



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) A — ~~температура~~ z нас. z оди. u одр $\Rightarrow A = K \cdot 7777 = K \cdot 11 \cdot 707$

$A \cdot B \cdot C = n^2; n \in \mathbb{N}$

м.к $\begin{cases} A: 11 \\ A: 707 \\ 11 \text{ и } 707 - \text{простые} \end{cases} \cdot \text{то} \begin{cases} n: 11 \\ n: 707 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n: 11^2 \\ n: 707^2 \end{cases}$

101 и 11 — простые

$\begin{cases} K \in [7; 9] \\ K - \text{целое} \end{cases}$

$n: 11^2$

$n: 707^2$

$\begin{cases} A: 11 \\ A: 707 \\ n^2: 11^2 \\ n^2: 707^2 \\ AB = n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B: 707 \\ C: 707, \text{ но } C - \text{сложное} (< 700) \Rightarrow C \text{ не кратно } 101 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow B: 707$

B — содержит u одр z

$B: 707$

B — z нас

$B = K_1 \cdot 707; K_1 \in [7; 9]$
 $K_1 - \text{целое}$
 $707 \cdot K_1; B = K_1 \cdot K_1$
 $K_1 \cdot K_1$

$\begin{cases} B = K_1 \cdot K_1 \\ K_1 \in [7; 9] \\ B - \text{содержит } u \text{ одр } z \end{cases}$

$\Rightarrow K_1 = 2; \boxed{B = 202}$

$\begin{cases} n^2: 11 \\ A: 11 \\ AB = n^2 \\ B - \text{не кратно } 11 \end{cases}$

$\Rightarrow$

$\begin{cases} C: 11 \\ C - \text{содержит } u \text{ одр } z \end{cases}$

$\Rightarrow$

$C \geq 77 \cdot m$

$m \in [7; 9]$

$m - \text{целое}$

$C = m \cdot m$

$m \cdot m$

$m \cdot m$

$m \cdot m$

$\begin{cases} C = m \cdot m \\ m \in [7; 9] \end{cases}$

$\Rightarrow$

$m = 3; \boxed{C = 33}$

$A = K \cdot 77 \cdot 707$

$K \cdot 77 \cdot 707 \cdot 77 \cdot 3 \cdot 707 \cdot 2 =$

$B = 2 \cdot 707$

$= n^2$

$C \geq 3 \cdot 77$

$\begin{cases} K \cdot 77^2 \cdot 707^2 \cdot 6 = n^2 \Rightarrow \\ K - \text{целое} \\ K \in [7; 9] \end{cases}$

$\begin{cases} 6K = n^2 \\ K - \text{целое} \\ K \in [7; 9] \end{cases}$

$K:$

$6K:$

7

2

3

4

5

6

7

8

9

эта таблица
программ?

$\Rightarrow K = 6$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

7) *угадывание*

$$K=6; \begin{cases} A=5666 \\ B=202 \\ C=33 \end{cases}$$

[Signature]

Ответ: ~~$A=5666; B=202; C=33$~~ ($6666; 202; 33$)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \begin{cases} x, y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = \frac{7}{x} + \frac{7}{y} + \frac{2}{xy} \\ K = \frac{7}{x-1} + \frac{7}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ \frac{7}{xy} (x+y+2) = \frac{7}{(x-1)(y+1)} (y+x+2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ (x+y+2) \left(\frac{7}{xy} - \frac{7}{(x-1)(y+1)} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ x+y = -2 - \text{невозможно} \\ \frac{7}{xy} - \frac{7}{(x-1)(y+1)} = 0 \end{cases}$$

(сумма положительных чисел не может быть отрицательной)

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ \frac{(x-1)(y+1) - xy}{xy(x-1)(y+1)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ xy + x - y - 7 - xy = 0 \\ xy \cdot (x-1)(y+1) \neq 0 \\ x \neq 0, \text{ так } x, y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ x-y=7 \\ x \neq 7 \\ y \neq -7 \end{cases}$$

$$(7) \quad x-y=7 - \text{линейное уравнение}$$

$$x_0 = 2, y_0 = 7$$

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 7+t \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2t - 7t = 7 \checkmark$$

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ x = 2+t \\ y = 7+t \\ t \in \mathbb{Z} \\ x \neq 7 \end{cases}$$

$$\text{или: } t \in \mathbb{Z} \begin{cases} x = 2+t > 0 \\ y = 7+t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \in \mathbb{Z} \\ t > -2 \\ t > -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

т.к. $t \geq 0$, то $x = 2+t \neq 7$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x, y > 0 \\ x = 2+t \\ y = 7+t \\ t \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M &= (2+t)^3 - (7+t)^3 - 3(t+2)(t+7) = t^3 + 3 \cdot t^2 \cdot 2 + 3 \cdot t \cdot 4 + 8 - (t^3 + 3t^2 + 3t + 7) - \\ &- 3(t^2 + t + 2t + 14) = \cancel{t^3} + \cancel{6t^2} + 72t + 8 - \cancel{t^3} - \cancel{3t^2} + 3t - 7 - \cancel{3t^2} - 3t - 6t - 6 = \\ &= 72t + 8 - 3t - 7 - 9t - 6 = 8 - 7 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } M = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) продолжим

$$\arcsin\left(\frac{x}{5}\right) + \arccos\left(\frac{y}{4}\right) < \frac{3\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) \leq \frac{\pi}{2}; \Rightarrow$$

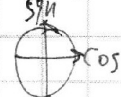
$$0 \leq \arccos\left(\frac{y}{4}\right) \leq \pi$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{5}\right) + \arccos\left(\frac{y}{4}\right) \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\forall \frac{x}{5}, \frac{y}{4} \in [-1; 1]$$

Ед. не парх. Возьмем (на обл. окруж)

$$\begin{cases} \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \arccos\left(\frac{y}{4}\right) = \pi \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{x}{5} = 1 \\ \frac{y}{4} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -4 \end{cases} \text{ - не подходит пара}$$

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \\ x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 \leq x < 5 \\ -4 \leq y < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 7 + 2k - 3x \\ y = 7 + 2n + x \end{cases}$$

Если пара (x; y) удовл. одну из ур-й, то она явл. решением и др. ур-я из пункта а)

В ответе к п. а) видно, что 2 серии реш. совпадают, если x явл. целым или полуцелым числом. т.к. мы искали целые пары (x; y), то мы можем взять только одну ур-е y(x).

$$\begin{cases} -5 \leq x < 5 \\ -4 \leq y < 4 \end{cases}$$

$$y \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\} - 8 \text{ зн. в.}$$

$$2 \text{ (т.к. } n \in \mathbb{Z})$$

$$x = y - 7 - 2n$$

т.е. если y - нечетное, то все целые x ∈ [-5; 5], а если y - четное, то все целые x ∈ [-5; 5]

$$x, y, k, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x, y \in \mathbb{Z} \text{ (по ур-ю)}$$

$$\begin{matrix} -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \forall & x & \forall & x & \forall & x & \forall & x & \forall & x \end{matrix}$$

каждому y из (1) соотв 5 знач. x.

$$\text{всего } 5 \cdot 8 = 40 \text{ пар}$$

Ответ: 40/40



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) (\sin(\pi x) + \sin(\pi y)) \sin(\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(\pi y)) \cos(\pi x)$$

$$\sin^2(\pi x) + \sin(\pi x) \sin(\pi y) = \cos^2(\pi x) + \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$

$$\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) - \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

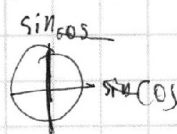
$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi x + \pi y)$$

$$\cos(\pi x + \pi y) + \cos(2\pi x) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi x + \pi y + 2\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x + \pi y - 2\pi x}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3\pi x + \pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y - \pi x}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}, \begin{cases} 3\pi x + \pi y = \pi + 2\pi k \\ \pi y - \pi x = \pi + 2\pi n \end{cases}, k, n \in \mathbb{Z}$$



$$\begin{cases} 3x + y = 1 + 2k & (1) (x_1, y_1) \\ y - x = 1 + 2n & (2) (x_2, y_2) \end{cases}, k, n \in \mathbb{Z}$$

Сложение реш:

$$\begin{cases} y = 1 + 2k - 3x \\ y = 1 + 2n + x; x = y - 1 - 2n \end{cases} \rightarrow y = 1 + 2k - 3(y - 1 - 2n)$$

$$y = 1 + 2k - 3y + 3 + 6n; \quad y = 4 + 2(k + 3n); \quad y = 1 + \frac{k + 3n}{2}$$

$$x = 1 + \frac{k + 3n}{2} - 1 - 2n = \frac{k + 3n - 4n}{2} = \frac{k - n}{2} = x_{\text{общ}}$$

$$k, n \in \mathbb{Z}$$

если $x_1 = x_2$; то ответ: $\left(\frac{k-n}{2}; 1 + \frac{k+3n}{2}\right); k, n \in \mathbb{Z}$

если $x_1 \neq x_2$; то ответ: $(\lambda_1; 1 + 2k - 3\lambda_1) - k, n \in \mathbb{Z}$
 $(\lambda_2; 1 + 2n + \lambda_2); \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Ответ: а) 1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $(\lambda_1; 1 + 2k - 3\lambda_1); k, n \in \mathbb{Z}$ 2) $\lambda_1 = \lambda_2$
 $(\lambda_2; 1 + 2n + \lambda_2); \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}; \left(\frac{k-n}{2}; 1 + \frac{k+3n}{2}\right); k, n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) k -на ск-ко увелич кол-во билетов в конце месяца. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow k > 0$

в нач. мес: 4 бил. n -кол-во учеников.

в конце мес: $4+k$ бил.

~~и в начале и в конце~~ n -кол-во учеников, кол-во билетов не изменилось

$P(\text{попаст в нач. мес. грузов}) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$ → скажем сп. можно раздать билеты, тогда оба конца
 C_n^4 — всего сп. раздать билеты

$P(\text{попаст в конце мес. грузов}) = \frac{C_{n-2}^{4+k-2}}{C_n^{4+k}}$ → сп. раздать так, тогда оба конца
 C_n^{4+k} — всего сп. раздать

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{C_{n-2}^{k+2}}{C_n^{k+4}}, \quad \frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!} \cdot \frac{5}{2} = \frac{(n-2)!}{(n-k-4)! \cdot (k+4)!}$$

~~5 · 4 · 3 · 2~~

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{(k+4)(k+3)(k+2)!}{(k+4)!}$$

$$\begin{array}{r} 76 \\ 72 \\ \hline 4 \\ 727 \end{array}$$

$$30 = k^2 + 7k + 72$$

$$k^2 + 7k - 72 = 0, \quad D = 49 + 4 \cdot 72 = 727$$

$$k_{1,2} = \frac{-7 \pm 11}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{-18}{2} = -9 \text{ — не подходит, т.к. } k > 0.$$

$$k = 2$$

билетов в конце мес: $k+4 = 2+4 = 6$ билетов.

Ответ: 6 билетов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

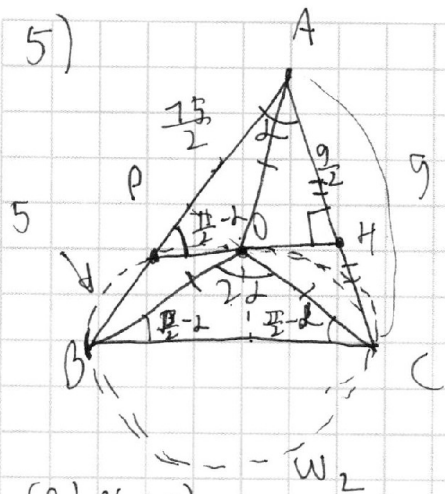
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5)



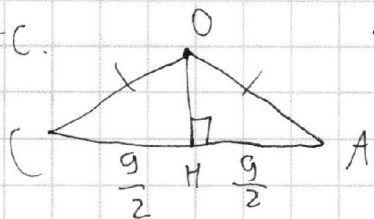
$$(PO) \cap (AC) = H$$

$$\angle BCO - \text{впис в } \omega_2, \Rightarrow \angle BPO = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \pi - 2\alpha; \quad \angle BCO = 2\pi - \angle BPO = 2\pi - (\pi - 2\alpha) = \pi + 2\alpha; \quad \angle BPO - \text{опир на } \angle BCO, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BPO = \frac{1}{2} \cdot \angle BCO = \frac{1}{2} \cdot (\pi + 2\alpha) = \frac{\pi}{2} + \alpha; \quad \angle APO = \pi - \angle BPO = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \frac{\pi}{2} - \alpha; \quad \text{рассм. } \triangle APH;$$

$$\angle H = \pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

рассм. $\triangle OAC$.



$\triangle OCA - \text{пр}$

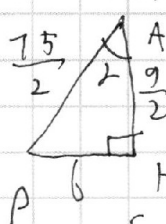
$$; (OC \geq OA = R_{ABC});$$

$OH - \text{вис-та}$

(вис-та из верш. пр. туп. т.б. вис. и мед.)

$$\Rightarrow CH = AH = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2}$$

$\triangle PAH$



$$PH^2 + \left(\frac{9}{2} \right)^2 = \left(\frac{15}{2} \right)^2; \quad PH = \sqrt{\frac{225 - 81}{4}} = \frac{\sqrt{144}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\sin(\alpha) = \frac{6}{\frac{15}{2}} = \frac{72}{75}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \left(\frac{15}{2} + \frac{10}{2} \right) \cdot \frac{72}{75} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 25}{4 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{9 \cdot 5 \cdot 8}{1} = 45; \quad \text{Омфем: } S_{ABC} = 45$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

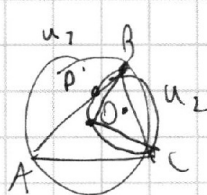
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{7}{x} + \frac{7}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{7}{x-1} + \frac{7}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

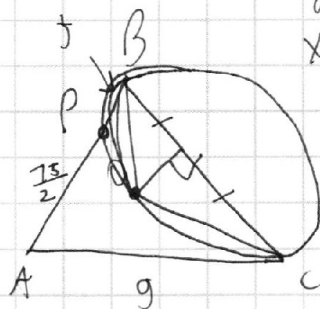
$$M = x^3 - y^3 - 3xy$$



$$S_{ABC} = ?$$

$$AP = \frac{7S}{2}$$

$$BP = 5, AC = 9$$



$$\frac{1}{xy}(x+y+2) = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy + x - y - 1$$

$$x - y - 1 = 0$$

$$\sin^2(\pi x) + \sin(\pi x)\sin(\pi y) = \cos^2(\pi x) + \cos(\pi x)\cos(\pi y)$$

$$y_0 = 1 + 2n, x_0 = 0$$

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi x + \pi y)$$

$$\cos(2+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(2-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\pi(x+y)) + \cos(2\pi x) = 0$$

$$\cos(2+\beta) + \cos(2-\beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$$

$$2\cos\left(\frac{\pi x + \pi y + 2\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x + \pi y - 2\pi x}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi x + \pi y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi y - \pi x}{2}\right) = 0$$

$$\cos(x)\cos(y) = 0$$

$$2\alpha = x+y$$

$$\alpha = \frac{x+y}{2}$$

$$\alpha + \beta + \beta = x - y$$

$$\beta = \frac{x-y}{2}$$

$$x+y=2$$

$$x=$$

$$\begin{cases} y-x=1+2n \\ 3x+y=1+2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}$$

$$= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos$$

$$y = x + 1 + 2n$$

$$\begin{cases} y-x = 1 + 2n \\ 3x+y = 1 + 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-x = 1 + 2n \\ 3x+y = 1 + 2k \end{cases}$$

$$y = \frac{K-n}{2} + \frac{4n+1}{2} + 1$$

$$= \frac{K+n}{2} + 1$$

$$3x + x + 1 + 2n = 1 + 2k$$

$$4x = 2(k-n)$$

$$x = \frac{K-n}{2}$$

$$x^3 - y^3 - 3xy$$

$$x-y=1$$

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2+t-1-t=1$$

$$\begin{cases} 2+t > 0 & t > -2 \\ 1+t > 0 & t > -1 \end{cases}$$

$$M = (2+t)^3 - (1+t)^3 - 3(2+t)(1+t) = 8 + 3 \cdot 4 \cdot t + 3 \cdot 2 \cdot t^2 + t^3 - (1 + 3 \cdot t + 3 \cdot t^2 + t^3) - 3(2t + 2 + t + t^2) = 8 + 12t + 6t^2 + t^3 - 1 - 3t - 3t^2 - t^3 - 6 - 6t - 3t^2 - 3t^3 = 8 - 6 - 1 = 1.$$

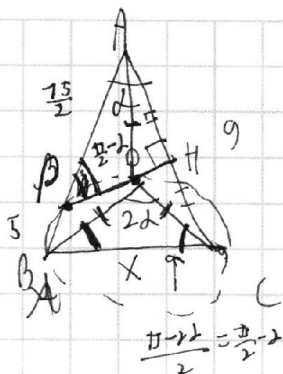


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



черновик

$$\angle ABO = \angle BCO \quad (\angle BOC)$$

$$OB = OC = R_{ABC} \Rightarrow \angle OBC = \angle OCB$$

$$\frac{x}{2\sin(\alpha)} = R; \quad \sin(\alpha) = \frac{x}{2R}$$

$$x^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot \cos(2\alpha)$$

$$x^2 = 9^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2 - 2 \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} \cdot \cos(\alpha)$$

$$x = R \cdot 2\sin(\alpha)$$

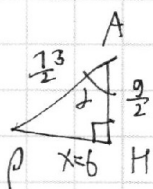
$$R \cdot 4\sin^2(\alpha) = 2R^2 - 2R^2 \cos(2\alpha)$$

$$\angle BCO = 2\pi - (\pi - 2\alpha) = \pi + 2\alpha$$

$$\angle BCO = 2\pi - (\pi - 2\alpha) = \pi + 2\alpha$$

$$\angle BPO = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}; \quad \angle APO = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle BPO = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}; \quad \angle APO = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$



$$x^2 + \frac{81}{4} = \frac{223}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{144}{4}} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sin(\alpha) = \frac{6}{\frac{79}{2}} = \frac{12}{79}; \quad \cos(\alpha) = \frac{9}{\frac{79}{2}} = \frac{18}{79}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{72}{75} = \frac{5 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 75} = 45$$

$$R \cdot 6 \cdot 11^2 \cdot 101^2 = n^2$$

$$R \cdot 6 = n^2$$

$$n > 6$$

$$= \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 5} \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} = \frac{9 \cdot 5 \cdot 7}{5} = 45$$

$$A = R \cdot 11 \cdot 101$$

$$A: 11 \Rightarrow n: 101$$

$$A: 101 \Rightarrow n: 11$$

$$400 = n^2$$

$$A \cdot A = R \cdot 11 \cdot 101$$

$$R \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = n^2$$

$$B: 101$$

$$C: 101$$

$$B: 101$$

$$B \text{ — есмь } n^2$$

$$B > 202$$

$$C: 11; C = 33$$

$$x = 10$$

$$7070 + 77 = 70771 = 7070 + 707 = 7177$$

$$\frac{15}{2} + 5 = \frac{75 + 10}{2} = \frac{85}{2}$$

$$\frac{-223}{87}$$

$$\frac{-744}{24} \cdot \frac{1}{36}$$

$$\frac{74976}{25364961}$$

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{81}{225}} = \frac{\sqrt{144}}{15} = \frac{12}{15}$$

$$4 \cdot 5 \cdot 7$$

$$4: 24 = n_1^2 \cdot x$$

$$5: 30 = n_1^2 \cdot x$$

$$6: 36 = n_1^2 \cdot x$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left(\frac{15}{2} + 5 \right) \cdot 9 \cdot \frac{12}{75} = \frac{6}{75} \cdot 9 \cdot \frac{75 + 70}{2} =$$

$$(10 + 3)^2 =$$

$$= 700 + 700 + 25 = 1425$$

$$\frac{-223}{17}$$

$$\frac{744}{744}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$x = 7 + \frac{k}{2} + \frac{3n}{2} \cdot 17 - 2n = \frac{k+3n-4n}{2} = \frac{k-n}{2}$$

$$3x = 7 + 2k$$

$$y = 7 + 2k - 3x$$

$$y = 7 + 2n + x$$

$$y = 7 + 2k - 3(7 - 2n)$$

$$y = 7 + 2k - 21 + 6n; \text{ и } y = 7 + 2(k + 3n)$$

$$y = 7 + \frac{7}{2}(k + 3n)$$

1) если $x_1 = x_2 = 0 = \frac{k-n}{2}$

то $\left(\frac{k-n}{2}, 7 + \frac{7}{2}(k + 3n) \right)$

$$x = \frac{7 + 2k - y}{3} = \frac{7 + 2k - 7 - \frac{7}{2}(k + 3n)}{3} = \frac{\frac{4k - 7n}{2}}{3} = \frac{4k - 7n}{6}$$

2) если $x_1 = \lambda_1; \lambda_1 \neq \lambda_2$
 $x_2 = \lambda_2; \lambda_2 \neq \frac{k-n}{2}$

то $(\lambda_1; 7 + 2k - 3\lambda_1)$

$(\lambda_2; 7 + 2n + \lambda_2)$

$$-5 \leq x \leq 5$$

$$-4 \leq y \leq 4$$

$$y = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3.$$

$$\begin{cases} x = y - 7 - 2n \\ x = \frac{7 + 2k - y}{3} \end{cases}$$

$$k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} -5 &= \frac{4k - 7n}{6} \\ -5 &= \frac{4k - 7n}{6} \cdot 1 \\ -4 &= \frac{4k - 7n}{6} \cdot 1 \\ -3 &= \frac{4k - 7n}{6} \cdot 1 \\ -2 &= \frac{4k - 7n}{6} \cdot 1 \\ -1 &= \frac{4k - 7n}{6} \cdot 1 \\ 0 &= \frac{4k - 7n}{6} \cdot 1 \\ 1 &= \frac{4k - 7n}{6} \cdot 1 \\ 2 &= \frac{4k - 7n}{6} \cdot 1 \\ 3 &= \frac{4k - 7n}{6} \cdot 1 \end{aligned}$$

$$6 \cdot 5 = 40 \text{ перм}$$

$y = -4$	$x = -5 - 2n$
$x = -5$	$x = -5$
$x = -3$	$x = -3$
$x = -1$	$x = -1$
$x = 1$	$x = 1$
$x = 3$	$x = 3$

$$y = -3; x = -4 - 2n$$

$x = -4$	$x = -4$
$x = -2$	$x = -2$
$x = 0$	$x = 0$
$x = 2$	$x = 2$
$x = 4$	$x = 4$

$$y = -2; x = -3 - 2n$$

$x = -3$	$x = -3$
$x = -1$	$x = -1$
$x = 1$	$x = 1$
$x = 3$	$x = 3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) а)

Черновик

$$(\sin(\pi x) + \sin(\pi y)) \sin(\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(\pi y)) \cos(\pi x)$$

$$\sin^2(\pi x) + \sin(\pi x) \sin(\pi y) = \cos^2(\pi x) + \cos(\pi y) \cos(\pi x)$$

$$\sin(\pi - (-\pi x)) = \sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) - \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

$$= \sin(\pi x)$$

$$- \cos(2\pi x) = \cos(\pi x + \pi y)$$

$$\cos(\pi - (-\pi x)) =$$

$$= -\cos(\pi x)$$

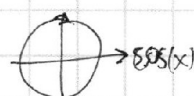
$$x = \lambda$$

$$\cos(2\pi x) + \cos(\pi x + \pi y) = 0$$

$$y = 1 + \lambda$$

$$\frac{2 \cos(\frac{2\pi x + \pi x + \pi y}{2}) \cos(\frac{-2\pi x - \pi x - \pi y}{2})}{\cos(\frac{3\pi x + \pi y}{2}) \cos(\frac{\pi y - \pi x}{2})} = 0$$

$\sin(x)$



и будем

и так
мало чужды

$$\begin{cases} \frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}$$

$$k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\frac{2\pi y}{2} = \frac{2\pi k}{2}$$

$$5k^2 + 35k + 36 = 0$$

$$D = 35^2 - 4 \cdot 5 \cdot 36 = 35^2 - 20 \cdot 36 = 7225 - 720 = 505$$

$$k_{712} = \frac{-35 \pm \sqrt{505}}{2 \cdot 5}$$

$$\frac{720}{4 \cdot 25} = \frac{720}{5 \cdot 5} = \frac{720}{25} = \frac{288}{10} = \frac{144}{5}$$

$$\begin{array}{r} \times 35 \\ 775 \\ \hline 705 \\ \times 72 \\ \hline 5040 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 36 \\ 216 \\ \hline 720 \\ \times 72 \\ \hline 5184 \end{array}$$

$$\frac{(n-2)!}{2 \cdot (n-4)!} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(n-4)!}{(n-4)! \cdot (n-4)!}$$

$$\frac{(n-2)!}{2 \cdot (n-4)!} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(n-4)!}{(n-4)! \cdot (n-4)!}$$

$$\frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{720}{75} = \frac{96}{10} = \frac{48}{5}$$

$$5 \cdot 707$$

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(k+4)(k+3)}{(k+4)!}$$

$$24 = 5(k^2 + 7k + 72)$$

$$\frac{3}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = (k+4)(k+3)$$

$$60 = k^2 + 7k + 72$$

$$\frac{60}{48} = \frac{5}{4}$$

$$D = 49 \pm 4 \cdot 48 =$$

$$k^2 + 7k - 48 = 0$$