



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



9 КЛАСС. Вариант 13

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x.$$

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
- [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x + 2y = z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$.

- [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклистику на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
- [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = 2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим числа.

степени вхождения

3 и 4 находим в
соств. k_1, k_2, k_3

оставшиеся множители

a, b, c соотв. они ≤ 3 и ≤ 4 .
тогда должны быть $a \neq c$

через 6 используях условий

$$b = 3^{\alpha} \cdot 4^{\beta} \cdot k_1$$

$$a = 3^{\alpha+3} \cdot 4^{\beta+2} \cdot k_2$$

$$c = 3^{\alpha+4} \cdot 4^{\beta+5} \cdot k_3$$

$$ab : 3^{\alpha+4} \cdot 4^{\beta+4}$$

$$k_1, k_2, k_3 \geq 1 \in \mathbb{Z}$$

$$bc : 3^{\alpha+16} \cdot 4^{16}$$

$$ac : 3^{\alpha+21} \cdot 4^{38}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \alpha, \beta \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+3 \geq 11 \\ 2\beta+7 \geq 18 \end{cases} \quad \alpha \geq 4$$

$$\begin{cases} 2\alpha+10 \geq 21 \\ 2\beta+10 \geq 21 \end{cases} \quad (\alpha \geq 6)$$

$$\begin{cases} 2\alpha+27 \geq 38 \\ 2\beta+5 \geq 16 \end{cases} \quad (\beta \geq 6)$$

$$\begin{cases} 2\alpha+7 \geq 18 \\ 2\beta+5 \geq 16 \end{cases} \quad \alpha \geq 6, \beta \geq 6$$

$$abc \geq 3^{(3 \cdot 6 + 10)} \cdot 4^{(3 \cdot 6 + 27)}$$

Ответ: минимальное значение $3^{28} \cdot 4^{45}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

б) $a+b$ однозначно

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 10ab}$$

$$M \text{D} \frac{a+b}{m} = M \text{D} a+b \text{ и } 5ab$$

или.

принимая a и b взаимно простые

$\Rightarrow a+b$ и $5ab$ взаимно

простые $\Rightarrow m \leq 5$

исключимые $m=5$

пример $a=2, b=3$

В случае если $a=b=1, m=2, 2 \leq 5$

Однако: нет макс. $m=3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

13) прошу помочь

всё корректно

$$2(4x-1)\sqrt{2x^2+x+3} \leq 4x(4x-1)$$

возвести под корень

$$\sqrt{2x^2+x+3} = 2x \quad |^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{1}{4} \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2+x+3 = 4x^2 \\ x \leq \frac{1}{4} \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - x - 3 = 0 \\ x \leq \frac{1}{4} \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$\cancel{\frac{1+5}{4} > \frac{1}{4}}$$

$$-1 < 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Ответ: 1/4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} = 1 - 4x + \sqrt{2x^2 + x + 3}$$

$\begin{matrix} D \leq 0 \\ D < 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} D \leq 0 \\ D > 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow \text{ выражение} > 0$ $\Rightarrow \text{ выражение} > 0$

$$1 - 4x + \sqrt{2x^2 + x + 3} \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2 + x + 3} \geq 4x - 1$$

$$4x - 1 \leq 0$$

$$\begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ \text{возведем в квадрат} \\ 2x^2 + x + 3 \geq 16x^2 + 1 - 8x \end{cases}$$

$$0 \geq 14x^2 - 9x - 2$$

$$D = 81 - 4 \cdot 28$$

$$D < 0$$

$$\text{бук} > 0$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{1}{4} \quad \text{Возьмем в квадрат уравнение}$$

и ср

$$2x^2 - 3x + 4 = 2x^2 + x + 3 + x + 16x^2 - 8x - 2\sqrt{2x^2 + x + 3} - (4x - 1)$$

$$2\sqrt{2x^2 + x + 3} \cdot (4x - 1) = 16x^2 - 4x$$

$$2(4x - 1)\sqrt{2x^2 + x + 3} = 4x(4x - 1)$$

$x = \frac{1}{4}$ Одно из корней
теперь рассмотрим случайный
здесь $4x - 1 \neq 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1a) *предположение*

Проведем общую ходоизмененную. она касается с и Ω

в точках D и E соответ.

$O_1D \perp DE$ $O_2E \perp DE$ из O_1

отсюда высоту OH на DE

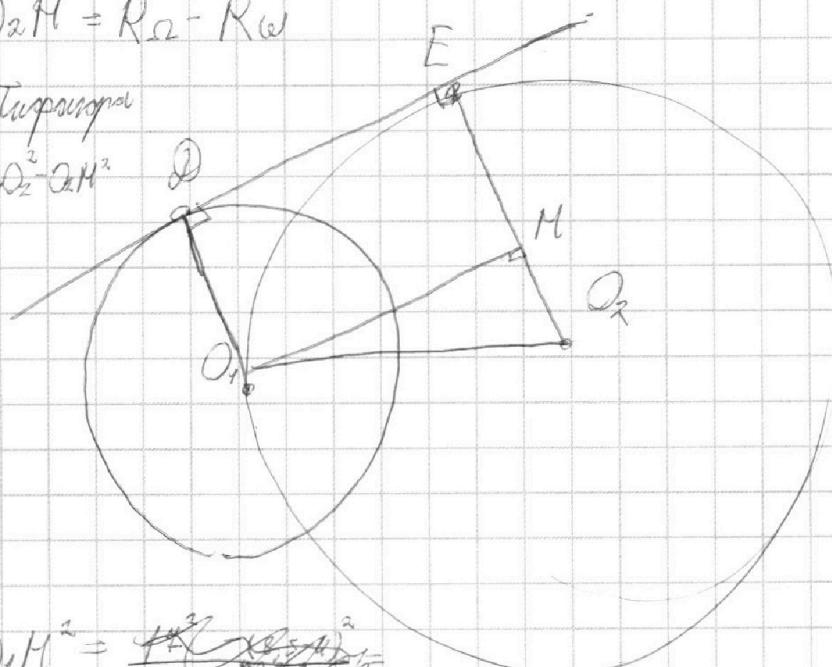
$\triangle O_1HE$ - прямоугольник $\Rightarrow O_1H = DE$

$$O_1O_2 = R_\Omega$$

$$O_2H = R_\Omega - R_\omega$$

из м. Пифагора

$$O_1H^2 = O_1O_2^2 - O_2H^2$$



$$O_1H^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$

4 13

$$= \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} = \sqrt{4(8,5 - 4,5)(8,5 + 4,5)}$$

$$O_1H = \sqrt{13}$$

$$\text{Омкем: } \sqrt{13}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим угловую скорость за ω $\Omega_{\alpha} = 17$

известны ω и Ω_2 за Ω_1 и Ω_2 сконс

Решаемши ω за R_w и R_{α}

составь уравн

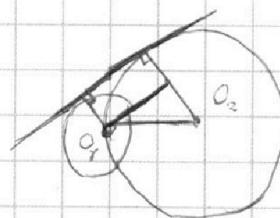
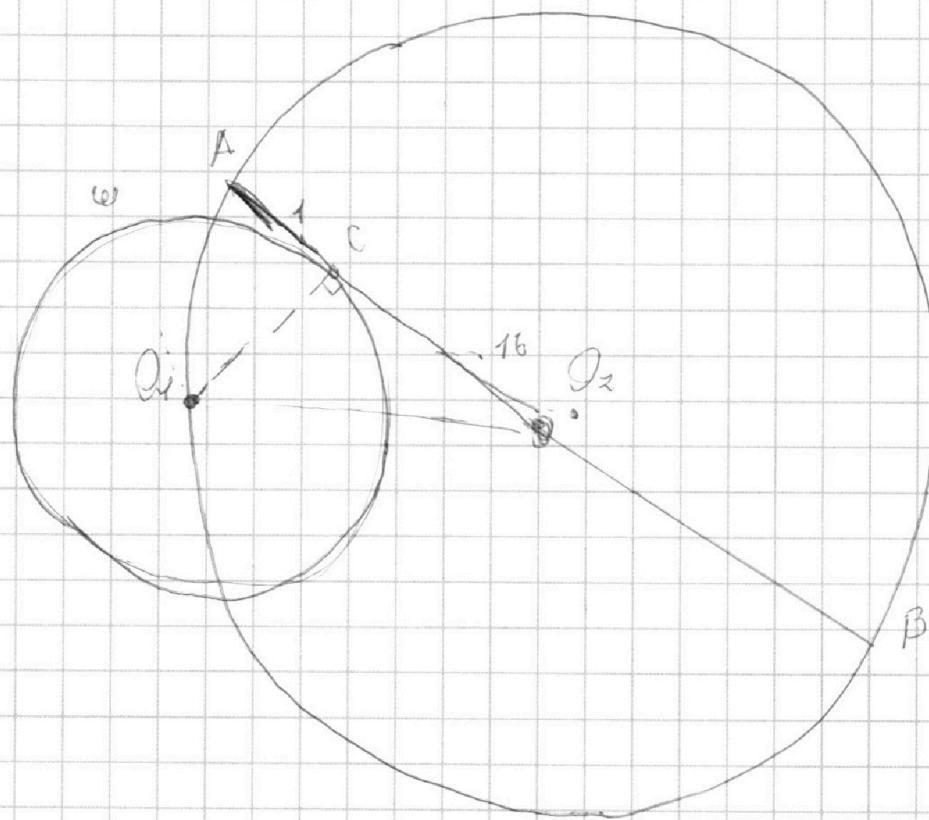
и

$$\Omega_1 R_{\alpha} = 8,5$$

$$\Omega_2 C = 4,5$$

$$R_w = \Omega_1 C \text{ из Таблицы } \Omega_1 C = \frac{17^{\circ} - 15^{\circ}}{4}$$

$$\Omega_1 C = 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

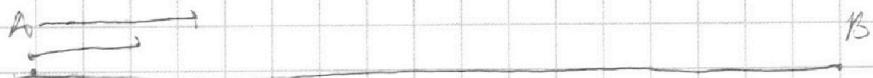


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

No



Сл. движущимся u $v \neq 0$ $v > u$
направлением v
Быстроходное сплав $B - L$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{u} = \frac{L}{v} + \frac{L}{u+v} \\ 96 \text{ km} \cdot \frac{L}{v} = \frac{V L}{u} \\ \frac{L}{V+6 \text{ km/h}} + \frac{5}{4} \text{ h} = \frac{L}{u+6 \text{ km/h}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{L(v-u)}{uv} = \\ 96 \text{ km} \cdot \frac{V^2 - u^2}{uv} + \\ 96 \text{ km/h} = V + u \\ \frac{5}{4} \text{ h} = \frac{L(V-u)}{(V+6 \text{ km/h})(u+6 \text{ km/h})} \end{array}$$

$$\frac{(V+6 \text{ km/h})(u+6 \text{ km/h})}{uv} = \frac{8}{5}$$

$$5uV + 30 \text{ km/h} \cdot u + 30 \text{ km/h} \cdot V + 180 \text{ km}^2/\text{h}^2 = 8uv$$

$$180 \text{ km}^2/\text{h}^2 + 30 \text{ km/h} \cdot u = V(3u - 30 \text{ km/h})$$

$$V = \frac{180 \text{ km}^2/\text{h}^2 + 30 \text{ km/h} \cdot u}{3u - 30 \text{ km/h}}$$

$$u + V = 48 \text{ km/h}$$

$$48 \text{ km/h} = \frac{30 \text{ km/h} \cdot u + 180 \text{ km}^2/\text{h}^2 + 3u^2 - 30 \text{ km/h} \cdot u}{3u - 30 \text{ km/h}}$$

$$144 \text{ km/h} \cdot u - 1440 \text{ km}^2/\text{h}^2 = 180 \text{ km}^2/\text{h}^2 + 3u^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ продолжение

$$3U^2 - 194 \text{ км}/\text{ч} \cdot U + 1620 \text{ км}^2/\text{ч}^2 = 0 : 3$$

$$U^2 - 64.7 \text{ км}/\text{ч} \cdot U + 540 \text{ км}^2/\text{ч}^2 = 0$$

$$U = \frac{64.7 \text{ км}/\text{ч} \pm \sqrt{194 \text{ км}^2/\text{ч}^2}}{2}$$

$$U < V \Rightarrow U = 18 \text{ км}/\text{ч} \Rightarrow V = 30 \text{ км}/\text{ч}$$

$$\frac{L}{u} = \frac{L}{V} + 2t$$

$$L = \frac{2t(V+u)}{V-u} = \frac{2t \cdot 540 \text{ км}^2/\text{ч}^2}{12 \text{ км}/\text{ч}} = 90 \text{ км}$$

Ответ: 90 км

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

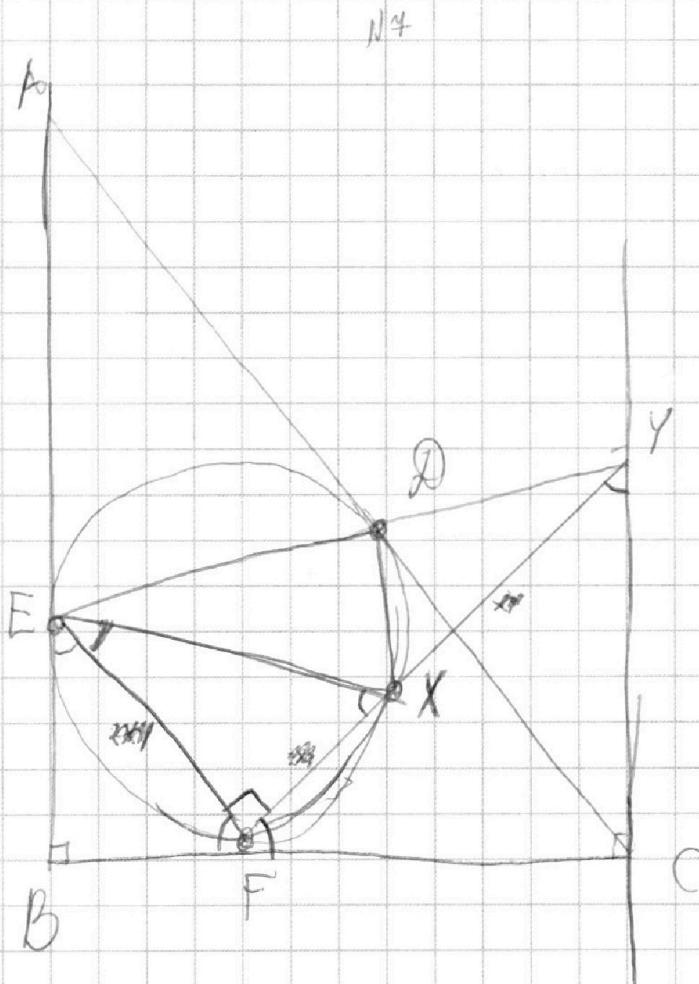
6

7

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle ADE = \angle YDC \quad YC \parallel AE \Rightarrow \angle YC = \angle ADE$$

$\triangle AED$ - равноделенный $\Rightarrow \angle YDC$ равноделенный $\angle DCF$ равноделенный по той же причине что и $\angle AED$ $\Rightarrow YC = DC = CF \Rightarrow$
 $\angle YCF$ - равноделенный \Rightarrow угол при основании $= 45^\circ$

как $\angle EBF = 90^\circ \Rightarrow EX$ диаметр вписанной окружности

$\angle XEF = \angle XFC = 45^\circ$ ("вертикальные") $\Rightarrow EX \parallel BC$

и $\angle EXF = 45^\circ$ $\triangle AED$ и $\triangle CYD$ $\not\cong$ подобны по первому признаку подобия
 $\Rightarrow \frac{ED}{YD} = \frac{AD}{DC}$ из теоремы о двух сечущих $\angle YDX$ и $\angle YFE$ подобны



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

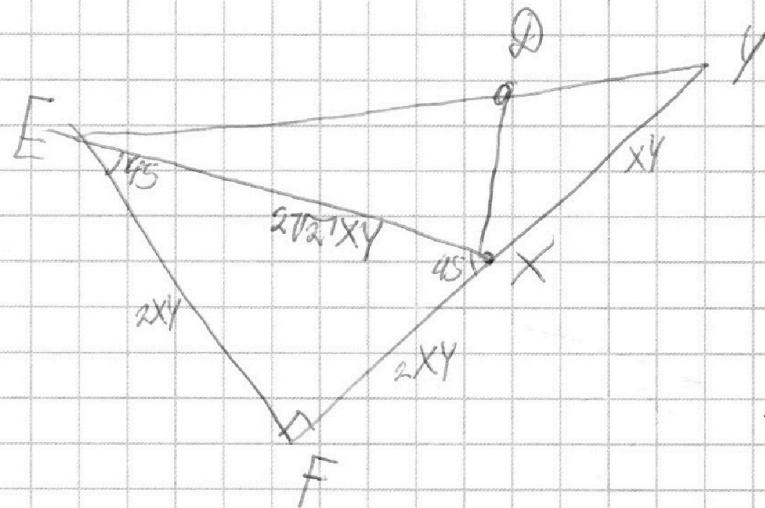
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 продолжение

$$EF = FX = 2XY$$

$$\text{из теор. Тириона } EY = \sqrt{13}XY$$



из подобия

$$\frac{DY}{XY} = \frac{XY}{\sqrt{13}XY}$$

$$DY = \frac{3}{\sqrt{13}}XY$$

$$\frac{ED}{DY} = \frac{\sqrt{13}XY - \frac{3}{\sqrt{13}}XY}{\frac{3}{\sqrt{13}}XY} = \frac{10}{3}$$

Объем: 10 : 3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \pi r^2$$

$$YD \cdot FD = YX^e F$$

40

3

$$3x+2y = z$$

ED
DV

$$\frac{10}{113} \times y$$



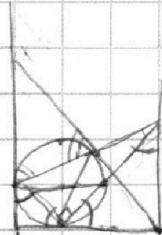
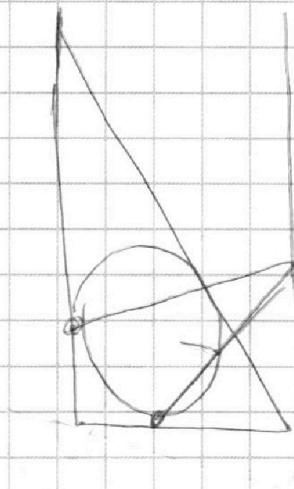
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{3x+8y}{xy} = 2$$

$$3x^2 + 8xy + 8y^2 - 2xy = 0$$

$$-6x^2 - 12xy = 0$$

$$-6x(x+2y) = 0$$

$$(3x+8y)\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right) = 2$$

$$9 + 6\frac{y}{x} + 3\frac{x}{y} + 8 = 2$$

$$9 + \frac{2y}{x} + \frac{x}{y} = 0$$

$$\frac{2y^2 + x^2}{xy} = -9$$

$$\begin{array}{r} 540 \\ 98 \sqrt[3]{55} \\ \hline 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1620 \\ 15 \sqrt[3]{12} \\ \hline 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1620 \\ 15 \sqrt[3]{540} \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 48 \\ \times 48 \\ \hline 384 \\ 102 \\ \hline 2304 \\ -2160 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 570 \\ \times 4 \\ \hline 2160 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 ab &:: 3^{\text{н}} \cdot 4^{\text{н}} \\
 bc &:: 3^{\text{н}} \cdot 4^{\text{н}} \\
 ac &:: 3^{\text{н}} \cdot 4^{\text{н}} \quad \text{степень} \\
 \text{степень } 3 &\text{ на } b \text{ с на } 7 \text{ сколько степени } 6 \\
 4 &\text{ на } 5 \\
 \text{степень } 3 &\text{ на } a \text{ на } 3 > b \\
 4 &\text{ на } a \text{ на } 22 > b \\
 ab &:: k_1 \cdot 3^3 \cdot 4^{22} = a \quad ab :: 3^{\text{н}} \\
 ac &:: k_2 \cdot 3^5 \cdot 4^5 = c \quad \rightarrow b \quad ab :: 4^{22} \\
 c &> a > b \geq 1 \\
 ab &= b^2 \cdot k_1 \cdot 3^3 \cdot 4^{22} \Rightarrow b^2 \cdot k_1 :: 3^4 \\
 c &= 3^4 \cdot 4^5 \cdot k_2 \cdot 4^{22} \cdot 3^3 \cdot k_1 \cdot b - k_2 \cdot k_1 \cdot b \cdot 3^3 \\
 abc &= k_1 \cdot k_2 \cdot b^2 \cdot 3^3 \cdot 4^{13} \cdot 4^8
 \end{aligned}$$