



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = 1111a.$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2, n \in \mathbb{N}$$

Чтобы произведение было квадратом, $B \cdot C$ должно делиться на $1111 = 11 \cdot 101$.

Проверкой убеждаемся, что $101 \nmid 3, 101 \nmid 5, 101 \nmid 7, 101 \nmid 9 \Rightarrow$ число 101 -

- простое. Число B - трёхзначное, число C - двузначное $\Rightarrow B:101, C:11$

$B:101$, но B должно содержать в своей записи цифру $1 \Rightarrow B=101$

$C:11$, но C содержит цифру $5 \Rightarrow C=55$

$$A \cdot B \cdot C = 1111 \cdot a \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11 = 1111^2 \cdot 5 \cdot a$$

Чтобы произведение было квадратом, ^{цифра} a должна делиться на $5 \Rightarrow a=5$

Получаем тройку $(5555; 101; 55)$

Ответ: $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☒☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x > 0, y > 0$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x+y+1 > 0 \Rightarrow \text{делим на } x+y+1$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$(x-3)(y+3) = xy$$

$$xy - 3y + 3x - 9 = xy$$

$$3x - 3y - 9 = 0$$

$$x - y - 3 = 0$$

$$\underline{x - y = 3}$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy = 3(x^2 + xy + y^2) - 9xy = \\ &= 3(x^2 + xy - y^2 - 3xy) = 3(x^2 - 2xy + y^2) = 3(x-y)^2 = 3 \cdot 9 = 27. \end{aligned}$$

Ответ: {27}



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$144 - 18 \cdot 4 = 144 - 72 = 72$$

Ответ: 72



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐

2 ☐

3 ☒

4 ☐

5 ☐

6 ☐

7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a)

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

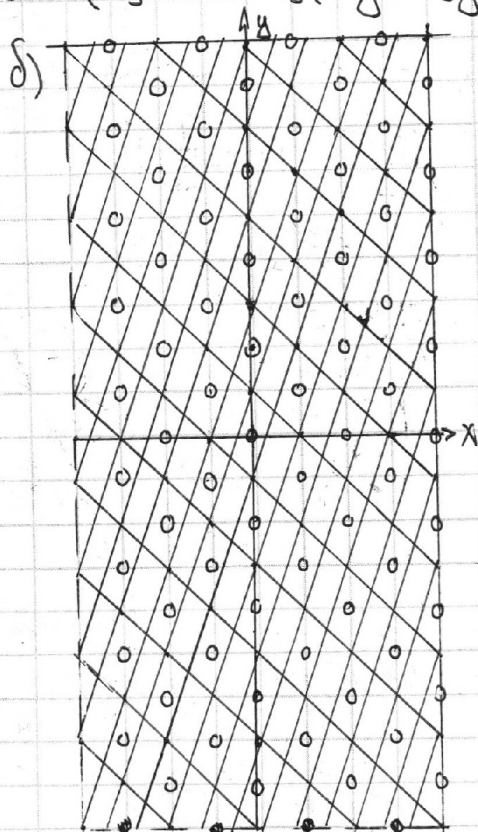
$$\begin{cases} 2\pi x = \pi - \pi x + \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pi + \pi x - \pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi - \pi x + \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pi + \pi x - \pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2x = 1 - x + y + 2k$$

$$2x = 1 + x - y + 2n$$

Ответ: $(x; 3x - 1 - 2k); (1 - y + 2n; y); k, n \in \mathbb{Z}; x, y \in \mathbb{R}$



$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

Заметим, что $\arccos \frac{x}{4} \in [0; \pi]$,
 $\arccos \frac{y}{9} \in [0; \pi]$

$$\begin{cases} \frac{x}{4} \in [-1; 1] \\ \frac{y}{9} \in [-1; 1] \\ \arccos \frac{x}{4} \neq \pi \\ \arccos \frac{y}{9} \neq \pi \end{cases} \begin{cases} x \in [-4; 4] \\ y \in [-9; 9] \\ x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{cases}$$

Построим графики уравнений

$$\begin{cases} y = 3x - 1 - 2k \\ y = 1 - x + 2n \end{cases}$$

Всего точек с целочисл. координатами $8 \cdot 8 = 64$

Исключим точки, не попадающие ни на одну из прямых



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть количество одноклассников $- N \in \mathbb{N}$,

количество выделенных билетов в конце месяца $- m \in \mathbb{N}$.

В начале месяца $P_1(T \cup B) = \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$

В конце месяца $P_2(T \cup B) = \frac{m}{N} \cdot \frac{m-1}{N-1}$

По условию $P_1(T \cup B) \cdot \frac{7}{2} = P_2(T \cup B)$

$$\frac{12}{N(N-1)} \cdot \frac{7}{2} = \frac{m(m-1)}{N(N-1)}$$

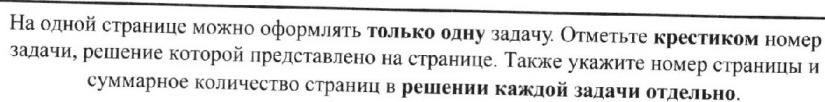
$$\frac{42}{N(N-1)} = \frac{m(m-1)}{N(N-1)} \quad | \cdot N(N-1) > 0$$

$$42 = m(m-1)$$

$$m^2 - m - 42 = 0$$

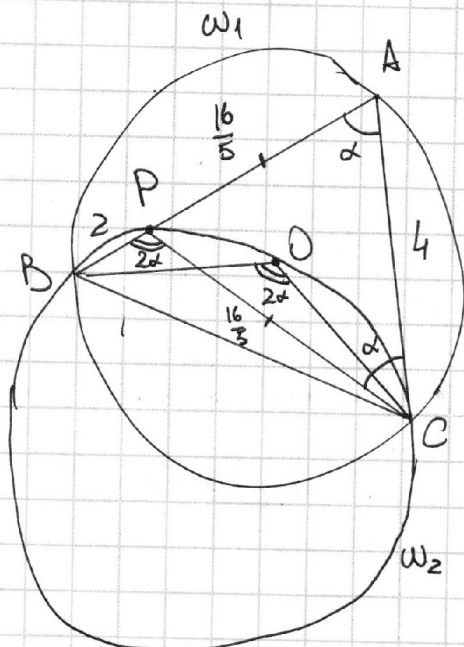
По т. Виета $\begin{cases} m = 7 \\ m = -6 < 0 \end{cases}$

Ответ: 7 билетов



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!**



Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle BOC = 2\alpha$ (центральный угол)

Прогн PC. $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$ как опирающийся на BC.

$$\angle BPC - \text{внешн. г.} \triangle PAC \Rightarrow \angle BPC > \angle PAC + \angle ACP$$
$$2\alpha = \alpha + \angle ACP \Rightarrow \angle ACP = \alpha = \angle PAC \Rightarrow \triangle PAC - p/s.$$

$\Rightarrow PA = PC = \frac{16}{5}$. По т. косинусов для $\triangle PAC$:

$$\cos \alpha = \frac{AP^2 + AC^2 - PC^2}{2 \cdot AP \cdot AC} = \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^2 + 4^2 - \frac{16}{5}}{2 \cdot \frac{16}{5} \cdot 4} = \frac{4^2}{2 \cdot 4 \cdot \frac{16}{5}} = \frac{5}{8}$$

$$\alpha \in (0; 90^\circ) \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \sqrt{\frac{39}{8}}$$

$$AB = AP + BP = 2 + \frac{16}{5} = \frac{26}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC}{2} = \frac{\frac{26}{5} \cdot 4 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{13}{5} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

Ответ: $\frac{13\sqrt{39}}{10}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (1) (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ (2) x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Неравенство (2) - неравенство круга

Неравенство (1) - описывает

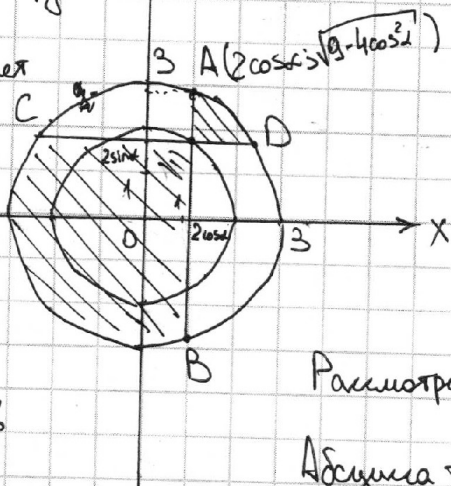
точки, попадающие в I и III кв.

прямых, паралл. осей

координат, пересекающихся

на окружности с центром в

начале координат и радиусом 3



Рассмотрим т. D.

$$\begin{aligned} x_D &= \sqrt{3^2 - (2\sin\alpha)^2} \\ y_D &= 2\sin\alpha \end{aligned}$$

Рассмотрим т. A.

Абсцисса т. A $x_A = 2\cos\alpha$

Ордината $y_A = \sqrt{3^2 - (2\cos\alpha)^2}$
по т. Пифагора.

Сумма длин AB и CD равна

$$l(\alpha) = 2(\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}) = 2(\sqrt{5 + 4\sin^2\alpha} + \sqrt{5 - 4\sin^2\alpha})$$

Докажем, что $AB + CD$ ~~максимально~~ при $\lg^2\alpha = 1$

$$l^2(\alpha) = 4(16 + 2\sqrt{(5 + 4\sin^2\alpha)(5 - 4\sin^2\alpha)}) \quad 4\sin^2\alpha = t \in [0; 4]$$

$$(5 + t)(5 - t) = 25 + 5t - 5t - t^2 = 25 - t^2 \quad t = \frac{-4}{-2} = 2$$

l ~~максимально~~ при $(5+t)(5-t)$ ~~мин.~~ при $t = 2$

$$4\sin^2\alpha = 2 \quad \sin^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2} \quad \lg^2\alpha = 1$$

Ответ: $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \right\}; k \in \mathbb{Z}$

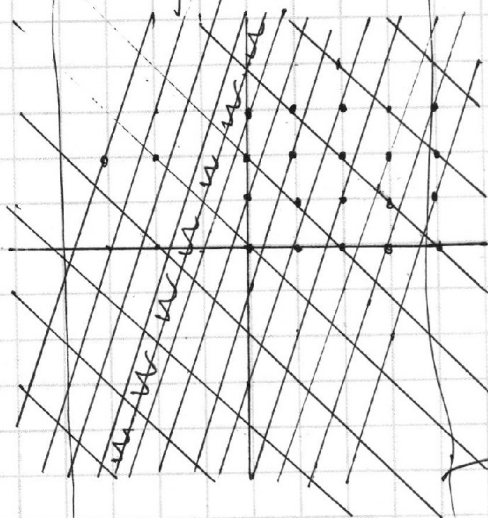


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$(\sin^2 \pi x - \sin^2 \pi y) \sin^2 \pi x = (\cos^2 \pi x + \cos^2 \pi y) \cos^2 \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin^2 \pi y \sin^2 \pi x = \cos^2 \pi x + \cos^2 \pi y \cos^2 \pi x$$

$$- \cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$2\pi x = \pi - \pi x + \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2\pi x = \pi + \pi x - \pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3x = 1 + y + 2k$$

$$x = 1 - y + 2n$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

$$\frac{x}{4} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} < 1 - \frac{y}{9} < \frac{y}{9} + 1$$

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{4} \neq \pi \\ \arccos \frac{y}{9} \neq \pi \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{4} \neq -1 \\ \frac{y}{9} \neq -1 \end{cases} \begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{cases}$$

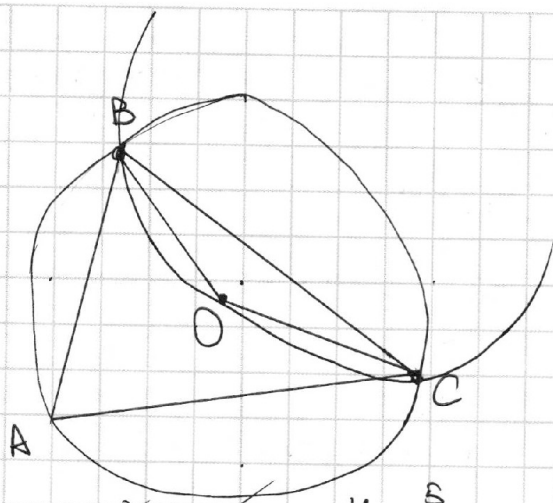


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \alpha = \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^2 + 4^2 - \left(\frac{16}{5}\right)^2}{2 \cdot \frac{16}{5} \cdot 4} = \frac{\frac{16}{5}}{8} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 26 \\ \times 26 \\ \hline 158 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

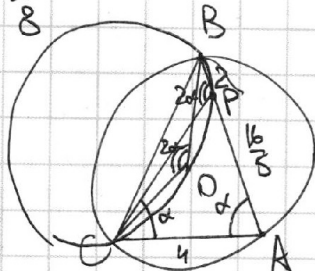
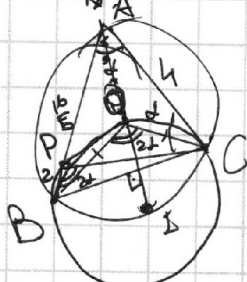
$$\begin{array}{r} 64 \\ - 25 \\ \hline 39 \end{array}$$

$$PC^2 = \frac{256}{25} + 16 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{16}{5} \cdot \cos \alpha$$

$$PC = \sqrt{\frac{676}{25} + 16 - 2 \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 \cdot \cos \alpha}$$

$$BC = \sqrt{4 + PC^2 - 2 \cdot 4 \cdot PC \cdot \cos 2\alpha}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

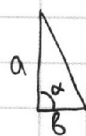


$$CP = \frac{16}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{4^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2 - 4^2}{2 \cdot 4 \cdot \frac{16}{5}} = \frac{\frac{16}{5}}{8} = \frac{2}{5}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{4 \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{\sqrt{21}}{5}}{2} = \frac{32\sqrt{21}}{25}$$



$$S = \frac{ab \sin \alpha}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{4 \cdot \frac{26}{5} \cdot \frac{\sqrt{21}}{5}}{2} = \frac{52\sqrt{21}}{25}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

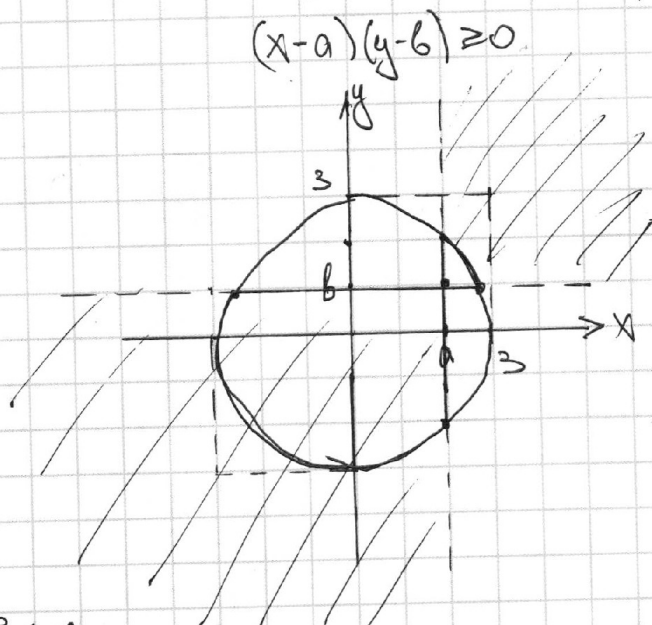
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

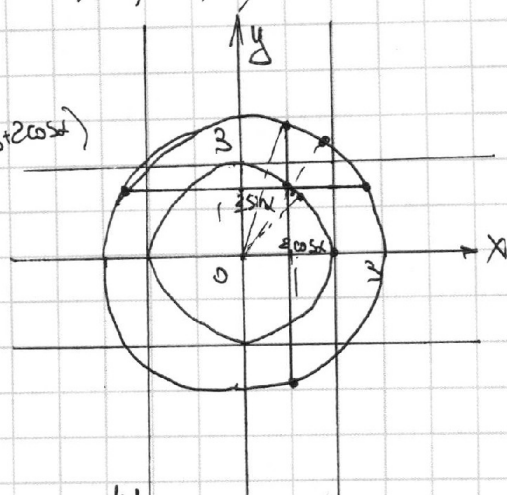
$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$\alpha \in [2\pi]$ $b \in [2\pi]$



$$y^2 + 4\cos^2\alpha \leq 9$$

$$y^2 \leq 9 - 4\cos^2\alpha = (3-2\cos\alpha)(3+2\cos\alpha)$$



$$4\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$72 + 4b - b^2$$

$$b = \frac{41}{2} = 20.5$$

$$\sqrt{72 + 36\sin^2\alpha - 32\sin\alpha - 16\sin^2\alpha} \sqrt{40 + 4\sin^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$$

$$72 + 4b - b^2 = 72 + 4 \cdot 20.5 - (20.5)^2 = 72 + 82 - 420.25 = -266.25$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{45 + 36\sin^2\alpha - 25\sin^2\alpha - 16\sin^2\alpha} \\ & - 16\sin^2\alpha + 16\sin^2\alpha \\ & 4\sin^2\alpha = b \\ & -b^2 + 4b \\ & -\frac{1}{4} = 2 \\ & \sin^2\alpha = \frac{1}{2} \\ & \sin\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\sqrt{5 + 4\sin^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$$

$$\max(\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha})$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

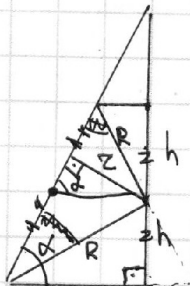
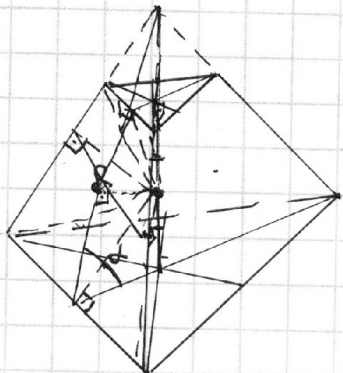
5
☐

6
☐

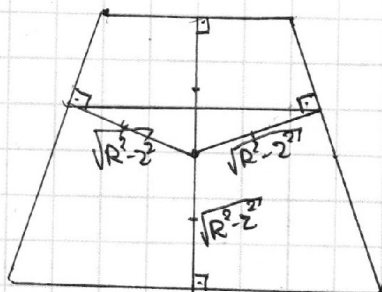
7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{h}{\sin \alpha}$



$$\sqrt{R^2 - z^2} = R \sin \alpha \frac{h}{\sin \alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P = \frac{4}{N}$$

m

$$P_1(\Pi \cap B) = \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$$

$$P_2(\Pi \cap B) = \frac{m}{N} \cdot \frac{(m-1)}{(N-1)}$$

$$\frac{12}{N(N-1)^2} = \frac{4}{N} \cdot \frac{m(m-1)}{N(N-1)}$$

$$24 = 7m(m-1)$$

$$7m^2 - 7m - 24 = 0$$

$$D = 49 + 7 \cdot 96 = 7 \cdot 103$$

$$42 = m(m-1) \quad m^2 - m - 42 = 0$$

$$m = 7$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ \times 8 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$8 \cdot 18 = 144$$

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$2\pi x = \pi - \pi x + \pi y + 2\pi k$$

$$2\pi x = \pi + \pi x - \pi y + 2\pi n$$

$$3x = 1 + y + 2k$$

$$x = 1 - y + 2n$$

$$b) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 18 \\ \times 4 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{4} \in [-1; 1] \\ \frac{y}{9} \in [-1; 1] \\ x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x \in (-4; 4] \\ y \in (-9; 9] \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a$$

$$B = \overline{160}, \overline{610}, \overline{601}$$

$$C = \overline{50}, \overline{05}$$

$$\begin{cases} B = 100 + 10b + c \\ B = 100b + 10 + c \\ B = 100b + 10c + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 50 + d \\ C = 10d + 5 \end{cases}$$

$$1111a \quad 1111 \cdot m^2$$

$$A : B : C = n^2, n \in \mathbb{N}$$

$$C : 11, B : 101$$

$$C = 55, B = 101$$

$$A = 5555$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ - 3333 \\ \hline 4444 \\ - 5555 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ - 11 \\ \hline 1100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ - 33 \\ \hline 68 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 2 \\ \hline 202 \end{array}$$

$$\frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{x^3+y^3} = \frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy =$$

$$= (x-y)(x^2+xy+y^2) - 9xy =$$

$$= 3(x^2+xy+y^2-3xy) =$$

$$= 3(x-y)^2 = 27$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy - 3y + 3x - 9$$

$$3x - 3y - 9 = 0$$

$$x - y = 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi - \pi x + \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pi + \pi x - \pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 1 + y + 2k \\ x = 1 - y + 2n \end{cases}$$

Ответ: $(x; 1 + 3x - 2k); (1 - y + 2n; y); k, n \in \mathbb{Z}; x, y \in \mathbb{R}$

$$b) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

Заметим, что $\arccos \frac{x}{4} \in [0; \pi], \arccos \frac{y}{9} \in [0; \pi]$

$$\begin{cases} \frac{x}{4} \in [-1; 1] \\ \frac{y}{9} \in [-1; 1] \\ \arccos \frac{x}{4} \neq \pi \\ \arccos \frac{y}{9} \neq \pi \end{cases} \quad \begin{cases} x \in [-4; 4] \\ y \in [-9; 9] \\ x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-4; 4] \\ y \in (-9; 9] \end{cases}$$

Построим графики прямых, удов. п.1) $\begin{cases} y = 1 - x + 2n \\ y = 3x - 1 - 2k \end{cases}$

