



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже ~~мотоциклиста~~ ^{велосипедиста}. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab \geq 3^{11} 4^{11} : 3^{11} 4^{11}$$

$$bc \geq 3^{18} 4^{16} : 3^{16} 4^{16}$$

$$ac \geq 3^{21} 4^{38} : 3^{11} 4^{38}$$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac \geq 3^{50} 4^{92} \Rightarrow \text{сечение треугольника } 3, 6, ab^2 c^2$$

$$\geq 11 + 18 + 21 = 50, \Rightarrow \text{в } abc \quad 50 : 2 = 25$$

$$\text{сечение } 3, 4 : \geq 11 + 18 + 38 = 65, \text{ т.е. } ab^2 c^2 - \text{квадрат}$$

$$2 \cdot 65 = 130$$

$$\geq 66$$

$$\Rightarrow \text{в } abc \geq 33$$

$$\text{минимум } abc \text{ равно } 3^{25} 4^{93}$$

$$\text{Пример: } a=25, ab=3^{11} 4^{11}$$

$$bc=3^{18} 4^{16}$$

$$ac=3^{21} 4^{38}$$

$$\text{для поиска } a, b, c \text{ из системы}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=11 \\ a+b=13 \\ a+c=21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=13 \\ a+c=21 \\ a=14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=11 \\ a+b=13 \\ a+c=21 \end{cases}$$

$$b+c=2$$

$$b+c=21$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=11 \\ a+b=13 \\ a+c=21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c=11 \\ a+b=13 \\ a+c=21 \end{cases}$$

$$a=4$$

$$b=7$$

с помощью системы
линейных уравнений

но для сечения 71 достаточно взять $(a+b) + (b+c) > a+c$
(линейное сечение)

$$\Rightarrow \text{т.е. } a+b+c=2 \cdot 25 = 50 \quad (a+c)=48$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

цель $\Rightarrow$ мин. сумма востановленных $9:38$, и с.б. к востан. 38 раз

$$a_1 + b_1 = 20$$

$$b_1 + c_1 = 18$$

$$a_1 + c_1 = 38$$

$$b_1 = 0$$

$$a_1 = 20$$

$$c_1 = 18$$

$$Q = 3^2 \cdot 7^1, a_1 = 3^4 \cdot 7^{20}$$

$$b = 3^4 \cdot 7^0 = 3^4$$

$$c = 3^{14} \cdot 7^{18}$$

$$ab = 3^{11} \cdot 7^{20} : 3^{11} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 3^{18} \cdot 7^{18} : 3^{11} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 3^{21} \cdot 7^{38} : 3^{11} \cdot 7^{18}$$

$$abc = 3^{28} \cdot 7^{38}$$

min min

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



если $a+b \equiv m$

$$a^2 - 2ab + b^2 \equiv m$$

$$a \equiv -b$$

$$a^2 - 4ab \equiv -b^2 + 4ab$$

$$a^2 - 4ab = a(a-4b) = 9a^2$$

$$a(a-4b) \equiv b(4a-b) \quad -b^2 + 4ab = b(4a-b) \equiv -3b^2$$

$$9a \equiv$$

$$\frac{a+b}{m-b^2} = 10ab$$

$$9a^2 \equiv -3b^2$$

$$a^2 \equiv b^2$$

6

если $a+b \equiv m$

$$a^2 - 2ab + b^2 \equiv m$$

$$\Rightarrow a \equiv -b$$

$$a^2 - 4ab \equiv 4ab - b^2$$

$$a^2 - 4ab \equiv 4ab - b^2$$

$$9a^2 \equiv -3b^2$$

$$n.c. \quad a \equiv -b$$

$$a, b \text{ взаимно просты}$$

$$a^2 \equiv b^2$$

$$\Rightarrow \text{если } a \equiv b, \quad 9a^2 \equiv -3b^2$$

если $a+b \equiv m$

тогда $a \equiv -b$

если $m \equiv 0$

$$a^2 \equiv b^2$$

$$a \equiv b$$

$$a \equiv b$$

$$9a^2 \equiv -3a^2$$

$$10a^2 \equiv 0$$

$$10a^2 \equiv m$$

если a^2 и m по 2 делятся.

a и m не 2 делятся. $\Rightarrow a$ делит m

$a \equiv b \equiv m$ b не делит m

$\Rightarrow$ тогда a, b по 2 делятся $\Rightarrow$

$$a^2 \equiv b^2 \equiv m \Rightarrow 10 \equiv m$$

если $a+b \equiv m$ $m \equiv 10$

если $a=3, b=7$

$$\frac{10}{9+49-168} = \frac{10}{-110} = -\frac{1}{11}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$a = 2x^2 - 3x + 4$$

$$b = 2x^2 + x + 3$$

$$a - b = 1 - 4x \Rightarrow$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

найдем min параболы $2x^2 - 3x + 4$

$$x_0 = \frac{3}{4}, y_0 = 2 \cdot \frac{9}{16} - \frac{9}{4} + 4 = \frac{18}{16} - \frac{36}{16} + 4 = \frac{46}{16}$$

найдем min параболы $2x^2 + x + 3$

$$x_0 = -\frac{1}{4}, y_0 = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} + 3 = 3 - \frac{2}{16}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\Rightarrow a - \sqrt{a} = b - \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) = \sqrt{b}(\sqrt{b} - 1)$$

причем $a \neq b, a > b,$

$$\Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b} > 0$$

$$\sqrt{a} - 1 > 0, \text{ т.е. } a > 1 \text{ (min}(2x^2 - 3x + 4) > 1)$$

$$\text{и } \sqrt{a} - 1 > \sqrt{b} - 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}_{>0} > \underbrace{\sqrt{b}(\sqrt{b} - 1)}_{>0}$$

при $b > a$ все аналогично

$$\Rightarrow a = b \Rightarrow 1 - 4x = 0,$$

$$x = \frac{1}{4}$$

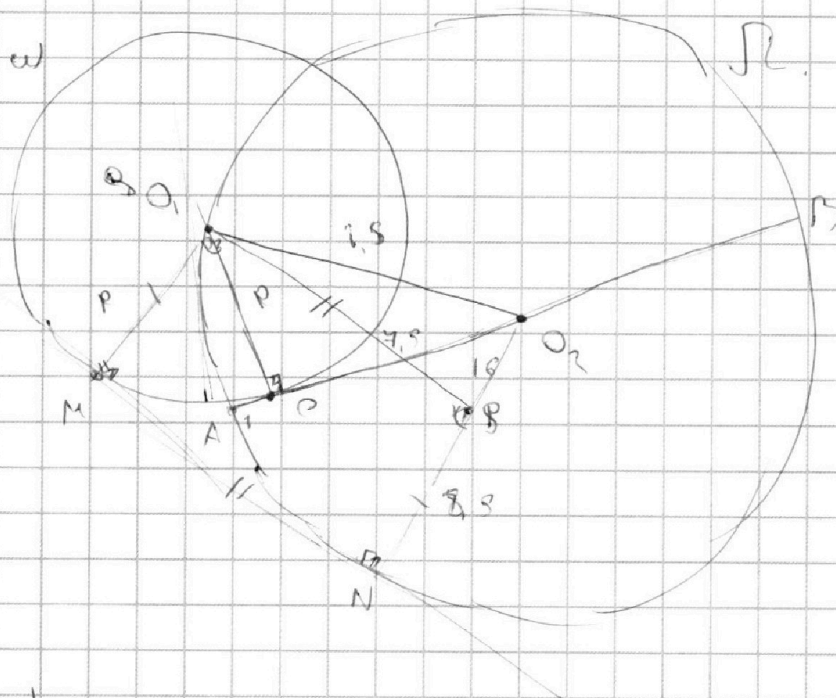
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 1$$

$$BC = 16$$

$$\Rightarrow AB = 17$$

$$\Rightarrow O_2A = O_2B = \frac{AB}{2} = 8.5$$

$$\Rightarrow O_2C = 7.5$$

$$O_1O_2 = \text{расст.} = 3.5$$

расстояние между центрами: M и N

$$\text{по теор. Пифагора: } O_1O_2 = \sqrt{R^2 + 7.5^2} = \sqrt{3.5^2 + 7.5^2}$$

$$\Rightarrow R^2 = (8.5 - 7.5)(8.5 + 7.5) = 16 \Rightarrow R = 4$$

Оценки из O_1 перпенд. на O_2N , тогда $O_1S = MN$ - (прямая теорема)

$$\Rightarrow O_1O_2 = 3.5, O_1S = 3.5 - R = 3.5 - 4 = -0.5$$

$$\Rightarrow \text{по теор. Пифагора: } O_1S = \sqrt{O_1O_2^2 - 0.5^2} = \sqrt{3.5^2 - 0.5^2}$$

$$= \sqrt{11.25 - 0.25} = \sqrt{11} = \sqrt{11}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$N = 95$

Заметим, что если x, y, z — решение

$x', y', z' = kx, ky, kz$, ~~тогда~~ все равенства не изменятся,

т.е. $3kx + 2ky = kz$, если $3x + 2y = z$

$$\text{и } \frac{3}{kx} + \frac{2}{ky} = \frac{2}{kz} \Rightarrow \frac{3ky + 2kx}{k^2(xy)} = \frac{2}{kz} \Rightarrow \frac{3y + 2x}{kxy} = \frac{2}{z}$$

$$\text{если } \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{2}{z}$$

$$\text{а } \frac{3k^3x^3 - 4k^3y^3 - k^3z^3}{k^3x^3 - 6k^3y^3} = \frac{3x^3 - 4y^3 - z^3}{x^3 - 6y^3} \Rightarrow \text{при сокращении}$$

всех трех переменных на k , ~~тогда~~ не меняется $\Rightarrow$

БЖЖ, докажем max, что $z = 1$

$$3x + 2y = 1 \quad \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 2$$

$$y = \frac{1-3x}{2} \Rightarrow \frac{3}{x} + \frac{4}{1-3x} = 2 \quad | \cdot x(1-3x)$$

$$3(1-3x) + 2x = 2(1-3x)x$$

$$3 - 9x + 2x = 2x - 6x^2$$

$$8x^2 - 9x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$(x-1)(2x-1) = 0$$

$$\begin{aligned} x &= 1 & x &= 0,5 \\ (y=0, z=1) & (x=0,5, y=-1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^3 - 4y^3 - z^3}{x^3 - 6y^3}$$

$$= \frac{3-1}{1} = 2$$

$$\frac{3x^3 - 4y^3 - z^3}{x^3 - 6y^3}$$

$$= \frac{3-4-1}{1-6} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} (x+y+z) &= 1 \\ 2) x &= 0,5 \quad z = 1 \Rightarrow y = -0,5 \end{aligned}$$

$$\frac{3x^3 - 4y^3 - z^3}{x^3 - 6y^3} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4} - 1}{\frac{1}{4} - \frac{6}{16}} = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ получим наименьшее значение $= \frac{2}{5}$
для вопроса $\Rightarrow$ (max = 4)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть V_1 - скорость велосипедиста (км/ч)

V_2 - скорость мотоциклиста (км/ч)

L - расстояние

$$\Rightarrow \frac{L}{V_1} - \frac{L}{V_2} = 2 \quad (1 \text{ час}) \quad | \cdot V_1 \cdot V_2 \quad L - \frac{V_1}{V_2} L = 2V_1$$

$$V_2 \frac{L}{V_1} - V_1 \frac{L}{V_2} = 96 \quad (2 \text{ часа})$$

$$L \frac{V_2}{V_1} - L = 2V_2 \quad (2)$$

$$\frac{L}{V_1+6} - \frac{L}{V_2+6} = 1,75 \quad (3 \text{ часа})$$

$$L \frac{V_2}{V_1} - L \frac{V_1}{V_2} = 2(V_1+V_2) = 96$$

$$\Rightarrow V_1+V_2=48$$

$$\Rightarrow V_2=48-V_1$$

$$\frac{\frac{L}{V_1} - \frac{L}{48-V_1}}{\frac{L}{V_1+6} - \frac{L}{54-V_1}} = \frac{2}{1,75} = \frac{8}{5}$$

$$5 \cdot 54 - 2 \cdot 7$$

$$\frac{\frac{48-V_1}{V_1} - \frac{48-V_1}{54-V_1}}{\frac{48-V_1}{V_1+6} - \frac{48-V_1}{54-V_1}} = \frac{8}{5}$$

м.ф.
 $V_1 \neq 24$
(если бы, то бы в
разбеге и

$$\frac{L}{V_1} = \frac{L}{V_2} = 0$$

$$(V_1+6)(54-V_1) \cdot 5 = V_1(48-V_1) \cdot 8$$

$$5(43V_1 + 224 - V_1^2) = (48V_1 - V_1^2) \cdot 8$$

$$240V_1 + 1120 - 5V_1^2 = 384V_1 - 8V_1^2$$

$$3V_1^2 - 144V_1 + 1120 = 0$$

$$V_1^2 - 48V_1 + 540 = 0$$

$$(V_1-30)(V_1-18) = 0$$

$$\text{но } V_1 < 24, \text{ и } 0, V_1 < V_2$$

$$\Rightarrow V_1 = 18$$

$$\Rightarrow \frac{L}{18} - \frac{L}{30} = 2 \quad | \cdot 540$$

$$30L - 18L = 540 \cdot 2 \quad 1080$$

$$12L = 540 \cdot 2 \quad 1080$$

$$\Rightarrow L = \frac{540 \cdot 2}{12} = 90 \text{ км}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N-5

пусть v_1 - скорость велосипедиста (км/ч)

v_2 - скорость лыжника (км/ч)

L - расстояние (км)

$$\frac{L}{v_1} - \frac{L}{v_2} = 2 \quad (\text{из условия})$$

$$\frac{L}{v_2} \cdot v_1 = \frac{L}{v_1} \cdot v_2 \Rightarrow v_2 + 8 = v_1 + 8 \quad \text{или} \quad v_2 = v_1$$

$$\Rightarrow \frac{v_2 L}{v_1} - \frac{v_1 L}{v_2} = 96$$

$$\frac{L}{v_1 + 8} - \frac{L}{v_2 + 8} = 1,25 \quad (\text{из условия})$$

$$\begin{cases} \frac{v_2 L}{v_1} - \frac{v_1 L}{v_2} = 96 \\ \frac{L}{v_1} - \frac{L}{v_2} = 2 \\ \frac{L}{v_1 + 8} - \frac{L}{v_2 + 8} = 1,25 \end{cases}$$

$$\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} = \frac{2}{L}$$

$$\frac{1}{v_1 + 8} - \frac{1}{v_2 + 8} = \frac{1,25}{L}$$

$$\frac{5v_2 - 5v_1}{8v_1v_2} = \frac{3v_2 - 3v_1}{(v_1 + 8)(v_2 + 8)}$$

$$\begin{aligned} L - \frac{L v_1}{v_2} &= 2 v_1 \quad (1) \\ \frac{L v_2}{v_1} - L &= 2 v_2 \\ \frac{L v_2}{v_1} - \frac{L v_1}{v_1} &= 2(v_1 + v_2) \\ \Rightarrow v_1 + v_2 &= 48 \quad \boxed{v_1 + v_2 = 48} \end{aligned}$$

$$v_2 = 48 - v_1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1} - \frac{1}{48 - v_1} &= \frac{2}{L} \\ \frac{L}{v_1 + 8} - \frac{L}{54 - v_1} &= 1,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1} - \frac{1}{48 - v_1} &= \frac{2}{L} \\ \frac{1}{v_1 + 8} - \frac{1}{54 - v_1} &= \frac{1,25}{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{48 - 2v_1}{v_1(48 - v_1)} &= \frac{2}{L} \\ \frac{48 - 2v_1}{v_1(48 - v_1)} &= \frac{1,25}{L} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1. $3x + 2y = 2$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3x+2y}$$

мен ($\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y}$)

3

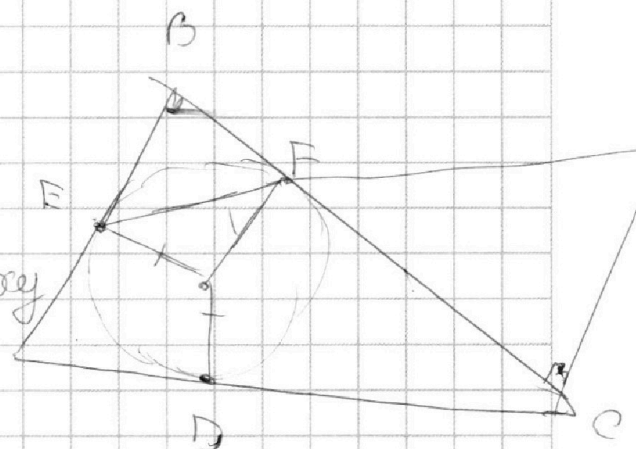
$$z^2 = (3x + 2y)^2$$

$$3x^2 + 4y^2 - (3x + 2y)^2$$

$$= 3x^2 + 4y^2 - 9x^2 - 12xy - 4y^2 = -6x^2 - 12xy - 8y^2$$

$$= -2(3x^2 + 6xy + 4y^2)$$

$$= -2(3x + 2y)^2$$



$$\frac{3y+x}{xy} = \frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow z = \frac{2xy}{3y+x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



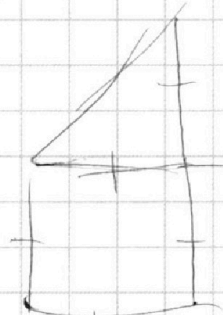
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x + 2y = 2$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}-1} = \frac{2}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$



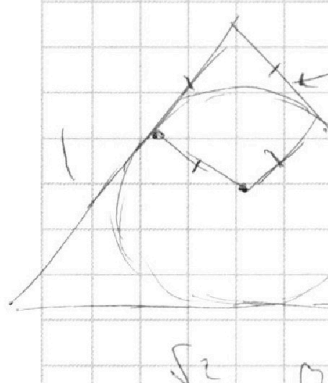
$$2\sqrt{2}$$

$$\frac{2\sqrt{2}-2}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

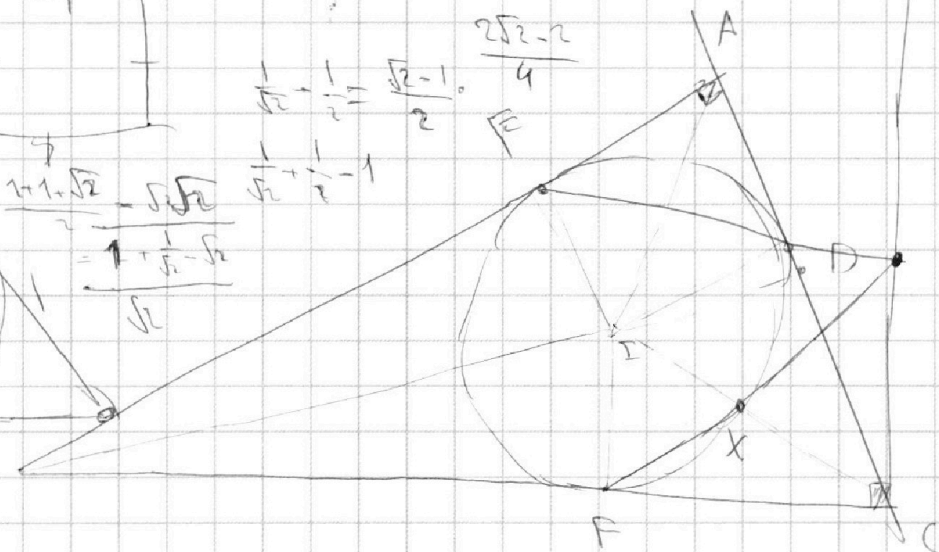
$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - 1$$

$$\frac{1+1\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$



$$\sqrt{2}$$

B



$$360 - 135 - 90 - \theta$$

$$= 135 - \theta$$

$$\frac{EX}{x\sqrt{2}} = \frac{DF}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

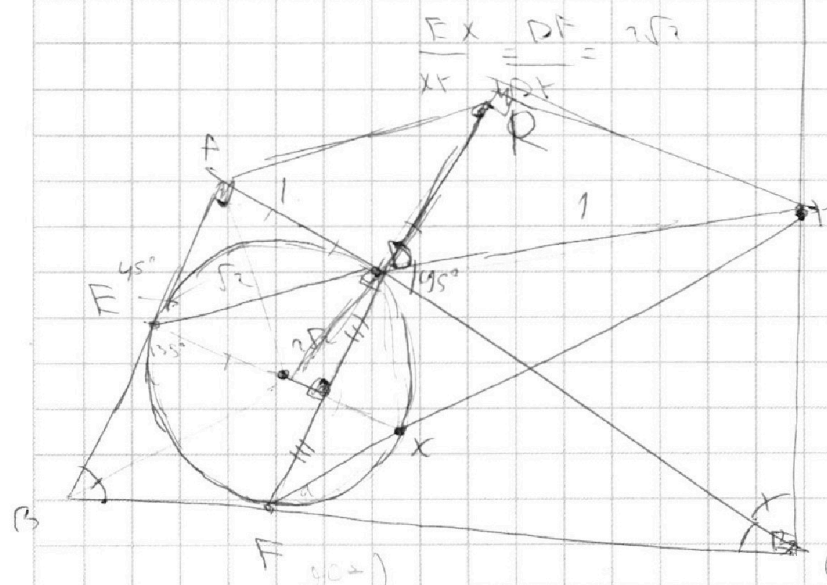
$$EX = 2\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2}$$

$$\frac{DX}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{CF}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2} CF$$

$$DX = \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sqrt{2} CF$$

$$\frac{2\sqrt{2} DF}{2\sqrt{2}} = \frac{2 DF}{2\sqrt{2}} = \sin \frac{\theta}{2} \cdot CF$$

$$DF = \sin \frac{\theta}{2} \cdot CF$$



$$\frac{1}{2} = 90 - (90 - \theta)$$

$$= 45 - \frac{\theta}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x + 2y = z$$
$$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{z}{z}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{3x^2 - 6xy}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{z}$$

$$2xy = z - 3x = \frac{k(z-y)}{k'x+y} \quad \frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{17}{2}$$

$$4y' = (z - 3x)^2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$x^2 + \frac{z}{2}(z - 3x)^2$$

$$z = \frac{2xy}{3x+y} = 3x+2y$$

$$2xy = (3x+2y)(3x+2y)$$

$$2xy = 9x^2 + 4y^2 + 6xy + 3xy$$

$$9x^2 + 4y^2 - 4xy = 0$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{z} - \frac{3}{x}$$

$$y = \frac{xz}{2x-3z}$$

$$\begin{cases} 3x+2y=1 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 2 \end{cases}$$

$$2xy = \frac{1-3x}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{1-3x} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(1-3x) + 2x = 2 & 6 > 0 \quad (1-3x) \\ 3 - 9x + 2x = 2 & 5x - 6x^2 \\ 6x^2 - 9x + 3 = 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$(y-2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper:

$$\frac{48-12}{2} = 18$$

$$\frac{48+12}{2} = 30$$

$$9 - 8 \cdot 9 + 9 = -6 \cdot 9$$

$$3+3:6$$

$$5-71:9 = -54:3$$

$$5+2:7$$

$$75-40:4 = -15$$

$$6+4=10$$

$$36-30+6 = 6$$

$$36 - a^2 - 4ab = b^2$$

$$a(a-4b) = b(4a-b)$$

$$= 4a$$

$$sa^2 = -sb^2$$

$$s = -s$$

$$\Rightarrow m = s$$

$$1-4x = a$$

$$16x^2 - 312x + 16$$

$$(1-4x)(16-4x)$$

$$48 \pm \sqrt{48^2 - 540 \cdot 48}$$

$$v_1 = 48 \pm \sqrt{48^2 - 540 \cdot 48}$$

$$2 \sqrt{(2x^2 - 3x + 4)(2x^2 + 3x + 3)}$$

$$36^2 - 8 \cdot 6 \cdot 4 + 16$$

$$36 - 4$$

$$32 - 192 =$$

$$2x^2 - 45$$

$$(1-4x)^2 = 1620$$

$$1+16x^2 = 8x \quad | :3$$

$$540 = 3 \cdot 2^2 \cdot 5$$

$$5 \cdot 3 = 15$$

$$\frac{1}{3} - 2x + 2x^2$$

$$(1-4x)(3-2x)$$

$$16x^2 - 480x + 540$$

$$16x^2 - 480x + 24$$

$$540 = 27 \cdot 20$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1 \rightarrow 213 \quad 1 + 13 \cdot 1 = 8 \cdot 3$$

$$\frac{1}{2} + 2x^2 - x = a^2$$

$$a^2 - 2x + \sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \quad \text{или}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad \text{при } a \neq b$$

$$3x + 2y = z$$

$$\frac{3}{2x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$a - \sqrt{a} - b - \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a}(\sqrt{a}-1) = \sqrt{b}(\sqrt{b}-1)$$

$$\text{при } a > b$$

$$\sqrt{b} > \sqrt{a}$$

$$-13$$

$$-12$$

$$2x^2 - 3x + 4$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$y_0 = 2 \cdot \frac{9}{16} - \frac{9}{4} + 4$$

$$= \frac{13}{16} - \frac{9}{4} + 4$$

$$2x^2 + x + 3$$

$$\text{при } x = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{S(48-x) - 5x}{x(48-x)}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{(48-x)} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{1}{x+6} - \frac{1}{54-x} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{S(48-x) - 5x}{x(48-x)} = \frac{S(54-x) - 8x}{(x+6)(54-x)}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{48-x} = \frac{8}{5}$$
$$= 48 - x - x$$
$$48 - 2x = 8x$$
$$48 = 10x$$
$$x = 4.8$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{48-x} = \frac{8}{5}$$
$$= 48 - x - x$$
$$48 - 2x = 8x$$
$$48 = 10x$$
$$x = 4.8$$

$$\frac{L V_2 - L}{V_2} = 2 V_2 S V$$
$$\frac{L V_2}{V_2} - \frac{L}{V_2} = 2 V_2 S V$$
$$L - \frac{L}{V_2} = 2 V_2 S V$$

$$V_1 + V_2 = 48$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{(48-x)} = \frac{8}{5}$$
$$= \frac{8}{5}$$