{\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-K-4)!}\,(K+4)!}}$$

$$\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{\cancel{2\cdot 2}} = \frac{(K+4)(K+3)\cancel{(K+2)!}}{\cancel{(K+2)!}}$$

$30 = K^2 + 7K + 12$

$K^2 + 7K - 18 = 0$; $D = 49 + 4\cdot 18 = 121$

$K_{1,2} = \frac{-7\pm 11}{2} = \frac{4}{2} = 2$; $\frac{-18}{2} = -9$ - не подх, т.к $K > 0$.

$K = 2$

билетов в конце мес: $K+4 = 2+4 = 6$ билетов.

Ответ: 6 билетов.

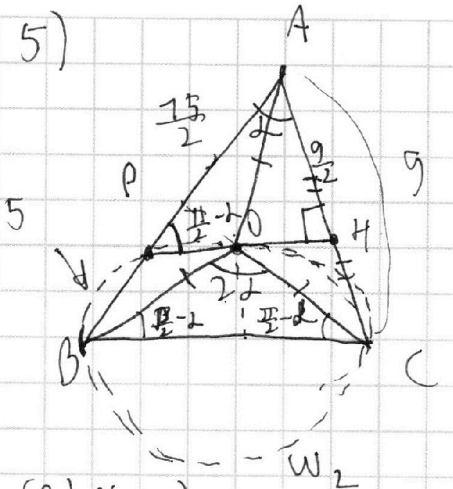
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

5)



$S_{ABC} = ?$

$AO = OB = OC = R_{опис.\ ABC}$

пусть $\angle BAC = \alpha$; $\angle BAC$ – впис в ω_1

$\angle BOC$ – центр. уг. в ω_1, опир на ту же дугу, что и $\angle BAC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$

ΔBOC – р/б $(BO = OC = R_{ABC}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OBC = \angle OCB = \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$(PO) \cap (AC) = H$

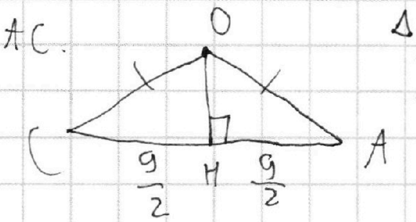
$\angle BCO$ – впис в ω_2, $\Rightarrow \cup BPO = 2\cdot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \pi - 2\alpha$; $\cup BCO = 2\pi - \cup BPO =$

$= 2\pi - (\pi - 2\alpha) = 2\pi - \pi + 2\alpha = \pi + 2\alpha$; $\angle BPO$ – опир на $\cup BCO \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BPO = \frac{1}{2}\cdot\cup BCO = \frac{1}{2}\cdot(\pi + 2\alpha) = \frac{\pi}{2} + \alpha$; $\angle APO = \pi - \angle BPO =$ (смеж. углы)

$= \pi - (\frac{\pi}{2} + \alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$; рассм. ΔAPH; $\angle H = \pi - (\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha) =$
$= \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

рассм. ΔOAC.



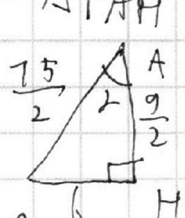
ΔOCA – р/б; $(OC = OA = R_{ABC})$; OH – выс-та $\Rightarrow$ OH – бис-са и мед. $\Rightarrow$

~~OH – выс-та~~

(выс-та из верш. ~~р/б~~ р/б треуг. явл. бис-й и мед.)

$\Rightarrow CH = AH = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2}$

ΔPAH



; $PH^2 + (\frac{9}{2})^2 = (\frac{15}{2})^2$; $PH = \sqrt{\frac{225 - 81}{4}} = \frac{\sqrt{144}}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$\sin(\alpha) = \frac{6}{\frac{15}{2}} = \frac{12}{15}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot(\frac{15}{2} + \frac{10}{2})\cdot\frac{12}{15} = \frac{\cancel{1}\cdot 3\cdot 3\cdot\cancel{4}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 5}\cdot\frac{25}{\cancel{2}} =$

$= \frac{9\cdot 5\cdot\cancel{1}}{\cancel{1}} = 45$; Ответ: $S_{ABC} = 45$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

черновик

$\frac{7}{x}+\frac{7}{y}+\frac{2}{xy}=\frac{7}{x-7}+\frac{7}{y+1}+\frac{2}{(x-7)(y+1)}$

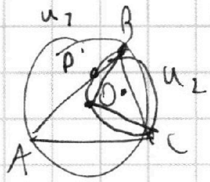
$\frac{1}{xy}(x+y+2)=\frac{x+y+2}{(x-7)(y+1)}$

$xy=(x-7)(y+1)$

$xy=xy+x-y-7$

$x-y-7=0$

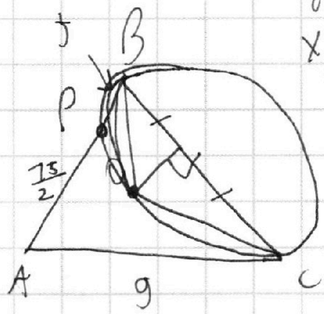
$M=x^3-y^3-3xy$



$S_{ABC}=?$

$AP=\frac{15}{2}$

$BP=5$ $AC=9$



$\sin^2(\pi x)+\sin(\pi x)\sin(\pi y)=\cos^2(\pi x)+\cos(\pi x)\cos(\pi y)$

$y_0=7+2n,\ x_0=0$

$-\cos(2\pi x)=\cos(\pi x+\pi y)$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-S_\alpha S_\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=C_\alpha C_\beta+S_\alpha S_\beta$

$\cos(\pi(x+y))+\cos(2\pi x)=0$

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2C_\alpha C_\beta$

$2\cos\left(\frac{\pi x+\pi y+2\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x+\pi y-2\pi x}{2}\right)=0$

$\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ \alpha-\beta=y\end{cases}$

$2\alpha=x+y$

$\boxed{\alpha=\frac{x+y}{2}}$

$\cos\left(\frac{3\pi x+\pi y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi y-\pi x}{2}\right)=0$

$\cos(x)+\cos(y)=$

$\alpha+\beta-\alpha+\beta=x-y$

$\boxed{\beta=\frac{x-y}{2}}$

$=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

sin cos

$\left[\begin{array}{l}\frac{3\pi x+\pi y}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k\\ \frac{\pi y-\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right.$

~~$x+y=-2$~~

~~$x=$~~

$\left[\begin{array}{l}y-x=7+2n\\ 3x+y=7+2k\end{array}\right.$

$y=x+7+2n$

$\begin{cases}y-x=\pi+2\pi n\\ 3x+y=\pi+2\pi k\end{cases}$

$\begin{cases}y-x=7+2n\\ 3x+y=7+2k\end{cases}$

$\boxed{y=\frac{k-n}{2}+\frac{4n}{2}+7=\frac{k+3n}{2}+7}$

$3x+x+7+2n=7+2k$

$4x=2(k-n)$

$\boxed{x=\frac{k-n}{2}}$

x^3-y^3-3xy

$x-y=7$

$x_0=2$

$y_0=1$

$\begin{cases}x=2+t\\ y=1+t\\ t\in \mathbb{N}\cup\{0\}\end{cases}$

$2+t-7-t=7$

$\begin{cases}2+t>0\\ 7+t>0\end{cases}$ $t>-2$ $t>-7$

$M=(2+t)^3-(7+t)^3-3(2+t)(7+t)=8+3\cdot 4\cdot t+3\cdot 2\cdot t^2+t^3-(7+3\cdot t+3\cdot t^2+t^3)-$

$-3(2t+2+t+t^2)=8-7-6=$

$=8-6-7=7.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

черновик

$\begin{cases} x = \frac{k-n}{2} \\ y = \frac{k+3n}{2} + 1 \\ k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$-\frac{x}{5} \le 1$

$-5 \le x \le 5$

$-10 \le k-n \le 10$

$-1 \le \frac{\frac{k+3n}{2} + 1}{4} \le 1$

$-4 \le \frac{k+3n}{2} + 1 \le 4$

$-5 \le \frac{k+3n}{2} \le 3$

$-10 \le k+3n \le 6$

sin

cos(x)

$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin \le \frac{\pi}{2}$

$-\pi \le \arccos() \le \pi$

$A = k \cdot 11 \cdot 101$

$\frac{C_{n-2}^{2}}{C_n^4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{C_{n-2}^{2+k}}{C_n^{k+4}}$

$\frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!}}{\frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}} \cdot \frac{5}{2} = \frac{\ldots}{\frac{n!}{(n-k-4)!(k+4)!}}$

$\begin{cases} \frac{x}{5} = 1 \\ \frac{y}{4} = -1 \end{cases}$

$x = 5$

$y = -4$

$\begin{cases} \frac{k-n}{2} = 5 \\ \frac{k+3n}{2} + 1 = -5 \end{cases}$

$\begin{cases} k-n = 10 \\ k+3n = -10 \end{cases}$

$k + 3n - k + n = -20$

$4n = -20$

$\boxed{n = -5}$

$k + 5 = 10$

$\boxed{k = 5}$

$\frac{5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = (k+4)(k+3)$

$5 \cdot 3 \cdot 2 = (k+4)(k+3)$

$5 \cdot 6 = (k+4)(k+3)$

$k^2 + 7k + 12 - 30 = 0$

$k^2 + 7k - 18 = 0$

$D = 49 + 4 \cdot 18 = 121$

$k_{1,2} = \frac{-7 \pm 11}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad \frac{-18}{2} = -9$

$k = 2$

билетов $= k + 4 = 6$

$\frac{(n-2)! \cdot 4!}{n! \cdot 2!} = \frac{2}{5} \cdot \frac{(n-2)! \cdot 6!}{4! \cdot n!}$

$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = \frac{2}{5} \cdot 6 \cdot 5$

$12 = 12$ ✓

$\frac{C_{n-2}^{2}}{C_n^4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{C_{n-2}^{4}}{C_n^6}$

$\frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!}}{\frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\frac{(n-2)!}{(n-6)! \cdot 4!}}{\frac{n!}{(n-6)! \cdot 6!}}$

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 2n(n-1)$

$30 = n(n-1)$

$n^2 - n - 30 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 30 = 121$

$n_{1,2} = \frac{1 \pm 11}{2} = 6; -5$

$n = 6$

$k + 4 \ge n$

$k + 4 \ge 6$

$k \ge 2$

$\frac{C_{n-2}^{2}}{C_n^4} \cdot \frac{5}{2} = 1$

$\frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2}}{\frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}} = \frac{2}{5}$

$\frac{(n-2)! \cdot 4!}{2 \cdot n!} = \frac{2}{5}$

$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot n \cdot (n-1)} = \frac{2}{5}$

$\begin{array}{r} \times 101 \\ 11 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$

$\begin{array}{r} -30 \\ 12 \\ \hline 18 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 18 \\ 4 \\ \hline 72 \end{array}$

$\begin{array}{r} +72 \\ 49 \\ \hline 121 \end{array}$

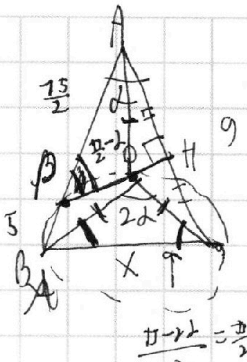
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

☒ черновик



$\angle ABO = \angle BCO \parallel BPOC$

$OB = OC = R_{ABC} \Rightarrow \angle OBC = \angle OCB$

$707 \cdot 11 = 7070 + 707 = 7777$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2\sin(\alpha)} = R; \quad \boxed{\sin(\alpha) = \dfrac{x}{2R}} \\ x^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot \cos(2\alpha) \\ x^2 = 9^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2 - 2 \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$$

$\frac{15}{2} + 5 = \frac{15+10}{2} = \frac{25}{2}$

$\frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$x = R \cdot 2\sin(\alpha)$

$x^2 = 2R^2(1 - \cos(2\alpha))$

$\cancel{R^2 \cdot 4\sin^2(\alpha) = 2R^2 - 2R^2\cos(2\alpha)}$

$\cancel{R^2(2 - 2\cos(2\alpha)) = 9^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2 - 9 \cdot 25\cos(\alpha)}$

$\cancel{2\sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha)}$

$\cancel{\frac{x}{\sin(2\alpha)} = \frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}} \quad \cancel{\frac{x}{2\sin(\alpha)} = \frac{R}{\cos(\alpha)}}$

$\angle BCO = 2\pi - (\pi - 2\alpha) = \pi + 2\alpha$

$\cancel{\angle BCO = 2\pi - (\pi - \alpha) = \pi + \alpha}$

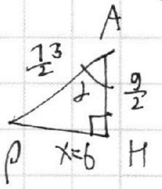
$\angle BPO = \pi - 2\alpha$

$BCO = \pi + 2\alpha$

$\angle BPO = \frac{\pi}{2} + \alpha$

$\cancel{\angle BPO = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}; \quad \angle ABO = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}$

$\angle BPO = \frac{\pi}{2} + \alpha; \quad \angle ABO = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$



$x^2 + \frac{81}{4} = \frac{225}{4}$

$225 - 81 = 144$

$144 : 4 = 36$

1 4 9 16 25 36 49 64 81

$x = \sqrt{\frac{144}{4}} = \sqrt{36} = 6$

$\sin(\alpha) = \frac{6}{\frac{25}{2}} = \frac{12}{25}; \quad \cos(\alpha) = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{25}{2}}$

$\sin(A) = \sqrt{1 - \frac{81}{225}} = \frac{\sqrt{144}}{15} = \frac{12}{15}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{12}{25} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 5} = 45$ ✓

$k \cdot 6 \cdot 11^2 \cdot 101^2 = n^2$

$k \cdot 6 = n_1^2$

$\boxed{k = 6}$

$k \in [1; 9]$

$k=1: 6 = n_1^2$ ×

$2: 12 = n_1^2$ ×

$3: 18 = n_1^2$ ×

$4: 24 = n_1^2$ ×

$5: 30 = n_1^2$ ×

$6: 36 = n_1^2$ ✓

$7: 42 = n_1^2$ ×

$8: 48 = n_1^2$ ×; 9

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left(\frac{15}{2} + 5\right) \cdot 9 \cdot \frac{12}{25} = \frac{6}{25} \cdot 9 \cdot \frac{15+10}{2} =$

$= \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 5} \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} = \frac{9 \cdot 3 \cdot 5}{5} = 45$

$(10+5)^2 = 100 + 100 + 25 = 225$

$A = k \cdot 11 \cdot 101$

$A \,\vdots\, 11$, $A \,\vdots\, 101$ $\Rightarrow$ $n^2 \,\vdots\, 101$, $n \,\vdots\, 11$; $n^2 \,\vdots\, 101^2$, $n^2 \,\vdots\, 11^2$

m.k. 11 и 101 — прост.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} B \,\vdots\, 101 \\ C \,\vdots\, 101 < 100 \end{array}\right.$

$144 + 81 = 225$

$225 - 81 = 144$

$ABC = n^2$

$A.\ A = k \cdot 11 \cdot 101$

$k \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = n^2$

$B \,\vdots\, 101$

B — есть цифра $\Rightarrow$ $\boxed{B = 202}$

$C \,\vdots\, 11$; $\boxed{C = 33}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$x = 7 + \frac{k}{2} + \frac{3n}{2} + 7 - 2n = \frac{k+3n-4n}{2} = \frac{k-n}{2}$

$\cancel{3x = 7 + 2k}$

$\begin{cases} y = 7 + 2k - 3x \\ y = 7 + 2n + x \end{cases}$

$y = 7 + 2k - 3(y - 7 - 2n)$

$y = 7 + 2k - 3y + 3 + 6n; \quad 4y = 4 + 2(k + 3n)$

$y = 7 + \frac{7}{2}(k + 3n)$

$x = \frac{7 + 2k - y}{3} = \frac{\cancel{7} + 2k - \cancel{7} - \frac{k}{2} - \frac{3}{2}n}{3} = \frac{\frac{3k}{2} - \frac{3n}{2}}{3} = \frac{k-n}{2}$

1) если $x_1 = x_2 = \lambda_0 = \frac{k-n}{2}$

то $\left(\frac{k-n}{2}; \ 7 + \frac{7}{2}(k + 3n)\right)$

2) если $x_1 = \lambda_1; \ \lambda_1 \neq \lambda_2$, $x_2 = \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \frac{k-n}{2}$, $\lambda_2 \neq \frac{k-n}{2}$

то $(\lambda_1; \ 7 + 2k - 3\lambda_1)$

$(\lambda_2; \ 7 + 2n + \lambda_2)$

$-5 \leq x < 5$

$-4 \leq y < 4$

$y = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3.$

$\left[\begin{array}{l} x = y - 7 - 2n \\ x = \frac{7 + 2k - y}{3} \end{array}\right.$

$k, n \in \mathbb{Z}$

$-5 = \frac{2k - 3}{3}$

$-5 = \frac{2}{3}k - 1$

$-4 = \frac{2}{3}k$

$-6 = k$

$8 \cdot 5 = 40$ реш

$y = -4$

$x = -5 - 2n$

$\cancel{y = -3}$ $x = \frac{\cancel{7} + 2k - \cancel{7}}{3} = \frac{2}{3}k - 1$

$x = -5$

$x = -3$

$x = -1$

$x = 1$

$x = 3$

5 пар

$\cancel{x = -5}$

$\cancel{x = -3}$

$\cancel{x = -1}$

$y = -3$ $x = -4 - 2n$

$x = -4$

$x = -2$

$x = 0$

$x = 2$

$x = 4$

5 пар

$y = -2$ $x = -3 - 2n$

$x = -3$

$x = -3$

$x = -1$

$x = 1$

$x = 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3) a) черновик

$(\sin(\pi x)+\sin(\pi y))\sin(\pi x)=(\cos(\pi x)+\cos(\pi y))\cos(\pi x)$

$\sin^2(\pi x)+\sin(\pi x)\sin(\pi y)=\cos^2(\pi x)+\cos(\pi y)\cos(\pi x)$

$\sin(\pi-(-\pi\lambda))=\sin(\pi\lambda)$

$\sin^2(\pi x)-\cos^2(\pi x)=\cos(\pi x)\cos(\pi y)-\sin(\pi x)\sin(\pi y)$

$-\cos(2\pi x)=\cos(\pi x+\pi y)$

$\cos(\pi-(-\pi\lambda))=-\cos(\pi\lambda)$

$x=\lambda$

$y=1+\lambda$

$\cos(2\pi x)+\cos(\pi x+\pi y)=0$

$2\cos\left(\frac{2\pi x+\pi x+\pi y}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi x-\pi x-\pi y}{2}\right)=0$

$\sin(\pi\lambda)+\sin(\pi+\pi\lambda)\sin(\pi\lambda)=\cos(\pi\lambda)+\cos(\pi+\pi\lambda)\cos(\pi\lambda)$

$0=0$

$\cos\left(\frac{3\pi x+\pi y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi y-\pi x}{2}\right)=0$

$\sin(x)$, $\cos(x)$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{3\pi x+\pi y}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi\lambda\\ \frac{\pi y-\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k\end{array}\right.$$

$k,n\in\mathbb{Z}$

4 билет

n 11кл

стало $4+k$ дел

$\times\begin{array}{r}46\\4\end{array}$ $=192$

n чел.

$+\begin{array}{r}192\\49\end{array}$ $=241$

$5k^2+35k+36=0$

$D=35^2-4\cdot5\cdot36=35^2-20\cdot36=1225-720=505$

$k_{1,2}=\frac{-35\pm\sqrt{505}}{2\cdot5}$

$\frac{5}{2}\cdot\frac{C_{n-2}^{2}}{C_n^4}=\frac{C_{n-2}^{2+k}}{C_n^{4+k}}$

$\frac{\frac{(n-2)!}{2\cdot(n-4)!}}{\frac{n!}{4!\,(n-4)!}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{\frac{(n-2)!}{(n-4-k)!\,(k+2)!}}{\frac{n!}{(n-4-k)!\cdot(k+4)!}}$

$\times\begin{array}{r}35\\35\end{array}$ $+175$ 105 $=1225$

$\times\begin{array}{r}36\\20\end{array}$ $=720$

$\frac{720}{4\cdot25}=\frac{180}{5\cdot5}=\frac{36}{5}$

$1225-505=720$

$\times\begin{array}{r}12\\5\end{array}$ $=60$

-60, 24, 36

$1225-720=505$

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4!}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{\frac{1}{(k+2)!}}{\frac{1}{(k+4)!}}$

$720:4=180$

$180:5=36$

$5\cdot707$

$\frac{4\cdot3\cdot2}{2}=\frac{5}{2}\cdot\frac{(k+4)(k+3)\cancel{(k+2)!}}{\cancel{(k+2)!}}$

$24=5(k^2+7k+12)$

$\frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)!\cdot2!}}{\frac{n!}{(n-4)!\cdot4!}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{\frac{(n-2)!}{(k+2)!\,(n-2-(k+2))!}}{\frac{n!}{(k+4)!\,(n-(k+4))!}}$

$24=5(k+4)(k+3)$

$\frac{5}{2}\cdot4\cdot3\cdot2=(k+4)(k+3)$

$60=k^2+7k+12$

$k^2+7k-48=0$

$60-12=48$

$D=49+4\cdot48=$

$\frac{4\cdot3\cdot2}{2}=\frac{5}{2}\cdot\frac{(k+4)!\,\cancel{(n-k-4)!}}{(k+2)!\,\cancel{(n-k-4)!}}$