



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим числа.

степени входящих

3 и 7 назовем α и β
соотв. k_1, k_2, k_3

оставшиеся множители

a, b, c соотв. $3^{\alpha} 7^{\beta}$

тогда запишем a, b, c

через α и β используя условия

$$b = 3^{\alpha} 7^{\beta}$$

$$a = 3^{\alpha+3} 7^{\beta+2} = 3^{\alpha+1} 7^{\beta+1} \cdot 3^2 \cdot 7^1$$

$$c = 3^{\alpha+1} 7^{\beta+5} = 3^{\alpha+1} 7^{\beta+1} \cdot 7^4$$

$$k_1, k_2, k_3 \geq 1 \in \mathbb{Z}$$

$$bc = 3^{16} 7^{16}$$

$$ac = 3^{21} 7^{38}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \alpha, \beta \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3 \geq 11 & \alpha \geq 4 \\ 2\alpha + 10 \geq 21 & \alpha \geq 6 \\ 2\beta + 2 \geq 38 & \beta \geq 6 \\ 2\alpha + 7 \geq 18 & \alpha \geq 6 \\ 2\beta + 5 \geq 16 & \beta \geq 6 \end{cases}$$

$$abc \geq 3^{(3+6+10)} \cdot 7^{(2+16+27)}$$

Ответ: наименьшее значение $3^{28} \cdot 7^{45}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a и b одновременно

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-10ab}$$

$\text{НОД}_{\text{н.ч.}}(a+b \text{ и } 10ab) = m = \text{НОД}(a+b \text{ и } 5ab)$
причем a и b взаимнопросты
 $\Rightarrow a+b$ и ab взаимно
просты $\Rightarrow m \leq 5$
максимальное $m=5$
пример $a=2$ $b=3$

В случае если $a=b=1$ $m=2$ $2 < 5$

Ответ: ~~4~~ макс. $m=5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{3}$ продолжение

$$2(\sqrt{x-1}) - \sqrt{2x^2+x+3} = 4x(\sqrt{x-1})$$

~~корень~~

возводим в квадрат

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+x+3} = 2x & |^2 \\ x \leq \frac{1}{4} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+x+3 = 4x^2 \\ x \leq \frac{1}{4} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 3 = 0 \\ x \leq \frac{1}{4} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4}$$
$$\neq \frac{1+5}{4} > \frac{1}{4}$$
$$-1 < 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} = 1 - 4x + \sqrt{2x^2 + x + 3}$$

$D < 0$ \Rightarrow выражение > 0 \swarrow \searrow
 $D < 0$ \Rightarrow выражение > 0

$$1 - 4x + \sqrt{2x^2 + x + 3} \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2 + x + 3} \geq 4x - 1$$

$$4x - 1 \leq 0$$

$$\begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ \text{возведем в квадрат} \\ 2x^2 + x + 3 \geq 16x^2 + 1 - 8x \end{cases}$$

$$0 \geq 14x^2 - 9x - 2$$

$$D = 81 - 4 \cdot 14 \cdot 2$$

$$D < 0$$

$$\text{выр} > 0$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{1}{4} \quad \text{Возведем в квадрат уравне}$$

или

$$2x^2 - 3x + 4 = 2x^2 + x + 3 + 16x^2 - 8x + \sqrt{2x^2 + x + 3} \cdot (4x - 1)$$

$$2\sqrt{2x^2 + x + 3} \cdot (4x - 1) = 16x^2 - 4x$$

$$2(4x - 1)\sqrt{2x^2 + x + 3} = 4x(4x - 1)$$

$4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ Остаток уравнения
теперь рассмотрим отдельно
при $4x - 1 \neq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



14 продолжение
Проведем общую касательную. Она касается ω и Ω

в точках D и E соотв.

$O_1D \perp DE$ $O_2E \perp DE$ из O_1

опустим высоту O_1M на EO_2

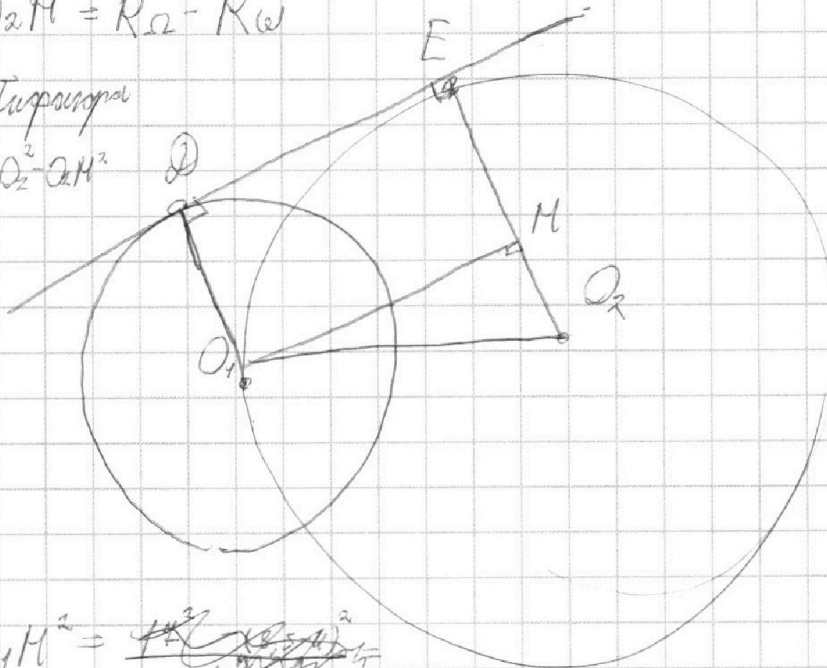
$\triangle O_1ME$ - прямоугольный $\Rightarrow O_1M = DE$

$$O_1O_2 = R_\Omega$$

$$O_2M = R_\Omega - R_\omega$$

из т. Пифагора

$$O_1M^2 = O_1O_2^2 - O_2M^2$$



$$O_1M^2 = \frac{14^2}{4} - \frac{(14-8)^2}{4}$$

$$= \frac{14^2 - (14-8)^2}{4} = 4,5^2 - 4,5^2 = 4(8,5 - 4,5)(8,5 + 4,5)$$

$$O_1M = 2\sqrt{13}$$

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{13}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

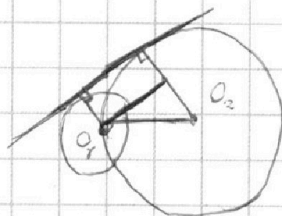
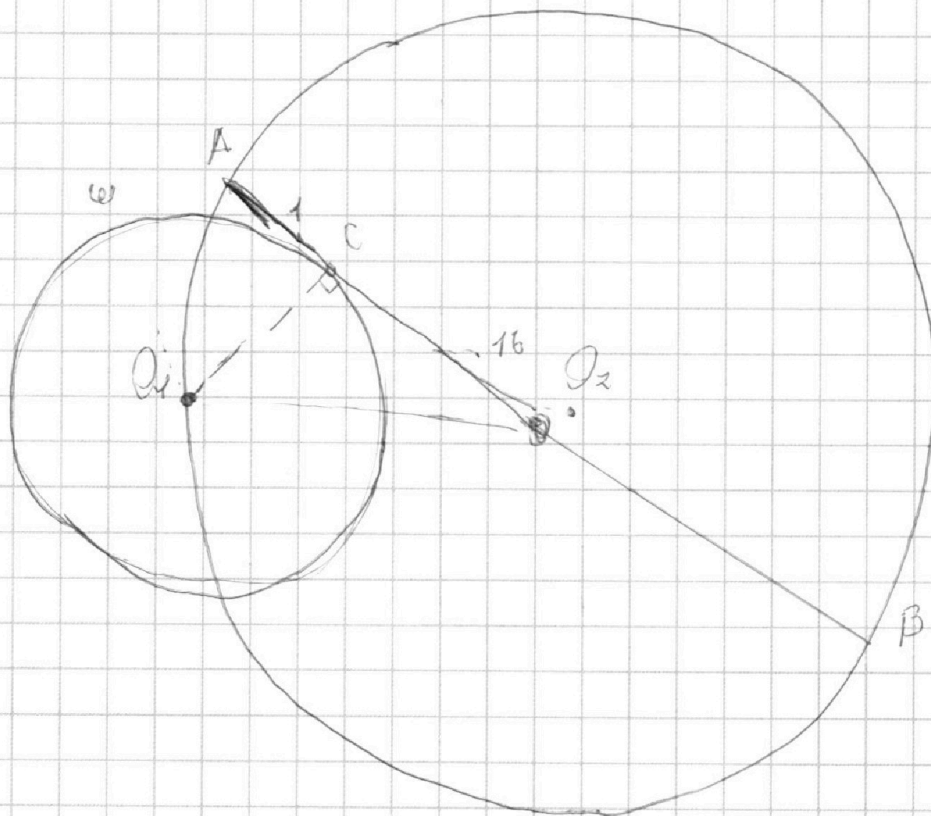
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1
Обозначим диаметр Ω за $D_\Omega = 17$
центры ω и Ω за O_1 и O_2 соотв.

Радиусы ω и Ω за R_ω и R_Ω
соотв. Тогда $O_1O_2 = 8,5$
 $O_2C = 7,5$

$$R_\omega = O_1C \text{ из Треугольника } O_1C^2 = \frac{17^2 - 15^2}{4}$$
$$O_1C = 4 \quad \Omega$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

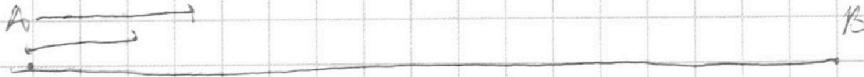
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 6



Ск. велосипедиста u , $u, v \neq 0$, $v > u$
моторизованная v
Рассстояние от А до В - L

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{u} = \frac{L}{v} + \Delta t \\ 96 \frac{L}{v} = \sqrt{\frac{L}{u}} \end{array} \right. \quad \Delta t = \frac{L(v-u)}{uv}$$

$$96 \frac{L}{v} = L \frac{(v^2 - u^2)}{uv} \quad 96 \frac{L}{v} = L \frac{(v+u)(v-u)}{uv}$$

$$\frac{L}{v+6 \text{ км/ч}} + \frac{5}{4} \Delta t = \frac{L}{u+6 \text{ км/ч}} \quad \frac{5}{4} \Delta t = \frac{L(v-u)}{(v+6 \text{ км/ч})(u+6 \text{ км/ч})}$$

$$\frac{(v+6 \text{ км/ч})(u+6 \text{ км/ч})}{uv} = \frac{8}{5}$$

$$5uv + 30 \text{ км/ч} u + 30 \text{ км/ч} v + 180 \frac{\text{км}^2}{\text{ч}^2} = 8uv$$

$$180 \frac{\text{км}^2}{\text{ч}^2} + 30 \text{ км/ч} u = v(3u - 30 \text{ км/ч})$$

$$v = \frac{180 \frac{\text{км}^2}{\text{ч}^2} + 30 \text{ км/ч} u}{3u - 30 \text{ км/ч}}$$

$$u + v = 48 \text{ км/ч}$$

$$48 \text{ км/ч} = \frac{30 \text{ км/ч} \cdot u + 180 \frac{\text{км}^2}{\text{ч}^2} + 3u^2 - 30 \text{ км/ч} u}{3u - 30 \text{ км/ч}}$$

$$144 \text{ км/ч} u - 1440 \frac{\text{км}^2}{\text{ч}^2} = 180 \frac{\text{км}^2}{\text{ч}^2} + 3u^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ продолжение

$$3u^2 - 144 \text{ км/ч} \cdot u + 1620 \text{ км}^2/\text{ч}^2 = 0 \quad | :3$$

$$u^2 - 48 \text{ км/ч} \cdot u + 540 \text{ км}^2/\text{ч}^2 = 0$$

$$u = \frac{48 \text{ км/ч} \pm \sqrt{144 \text{ км}^2/\text{ч}^2}}{2}$$

$$u < v \Rightarrow u = 18 \text{ км/ч} \Rightarrow v = 30 \text{ км/ч}$$

$$\frac{L}{u} = \frac{L}{v} + 2\tau$$

$$L = \frac{2\tau(v \cdot u)}{v - u} = \frac{2\tau \cdot 540 \text{ км}^2/\text{ч}^2}{12 \text{ км/ч}} = 90 \text{ км}$$

Ответ: 90 км

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

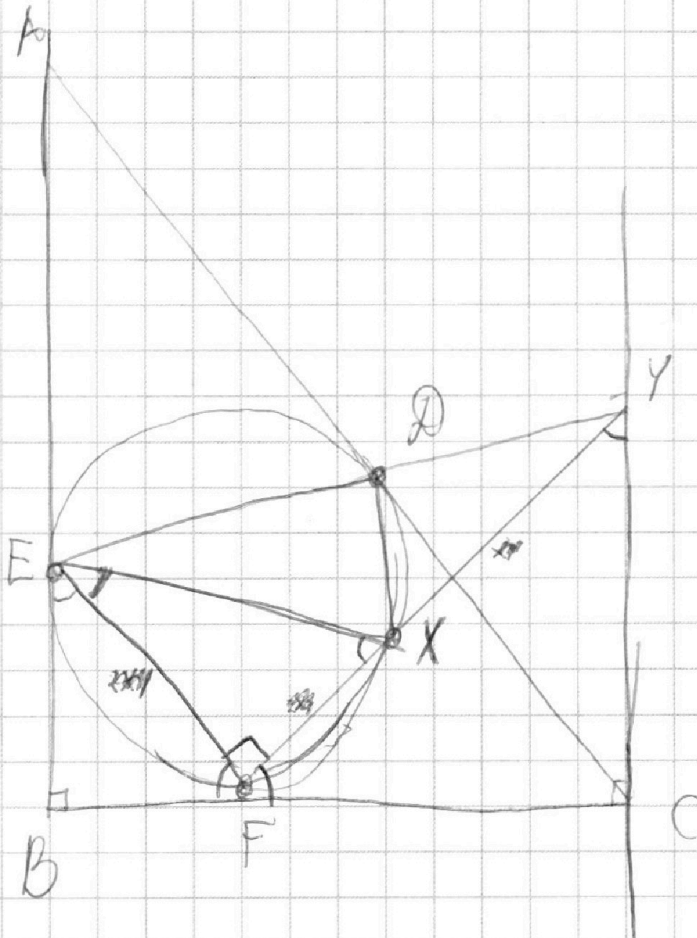
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4



$$\angle ADE = \angle YDC \quad YC \parallel AE \Rightarrow \angle DYC = \angle DEA$$

$\triangle AED$ - равнобедренный $\Rightarrow \triangle YC$ равнобедренный и $\triangle CF$ равнобедренный по тем же причинам что и $AED \Rightarrow YC = DC = CF \Rightarrow$

$\triangle YCF$ - равнобедренный \Rightarrow углы при основании $= 45^\circ$

как и в $\triangle EBF \Rightarrow \angle EFY = 90^\circ \Rightarrow EX$ диаметр виситой $ср.$
 $\angle XEF = \angle XFC = 45^\circ$ („хорда и касательная“) $\Rightarrow EX \parallel BC$

и $\angle EXF = 45^\circ$ $\triangle AED$ и $\triangle CYD$ \neq подобны по трем углам
 $\Rightarrow \frac{ED}{YD} = \frac{AD}{DC}$ из теоремы о двух секущих $\triangle YDX$ и $\triangle YFE$ подобны



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

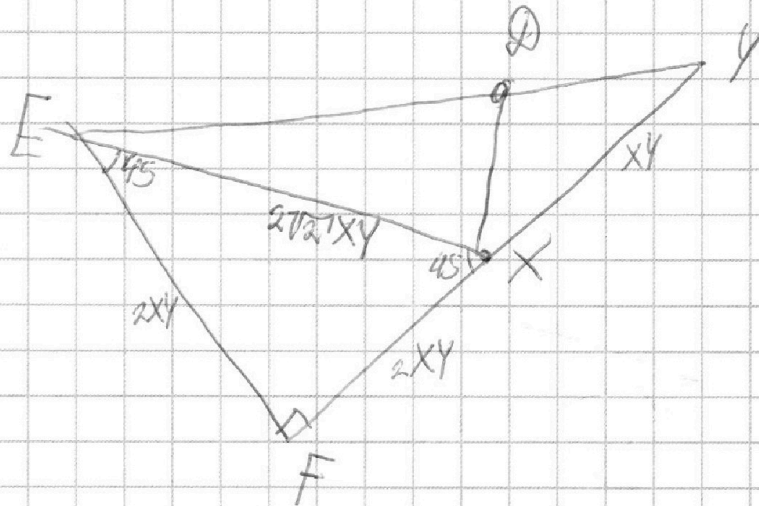
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 проанализировать

$$EF = FX = 2XY$$

из теор. Пифагора

$$EY = \sqrt{3}XY$$



из подобия

$$\frac{DY}{3XY} = \frac{XY}{\sqrt{3}XY}$$

$$DY = \frac{3}{\sqrt{3}}XY$$

$$\frac{ED}{DY} = \frac{\sqrt{3}XY - \frac{3}{\sqrt{3}}XY}{\frac{3}{\sqrt{3}}XY} = \frac{10}{3}$$

Ответ: 10 : 3.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$EX = 2\sqrt{2}XY$

$\angle D = \angle E = \angle X = \angle F$

4D

3

$3x + 2y = z$
 $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{2}{z}$

$\frac{10}{113} xy$

$\frac{ED}{D}$

$\frac{x}{\sqrt{3}x} = \frac{y}{3x}$



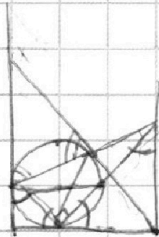
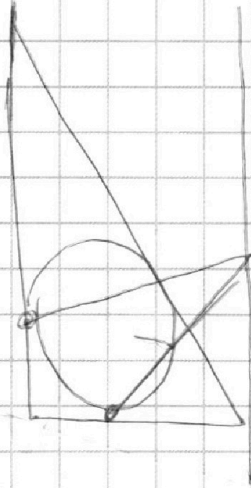
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x + 2y = z$$

$$2xy + 3x^2 + 6y^2 + 2xy - 2xy$$

$$\frac{3y + x}{xy} = \frac{2}{z}$$

$$\frac{(3y + x)(3x + 2y) - 2xy}{xy} = 0$$

$$\frac{3(x^2 + 2y^2 + 3xy)}{xy} = 0$$

$$3x^2 - 4y^2 - z^2 = 3x^2 + 4y^2 - 9x^2 - 4y^2 - 12xy$$

$$-6x^2 - 12xy$$

$$\underline{-6x(x + 2y)}$$

$$(3x + 2y)\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right) = 2$$

$$9 + \frac{6y}{x} + \frac{3y}{y} + 2 = 2$$

$$9 + \frac{2y}{x} + \frac{x}{y} = 0$$

$$\frac{2y^2 + x^2}{xy} = -9$$

$$\begin{array}{r} 540 \overline{) 12} \\ 108 \\ \hline 60 \end{array}$$

$$\frac{1620}{3}$$

$$\begin{array}{r} 1620 \overline{) 3} \\ 15 \\ \hline 12 \\ \hline 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 6 \\ 48 \\ \times 18 \\ \hline 384 \\ 102 \\ \hline 2304 \\ -2160 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1620 \\ \times 540 \\ \hline 2860 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = 3^{11} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 3^{15} \cdot 7^{16}$$

$$ac = 3^{21} \cdot 7^{28}$$

ст. в a 3 в c на 7 больше степени b а
 4 на 5

степень 3 в a на $3 > b$

4 в a на $22 > b$

$a > b$

$$b = k_1 \cdot 3^3 \cdot 7^{22} = a \quad ab = 3^{11}$$

$$a \cdot 3^7 \cdot 7^5 \cdot k_2 = c \quad \rightarrow ab = 7^{22}$$

$$c > a > b \Rightarrow$$

$$ab = b^2 \cdot k_1 \cdot 3^3 \cdot 7^{22} \Rightarrow b \cdot k_1 = 3^7$$

$$c = 3^7 \cdot 7^5 \cdot k_2 \cdot 7^{22} \cdot 3^3 \cdot k_1 \cdot b = k_2 \cdot k_1 \cdot b^2 \cdot 7^{27} \cdot 3^3$$

$$abc = k_1^2 \cdot k_2 \cdot b^3 \cdot 3^{13} \cdot 7^{49}$$