



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x , y , z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA , AB , BC в точках D , E , F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab \geq 3^{14} \cdot 7^{14}, \quad bc \geq 3^{16} \cdot 7^{16}, \quad ac \geq 3^{21} \cdot 7^{38}$$
$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 \geq 3^{50} \cdot 7^{65}$$

$$ab = k \cdot x \cdot 3^{14} \cdot 7^{14}$$

$$bc = y \cdot 3^{16} \cdot 7^{16}$$

$$ac = z \cdot 3^{21} \cdot 7^{38}$$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = 3^{50} \cdot 7^{65} \cdot xyz^2$$

$$\Rightarrow abc = 3^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{7xyz}$$

a, b, c - нечет. $\Rightarrow abc$ - нечет.

$\Rightarrow 7xyz$ - четное; x, y, z - нечет.

$$\Rightarrow \sqrt{7xyz} = 7^2$$
$$abc \geq 3^{25} \cdot 7^{32}$$

значит, что b равно $\frac{abc}{ac} = \frac{3^4 \cdot \sqrt{7xyz}}{7^6}$

b - нечет. $\Rightarrow \sqrt{7xyz} : 7^6$

$$\Rightarrow xyz \geq abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$$

$$abc = 3^{25} \cdot 7^{38} \text{ делится на } 7^6, \text{ например,}$$

$$\text{при } b = 3^4, c = 3^{14} \cdot 7^{20}, a = 3^{18} \cdot 7^{18}$$

Ответ: $3^{25} \cdot 7^{38}$, делится на 7^6 , например, при

$$a = 3^7 \cdot 7^{18}, b = 3^4, c = 3^{14} \cdot 7^{20}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} \stackrel{N2}{=} \frac{a+b}{a(a-8b)+b \cdot b} = \frac{a+b}{a(a-8b)+b(a-8b)-ab+9b^2} =$$
$$= \frac{a+b}{(a+b)(a-8b)-ab+9b^2}$$

$$a+b : m \text{ и } (a+b)(a-8b)-ab+9b^2 : m$$

$$\Rightarrow -ab+9b^2 : m$$

$$\Rightarrow b(9b-a) : m \text{ и } a+b : m$$

То есть $\frac{a}{b}$ несократима $\Rightarrow a$ и b взаимнопросты

$\Rightarrow b$ и $a+b$ взаимнопросты, иначе у a и b есть общий дел. (но это, наоборот, противно b и $a+b$).

b и $a+b$ взаимнопросты $\Rightarrow b$ и m взаимнопросты,
т.к. $a+b : m$.

$$\Rightarrow 9b-a : m \text{ и } a+b : m$$

$$\Rightarrow 9b-a+a+b = 10b : m$$

b и m взаимнопросты

$$\Rightarrow 10 : m$$

$$\Rightarrow m \leq 10; m=10 \text{ делится, например, при}$$

$$a=1, b=9$$

Ответ: 10; делится, например, при $a=1, b=9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

Пусть $a = \frac{1}{2} - 2x$; $b = \frac{a^2}{2} + \frac{27}{8} = 2x^2 - x + \frac{287}{8}$

Перепишем уравнение

$$\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} = 2a$$

$$\Rightarrow (b+a) + (b-a) - 2\sqrt{b^2 - a^2} = 4a^2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{b^2 - a^2} = 2b - 4a^2$$

$$\Rightarrow 4b^2 - 4a^2 = (2b - 4a^2)^2$$

$$\Rightarrow 16a^4 - 16a^2b + 4a^2 = 0$$

$$a^2(16a^2 - 16b + 4) = 0$$

$$a^2(16a^2 - 8a^2 - 54 + 4) = 0$$

$$a^2(8a^2 - 50) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 = 0 \text{ или } 4a^2 = 25$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ или } 2a = 5 \text{ или } 2a = -5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - 2x = 0 \text{ или } 1 - 4x = 5 \text{ или } 1 - 4x = -5$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ или } -1 \text{ или } \frac{3}{2}$$

~~Проверим~~ $x = \frac{1}{4}$; $\frac{3}{2}$

Остаток проверить, но по нормам не считаем

отр. числа, но если $b \geq -a$ и $b \geq a$

$b > 0$, т.к. в любом "верном" число, $a > 0$
нужно проверить, но $b \geq |a|$.

$$x = \frac{1}{4}$$

$$a = 0$$

$$b = \frac{27}{8}$$

$$x = -1$$

$$a = \frac{5}{2}$$

$$b = \frac{52}{8} = \frac{13}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$a = -\frac{5}{2}$$

$$b = \frac{52}{8} = \frac{13}{2}$$

Ответы: $-1; \frac{1}{4}; \frac{3}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

$$\begin{cases} 3x+2y=z \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right)(3x+2y) = \frac{2}{z} \cdot z$$

$$x, y, z \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ \frac{9x}{x} + \frac{2y}{y} + \frac{3x}{y} + \frac{6y}{x} = \frac{2z}{z} \Rightarrow \frac{3x}{y} + \frac{6y}{x} = -9 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{н.к. } x, y, z \neq 0,$$

$$x^2 + 2y^2 + 3xy = 0 \quad (\text{данными линейными равенствами на } xy)$$

$$4x^2 + 12xy + 8y^2 = 0$$

$$(2x+3y)^2 = y^2$$

$$\Rightarrow 2x+3y=y \quad \text{или} \quad 2x+3y=-y$$

$$x=-y \quad \quad \quad x=-2y$$

$$3x+2y=z$$

$$\Rightarrow \text{либо } x=-y, z=x; \text{ либо } x=-2y, z=\frac{z}{2}$$

Для выполнения одной из пар равенств оба уравнения являются линейными относительно переменных y и z через x и подставляем в уравнение y и z через x и проверяем в уравнение y и z .

$$y=-x, z=x$$

$$y=-\frac{x}{2}, z=2x$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{x^2 (3 - 4 - 1)}{x^2 (1 - 6)} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{x^2 (3 - 1 - 4)}{x^2 (1 - 1.5)} = \frac{4}{0.5}$$

$$\text{н.к. } x \neq 0$$

$$\text{н.к. } x \neq 0$$

\Rightarrow наиб. возможное значение равно $\frac{4}{5}$ и достигается

$$\text{при } y = -\frac{x}{2}, z = 2x. \text{ Например, } x=2, y=-1, z=4.$$

$$\text{Ответ: } \frac{4}{5}; \text{ достигается, например, при } x=2, y=-1, z=4.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

Плывет y км. скорость x км/ч, y км. y км/ч;
 t_1 - время, которое она затратит на путь со скоростью y км/ч;
 t_2 - время, которое она затратит на путь со скоростью $y+6$
 S км - расстояние AB

$$\begin{cases} x(t_1+2) = y t_1 = S \\ y(t_1+2) - x t_1 = 96 \\ (x+6)(t_2 + \frac{9}{4}) = (y+6) t_2 = S \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7

Отрезки OE и OF являются биссектрисами угла $\angle XOY$
в треугольнике $\Rightarrow \triangle FOE$ - равнобедренный
 $\Rightarrow \angle FOE = 90^\circ$. Так как OE не является катетом
в $\triangle XOY \Rightarrow \angle FOE = \frac{\angle XOY}{2} = 45^\circ$
 $\Rightarrow \angle YXE = 135^\circ \Rightarrow \sin \angle YXE = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\Rightarrow \frac{YE}{\sin \angle YXE} = \frac{XE}{\sin \angle XYE} = \frac{XY}{\sin \angle YEX}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 a^2 - 9ab + b^2 &= a(a-9b) + b^2 = \\
 &= a(a-9b) + b(a-9b) - ab + 9b^2 = \\
 &= (a+b)(a-9b) + ab - 9b^2
 \end{aligned}$$

через формулу
 $a^2 - 9ab + b^2 = a^2 - 9ab + 9b^2 - 8b^2 = (a-9b)^2 - 8b^2$

Пусть $a = \frac{1}{2} - 2x$ N3

$$\frac{1}{4} - a^2 = 2x^2 - x + \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{4} - a = 2x^2 + x - \frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{4} + a = 2x^2 - 3x + \frac{5}{8}$$

Перемножим данное уравнение.

$$\sqrt{\frac{1}{4} + a + \frac{4-5}{8}} - \sqrt{\frac{1}{4} - a + \frac{3+5}{8}} = 2a$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{27}{8} + a} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{27}{8} - a} = 2a$$

Пусть $\frac{a^2}{2} + \frac{27}{8} = b$

Итого $\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} = 2a$

$$\Rightarrow (b+a) + (b-a) - 2\sqrt{b^2 - a^2} = 2a \cdot 4a^2$$

$$2b - 2\sqrt{b^2 - a^2} = 8a^3$$

$$(a+b)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$\Rightarrow (ab - \frac{a-b}{2})^2 + (\frac{a+b}{2})^2 + 2\sqrt{(a+b)(b-a)} + 2a^2 - 2b^2 - 2b = 0$$

$$(a+b + b-a)^2 + 2a^2 - 2b^2 - 2b = 0$$

$$4b^2 + 2a^2 - 2b^2 - 2b = 0$$

$$a^2 = -b^2 + b$$

$$a^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{27}{8} + \left(\frac{a^2}{2} + \frac{27}{8}\right) \cdot c$$

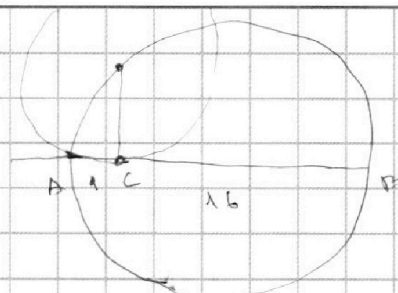
$$\frac{a^2}{2} - \frac{27}{8} = -\frac{(a^2)^2}{4} + \frac{27}{8} - a^2 - \frac{27^2}{8^2}$$

Пусть $a^2 = c$

$$\frac{c^2}{4} + \frac{27}{8} - \frac{c^2}{4} + \frac{27^2}{8^2} = 0$$

$$\left(\frac{c}{2} + \frac{27}{8}\right)^2 - \frac{27^2}{8^2} = 0$$

$$\left(\frac{c}{2} + \frac{27}{8}\right)$$





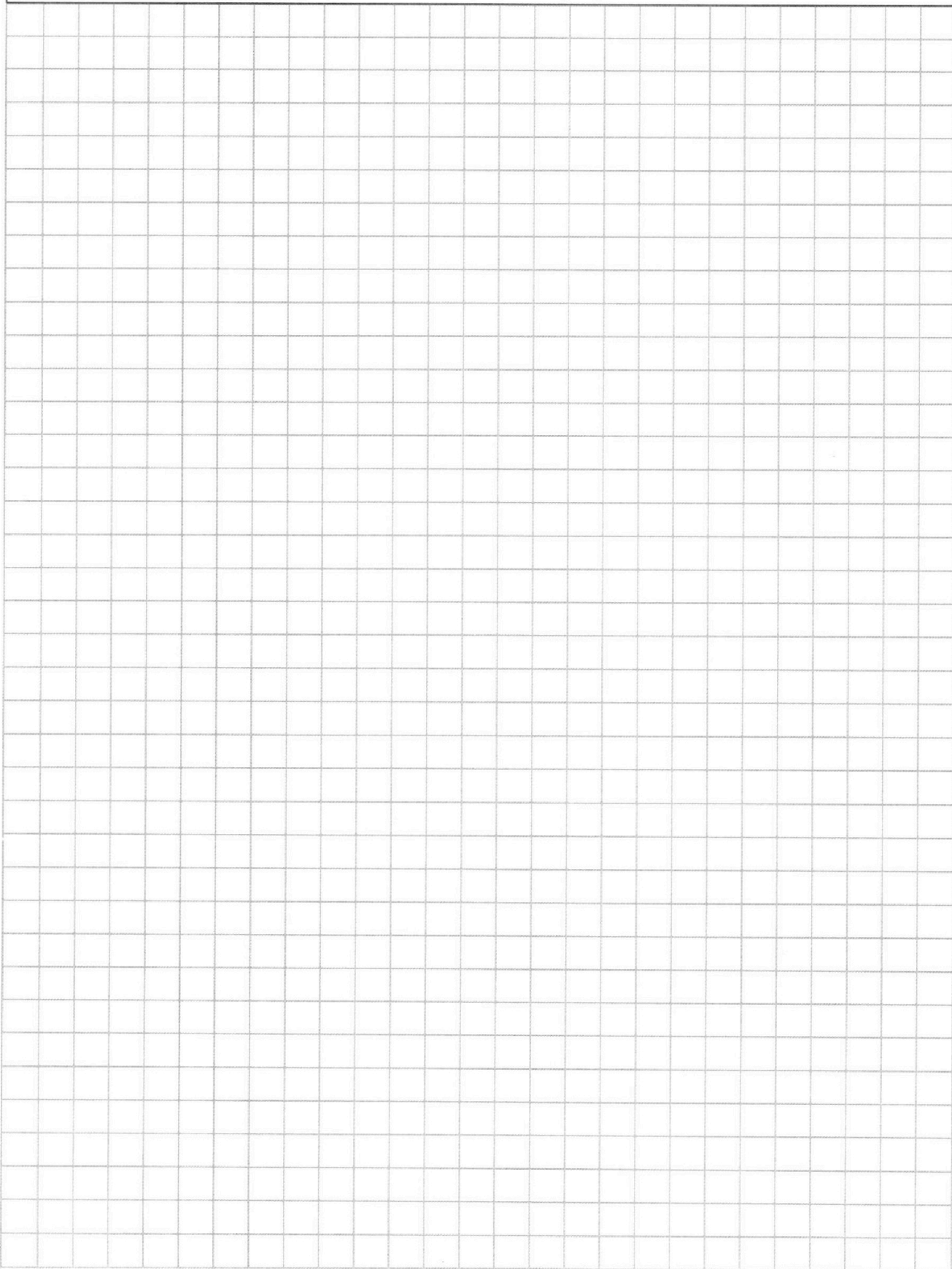
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





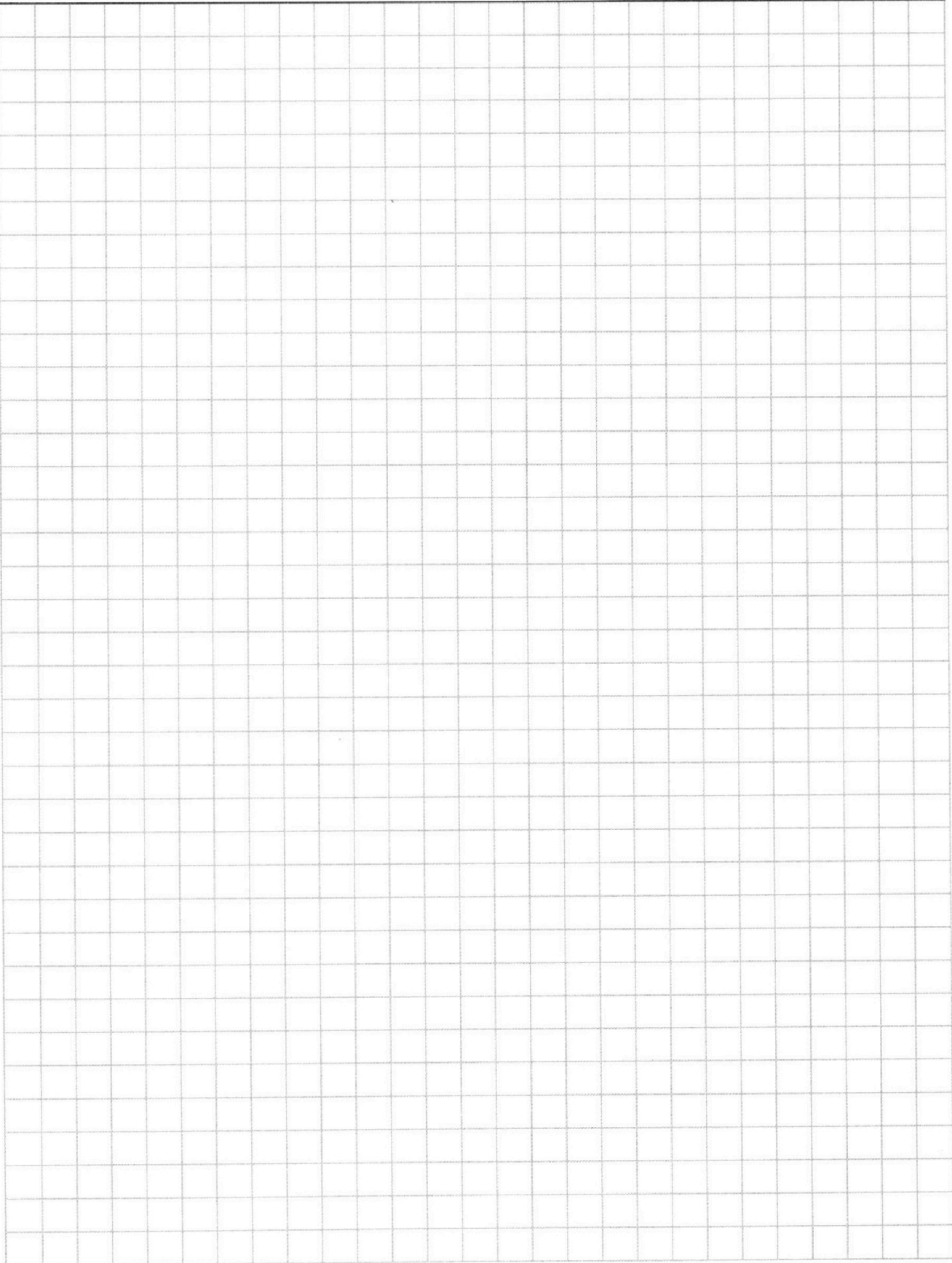
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten Solution:

$$3x + 2y = 3 \Rightarrow 2y - 2 = -3x$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \Rightarrow 3zy = x(2y - 2) \Rightarrow x^2 = -2y$$

$$3x^2 + 4y^2 - 2z^2 = 3 + \frac{14y^2 - 2z^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$3x^2 - 4y^2 - 2z^2$$

$$3x + 2y = 2 \Rightarrow 9 + 2 + \frac{6y}{x} + \frac{3x}{y} = 2$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \Rightarrow 3zy = x(2y - 2) \Rightarrow x^2 = -2y$$

$$2(a+1)^2 + \frac{19}{8} - 2$$

$$3x - x = x^3$$

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0$$

$$\frac{2y}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

$$2ay + ba + 1 = 0$$

$$(a+3)^2$$

$$3x + 2y = 2$$

$$\frac{xy}{3y+x} = \frac{z}{2}$$

$$2xy = (3x+2y)(3y+x)$$

$$2xy = 6y^2 + 3x^2 + 2xy - 9xy$$

$$2y^2 + x^2$$

$$\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} = (b+a) - (b-a)$$

$$\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} = \sqrt{b-a}(\sqrt{b+a} + 1)$$

$$\left(\frac{1}{2} - 2x\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 2x\right) + \frac{8}{7}$$

$$\sqrt{2x^2 - 4x + 2} + \frac{1}{7} + \left(\frac{1}{2} - 2x\right) - \sqrt{2x^2 - 4x + 2} - \left(\frac{1}{2} - 2x\right) =$$

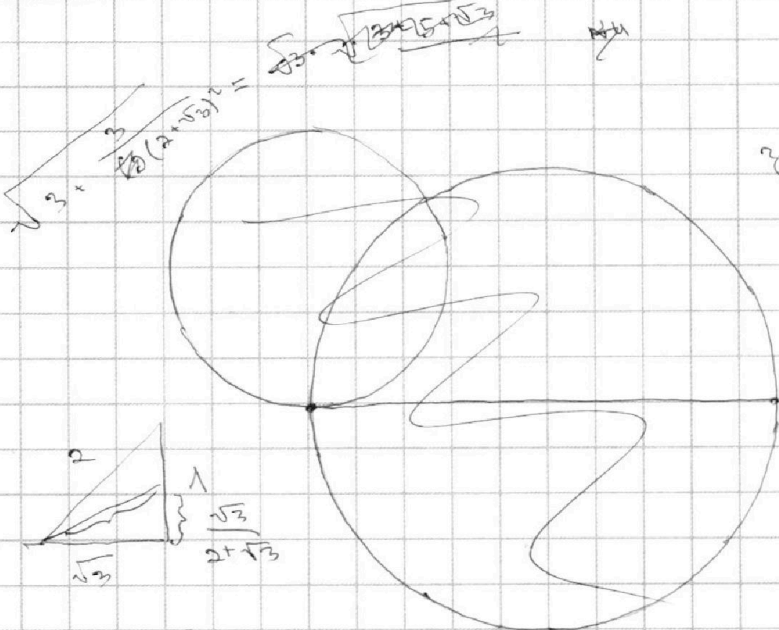
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten calculations on grid paper:

$$3^{11} \cdot 7^{11}$$

$$3^{12} \cdot 7^{16}$$

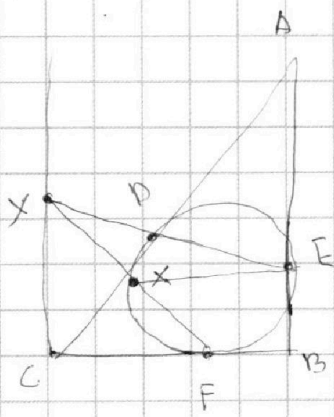
$$3^{24} \cdot 7^{38}$$

$$3^{14} \cdot 7^{22}$$

$$3^7 \cdot 7^{17}$$

$$3^4 \cdot 7$$

$$170 + 70 + 49 = 289$$

$$289 + 81 = 370$$


Handwritten calculations on grid paper:

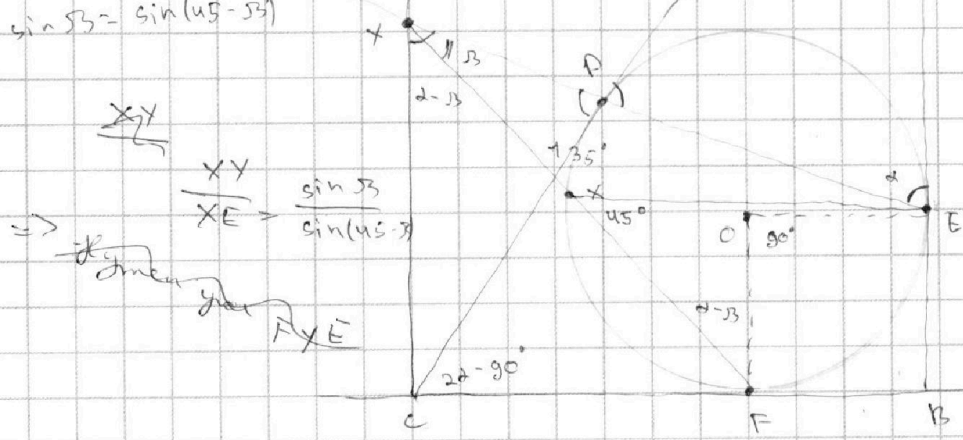
$$1 + \frac{2,5}{EO_x} = \frac{2,5}{4} \quad xy = 3^{11}$$

$$\frac{2,5}{EO_x} = \frac{4-2,5}{4}$$

$$EO_x = 2,5 \cdot \frac{8}{9}$$

Handwritten calculations on grid paper:

$$\sin \angle BE$$

$$2\sqrt{2} \sin 33 = \sin(45-33)$$


Handwritten calculations on grid paper:

$$\frac{XY}{XE} = \frac{\sin 33}{\sin(45-33)}$$