



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

### 9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .
7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA$ ,  $AB$ ,  $BC$  в точках  $D$ ,  $E$ ,  $F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX=2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD:DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab \geq 3^{14} \cdot 7^{14}, \quad bc \geq 3^{16} \cdot 7^{16}, \quad ac \geq 3^{21} \cdot 7^{38}$$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 \geq 3^{50} \cdot 7^{65}$$

$$ab = k \cdot x \cdot 3^{14} \cdot 7^{14}$$

$$bc = y \cdot 3^{16} \cdot 7^{16}$$

$$ac = z \cdot 3^{21} \cdot 7^{38}$$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = 3^{50} \cdot 7^{65} \cdot xyz^2$$

$$\Rightarrow abc = 3^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{7xyz}$$

$a, b, c$  - нечет.  $\Rightarrow abc$  - нечет.

$\Rightarrow 7xyz$  - четное;  $x, y, z$  - нечет.

$$\Rightarrow \sqrt{7xyz} = 7^k$$

$$abc \geq 3^{25} \cdot 7^{32+k}$$

равенств, но  $b$  равно  $\frac{abc}{ac} = \frac{3^4 \cdot \sqrt{7xyz}}{7^6}$

$$b \text{ - нечет. } \Rightarrow \sqrt{7xyz} : 7^6$$

$$\Rightarrow xyz \geq abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$$

$$abc = 3^{25} \cdot 7^{38} \text{ делится на } 7^6, \text{ например,}$$

$$\text{при } b = 3^4, c = 3^{14} \cdot 7^{20}, a = 3^{18} \cdot 7^{18}$$

Ответ:  $3^{25} \cdot 7^{38}$ , делится на  $7^6$ , например, при

$$a = 3^7 \cdot 7^{18}, b = 3^4, c = 3^{14} \cdot 7^{20}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} \stackrel{N2}{=} \frac{a+b}{a(a-8b)+b \cdot b} = \frac{a+b}{a(a-8b)+b(a-8b)-ab+9b^2} =$$
$$= \frac{a+b}{(a+b)(a-8b)-ab+9b^2}$$

$$a+b : m \text{ и } (a+b)(a-8b)-ab+9b^2 : m$$

$$\Rightarrow -ab+9b^2 : m$$

$$\Rightarrow b(9b-a) : m \text{ и } a+b : m$$

То есть  $\frac{a}{b}$  несократима  $\Rightarrow a$  и  $b$  взаимнопросты

$\Rightarrow b$  и  $a+b$  взаимнопросты, иначе у  $a$  и  $b$  есть общий дел. (но это, на самом деле, противно  $b$  и  $a+b$ ).

$b$  и  $a+b$  взаимнопросты  $\Rightarrow b$  и  $m$  взаимнопросты,  
т.к.  $a+b : m$ .

$$\Rightarrow 9b-a : m \text{ и } a+b : m$$

$$\Rightarrow 9b-a+a+b = 10b : m$$

$b$  и  $m$  взаимнопросты

$$\Rightarrow 10 : m$$

$$\Rightarrow m \leq 10; m=10 \text{ делитель, непрост, т.к.}$$

$$a=1, b=9$$

Ответ: 10; делитель, непрост, т.к.  $a=1, b=9$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $a = \frac{1}{2} - 2x$ ;  $b = \frac{a^2}{2} + \frac{27}{8} = 2x^2 - x + \frac{28}{2}$

Перепишем уравнение.

$$\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} = 2a$$

$$\Rightarrow (b+a) + (b-a) - 2\sqrt{b^2 - a^2} = 4a^2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{b^2 - a^2} = 2b - 4a^2$$

$$\Rightarrow 4b^2 - 4a^2 = (2b - 4a^2)^2$$

$$\Rightarrow 16a^4 - 16a^2b + 4a^2 = 0$$

$$a^2(16a^2 - 16b + 4) = 0$$

$$a^2(16a^2 - 8a^2 - 54 + 4) = 0$$

$$a^2(8a^2 - 50) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 = 0 \text{ или } 4a^2 = 25$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ или } 2a = 5 \text{ или } 2a = -5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - 2x = 0 \text{ или } 1 - 4x = 5 \text{ или } 1 - 4x = -5$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ или } -1 \text{ или } \frac{3}{2}$$

~~Проверяем  $x = \frac{1}{4}$  и  $\frac{3}{2}$~~

Остаток проверить, но по нормам не считаем

отр. числа, но если  $b \geq -a$  и  $b \geq a$

$b > 0$ , т.к. в любом из вариантов.

нужно проверить, но  $b \geq |a|$ .

$$x = \frac{1}{4}$$

$$a = 0$$

$$b = \frac{27}{8}$$

$$x = -1$$

$$a = \frac{5}{2}$$

$$b = \frac{52}{8} = \frac{13}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$a = -\frac{5}{2}$$

$$b = \frac{52}{8} = \frac{13}{2}$$

Ответы:  $-1; \frac{1}{4}; \frac{3}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

$$\begin{cases} 3x+2y=z \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right)(3x+2y) = \frac{2}{z} \cdot z$$

$$x, y, z \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ \frac{9x}{x} + \frac{2y}{y} + \frac{3x}{y} + \frac{6y}{x} = \frac{2z}{z} \Rightarrow \frac{3x}{y} + \frac{6y}{x} = -9 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{н.к. } x, y, z \neq 0,$$

$$x^2 + 2y^2 + 3xy = 0 \quad (\text{данными линейными равенствами на } xy)$$

$$4x^2 + 12xy + 8y^2 = 0$$

$$(2x+3y)^2 = y^2$$

$$\Rightarrow 2x+3y=y \quad \text{или} \quad 2x+3y=-y$$

$$x=-y \quad \quad \quad x=-2y$$

$$3x+2y=z$$

$$\Rightarrow \text{либо } x=-y, z=x; \text{ либо } x=-2y, z=\frac{z}{2}$$

Для выполнения одной из пар равенств оба уравнения одновременно выполняются верно, поэтому можно выразить в одной системе  $y$  и  $z$  через  $x$  и подставить в второе уравнение.

$$y=-x, z=x$$

$$y=-\frac{x}{2}, z=2x$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{x^2 \left( \frac{3-4-1}{1-6} \right)}{x^2} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{x^2 \left( \frac{3-1-4}{1-1,5} \right)}{x^2} = \frac{4}{0,5}$$

$$\text{н.к. } x \neq 0$$

$$\text{н.к. } x \neq 0$$

$\Rightarrow$  наиб. возможное значение равно  $\frac{4}{5}$  и достигается

$$\text{при } y=-\frac{x}{2}, z=2x. \text{ Например, } x=2, y=-1, z=4.$$

$$\text{Ответ: } \frac{4}{5}; \text{ достигается, например, при } x=2, y=-1, z=4.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

Плывец  $x$  км/ч. скорость  $x$  км/ч,  $y$  км/ч;  
 $t_1$  - время, которое он затратит на путь с скоростью  $x$  км/ч;  
 $t_2$  - время, которое он затратит на путь с скоростью  $y+6$   
 $S$  км - расстояние AB

$$\begin{cases} x(t_1+2) = y t_1 = S \\ y(t_1+2) - x t_1 = 96 \\ (x+6)(t_2 + \frac{9}{4}) = (y+6) t_2 = S \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7

Отрезки  $OE$  и  $OF$  являются биссектрисами угла  $\angle FOE$  в равнобедренном треугольнике  $\triangle FOE$   $\Rightarrow \angle FOE = 90^\circ$ . Так как не требуется решать задачу  $\angle FOE \Rightarrow \angle FXE = \frac{\angle FOE}{2} = 45^\circ$

$\Rightarrow \angle YXE = 135^\circ \Rightarrow \sin \angle YXE = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{YE}{\sin \angle YXE} = \frac{XE}{\sin \angle YEX} = \frac{XY}{\sin \angle YXE}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 a^2 - 9ab + b^2 &= a(a-9b) + b^2 = \\
 &= a(a-9b) + b(a-9b) - ab + 9b^2 = \\
 &= (a+b)(a-9b) + ab - 9b^2
 \end{aligned}$$

через формулу  
 $a^2 - 9ab + b^2 = (a+b)(a-9b) + ab - 9b^2$

Пусть  $a = \frac{1}{2} - 2x$  N3

$$\frac{1}{4} - a^2 = 2x^2 - x + \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{4} - a = 2x^2 + x - \frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{4} + a = 2x^2 - 3x + \frac{5}{8}$$

Перемножим данное уравнение.

$$\sqrt{\frac{1}{4} + a + \frac{4-5}{8}} - \sqrt{\frac{1}{4} - a + \frac{3+5}{8}} = 2a$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{27}{8} + a} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{27}{8} - a} = 2a$$

Пусть  $\frac{a^2}{2} + \frac{27}{8} = b$

Итого  $\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} = 2a$

$$\Rightarrow (b+a) + (b-a) - 2\sqrt{b^2 - a^2} = 2a \cdot 4a^2$$

$$2a^2 + 2\sqrt{b^2 - a^2} - 2b = 0$$

$$(a+b)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$\Rightarrow (ab - \frac{(a-b)^2}{4}) + (\frac{(a+b)^2}{4} + 2\sqrt{(a+b)(b-a)} + 2a^2 - 2b^2 - 2b = 0$$

$$(a+b + b-a)^2 + 2a^2 - 2b^2 - 2b = 0$$

$$4b^2 + 2a^2 - 2b^2 - 2b = 0$$

$$a^2 = -b^2 + b$$

$$a^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{27}{8} + \left(\frac{a^2}{2} + \frac{27}{8}\right) \cdot c$$

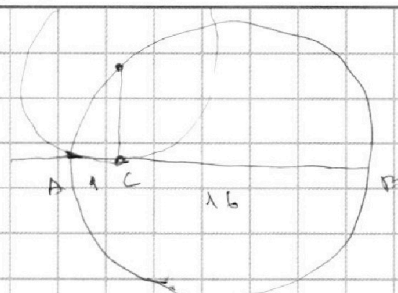
$$\frac{a^2}{2} - \frac{27}{8} = -\frac{(a^2)^2}{4} + \frac{27}{8} - a^2 - \frac{27^2}{8^2}$$

Пусть  $a^2 = c$

$$\frac{c^2}{4} + \frac{27}{8} - \frac{27^2}{8^2} = \frac{c^2}{4} + \frac{31}{8} - \frac{27^2}{8^2} = 0$$

$$\left(\frac{c}{2} + \frac{31}{8}\right)^2 - \frac{27^2}{8^2} = 0$$

$$\left(\frac{c}{2} + \frac{31}{8}\right)$$



$$\begin{aligned}
 4a^2 - 2b^2 &= 4b^2 - 4a^2 \\
 a^2(16a^2 - 16b^2 + 4a^2) &= 0 \\
 a^2(16a^2 - 16b^2 + 4a^2) &= 0
 \end{aligned}$$



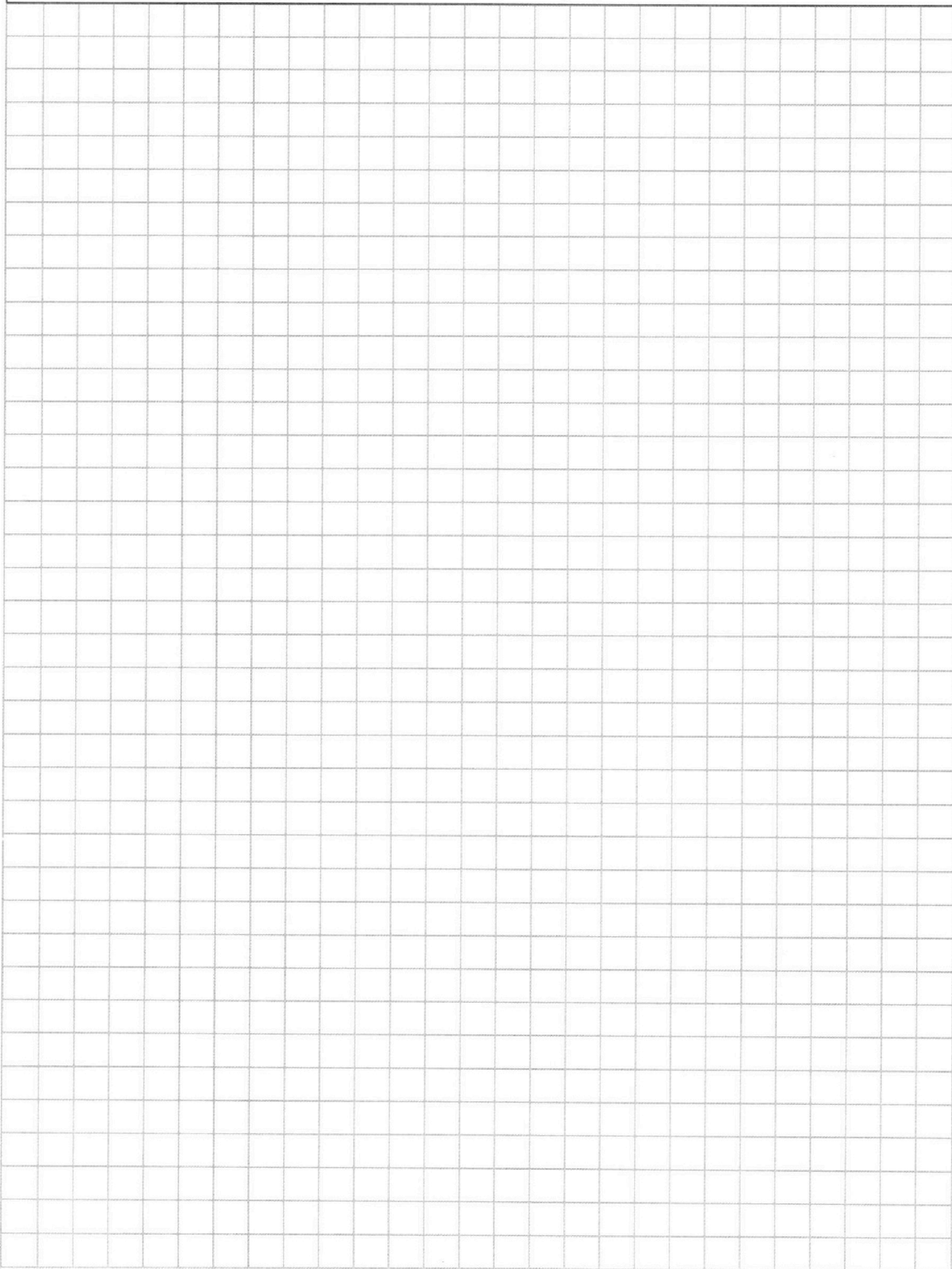
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





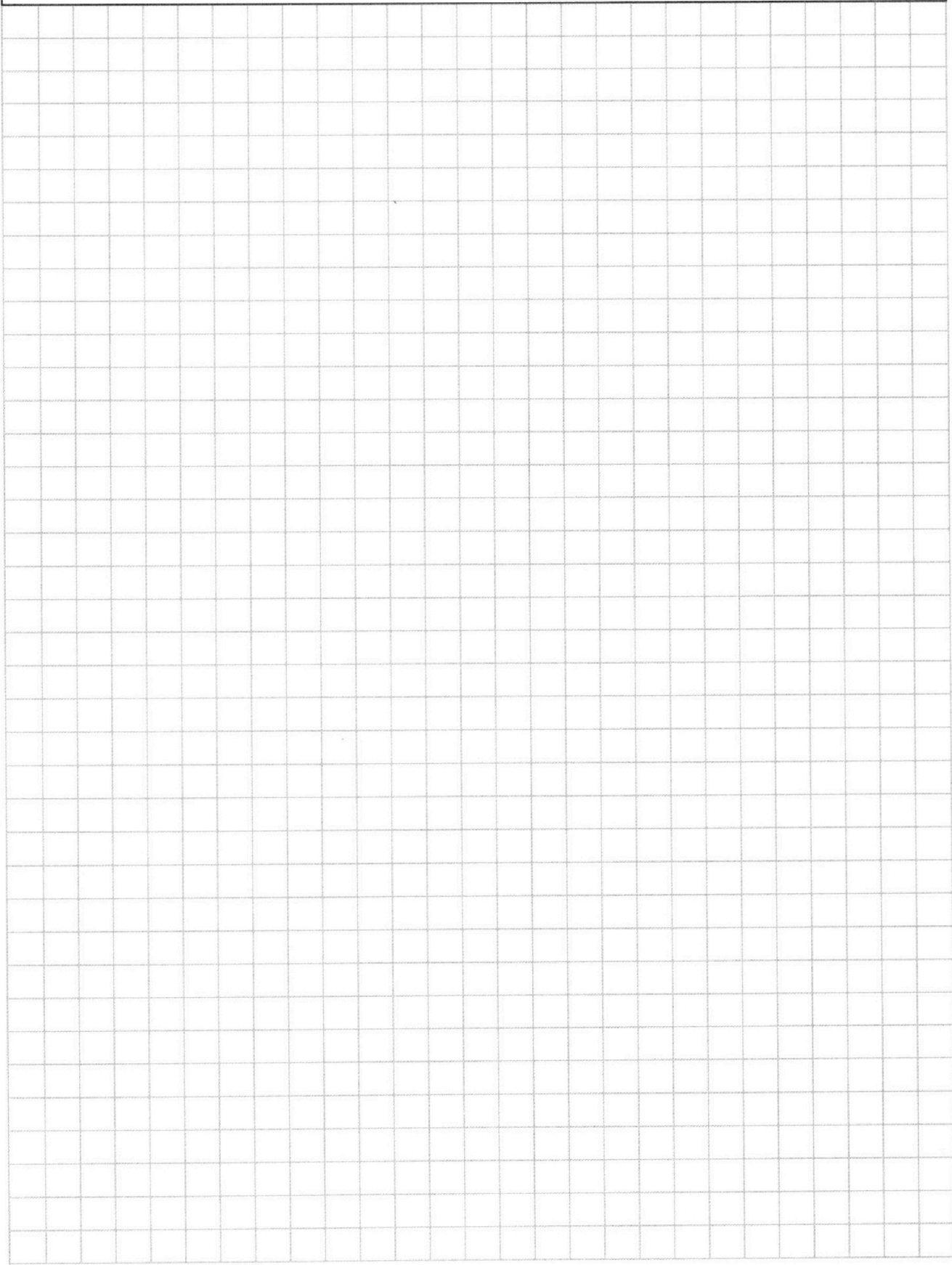
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**Handwritten Solution 1:**

$$3x + 2y = 3 \Rightarrow 2y - 2 = -3x$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \Rightarrow 3zy = x(2y - 2) \Rightarrow x^2 = -2y$$

$$3x^2 - 4y^2 - 2z^2 = 3 + \frac{14y^2 - 2z^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$3x^2 - 4y^2 - 2z^2$$

$$3x + 2y = 2 \Rightarrow 9 + 2 + \frac{6y}{x} + \frac{3x}{y} = 2$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \Rightarrow 9 + 2 + \frac{6y}{x} + \frac{3x}{y} = 2$$

$$\sqrt{(a+1)^2 + \frac{19}{8}} - 2$$

$$2xy = -9$$

$$x^2 = -2y$$

$$x^3 = z$$

$$y = \frac{1}{x}, z = x^3$$

**Handwritten Solution 2:**

$$3x - \frac{2}{x} = x^3$$

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0$$

$$\frac{2y}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$$

$$2xy = (3x + 2y)(3y + x)$$

$$2xy = 6y^2 + 3x^2 + 2xy - 9xy$$

$$2y^2 + x^2$$

**Handwritten Solution 3:**

$$3x + 2y = 2$$

$$\frac{xy}{3y + x} = \frac{z}{2}$$

$$2xy = (3x + 2y)(3y + x)$$

$$2xy = 6y^2 + 3x^2 + 2xy - 9xy$$

$$2y^2 + x^2$$

**Handwritten Solution 4:**

$$\sqrt{\frac{(a-2x)^2}{a} + \frac{(a-2x)}{a} + \frac{8}{a}}$$

$$\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} = (b+a) - (b-a)$$

$$\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} = \sqrt{b+a}(\sqrt{b-a}-1)$$

**Handwritten Solution 5:**

$$\sqrt{2x^2 - 4x + 7} + \left(\frac{1}{x} - 2x\right) - \sqrt{2x^2 - 4x + 7} - \left(\frac{1}{x} - 2x\right) =$$

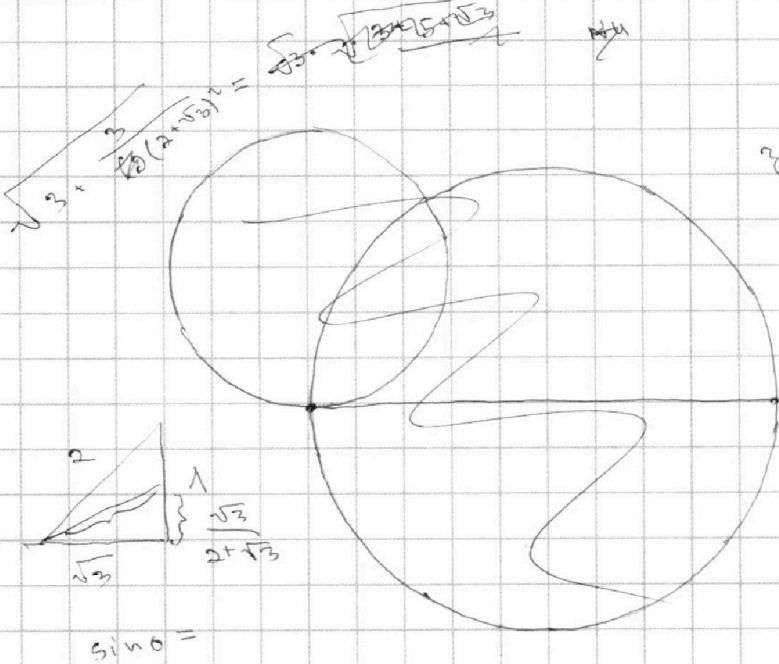
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

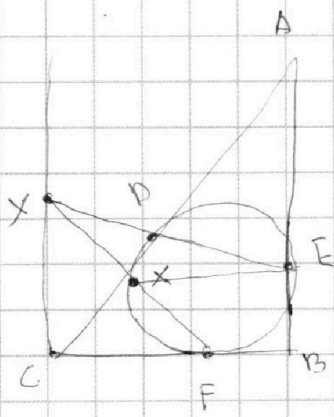
- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$3^{11} \cdot 7^{11}$   
 $3^{12} \cdot 7^{16}$   
 $3^{24} \cdot 7^{38}$   
 $3^{14} \cdot 7^{22}$   
 $3^7 \cdot 7^{17}$   
 $3^4 \cdot 7$   
 $170 + 70 + 49 = 289$   
 $289 + 81 = 370$

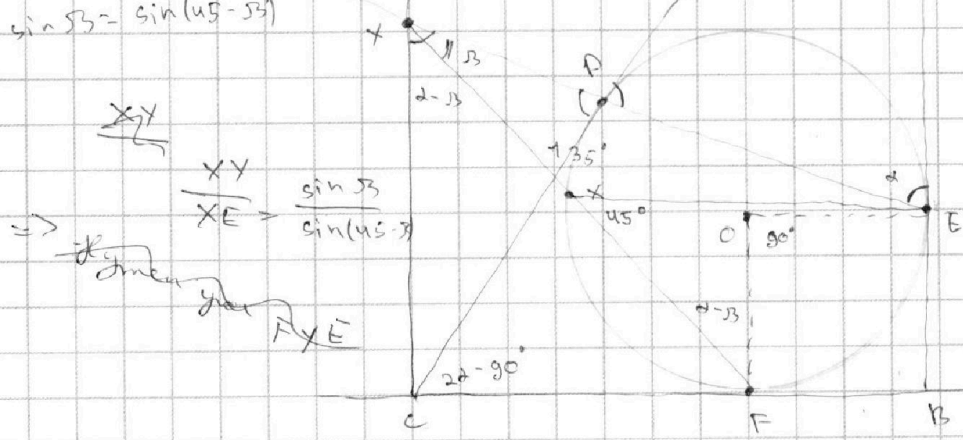


$$1 + \frac{2,5}{EO_x} = \frac{2,5}{u} \quad xy = 3^{11}$$

$$\frac{2,5}{EO_x} = \frac{4,5}{u}$$

$$EO_x = 2,5 \cdot \frac{8}{9}$$

$\sin \angle BEF$   
 $2\sqrt{2} \sin \beta = \sin(45 - \beta)$



$EX = 2\sqrt{2} \cdot XY$   
 $\frac{XY}{XE} = \frac{\sin \beta}{\sin(45 - \beta)}$