



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 9 КЛАСС. Вариант 13

1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC = 1$  и  $BC = 16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$3x + 2y = z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклистику на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = 2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| X |   |   |   |   |   |   |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть:  $\alpha = \alpha \cdot 3^{k_1} \cdot 7^{m_1}$ ;  $\beta = \beta \cdot 3^{k_2} \cdot 7^{m_2}$ ;  $\gamma = \gamma \cdot 3^{k_3} \cdot 7^{m_3}$

$\alpha\beta; 3^{17} \cdot 7^{11} \cdot \alpha\gamma; 3^{18} \cdot 7^{16} \cdot \alpha\gamma; 3^{21} \cdot 7^{38}$

$\Rightarrow \alpha\beta \cdot \beta\gamma \cdot \gamma\alpha = (\alpha\beta\gamma)^3 \Rightarrow 3^{11+16+21} \cdot 7^{11+16+38}$

$\Rightarrow (\alpha\beta\gamma)^3 \cdot 3^{59} \cdot 7^{65}$  - степень нечетная, то т.к.

$\alpha\beta\gamma; 3^{25} \cdot 7^{33}$  левое квадратичное число +1 к степени 7

Однако  $\alpha\beta\gamma; 7^{38}$  (усл.)  $\Rightarrow \alpha\beta\gamma; 3^{25} \cdot 7^{38} \Rightarrow \alpha\beta\gamma \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$

$\alpha\beta\gamma = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot 3^{k_1+k_2+k_3} \cdot 7^{m_1+m_2+m_3}$ , т.к. нужно наименьшее натур. число  $\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 1$

Подберём  $k_1, k_2, k_3, m_1, m_2, m_3$  под условия выполним.

$\alpha = 3^7 \cdot 7^{11}$ ;  $\beta = 3^4$ ;  $\gamma = 3^{14} \cdot 7^{27}$

Не трудно проверить, что все условия выполняются, т.к.:

$$\left. \begin{array}{l} 7+4 \geq 11 \\ 4+14 \geq 18 \\ 7+14 \geq 21 \\ 11+0 \geq 11 \\ 11+27 \geq 38 \\ 0+27 \geq 76 \end{array} \right\} \text{Все выполнимо.}$$

Таким  $\alpha\beta\gamma = 3^{7+4+14} \cdot 7^{11+0+27} = 3^{25} \cdot 7^{38} \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$

Следует доказать выше.

Ответ:  $\alpha\beta\gamma = 3^{25} \cdot 7^{38}$  - наименьшее произведение



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a \neq b$ ,  $b \neq 0$ , т.к.  $\frac{a}{b}$  - несократимая

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

Если  $\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$  можно сократить на  $m \neq 1$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b, a^2-8ab+b^2) = m$$

$$\text{НОД}(a+b, (a+b)^2 - 10ab) = m$$

$$\text{НОД}(a+b, -10ab) = m$$

Значит, что  $m \mid d$ , т.к.  $a+b \nmid d$  т.к.  $b \neq 0$  т.к.  $\frac{a}{b}$  несократимая

Значит, что  $m \mid b$ , т.к.  $a+b \nmid b$ , т.к.  $a \neq b$ , т.к.  $\frac{a}{b}$  несократимая

•  $m \leq 10$ , т.к. одно из слаг.:  $-10ab$ , при этом

•  $\text{НОД}$  от него исчез не  $a$  и не  $b$ , а значит  $10$  - максимум.

• Оценим:  $m \leq 10$

Найдем  $m=10$ : при  $a=7; b=3$ , дробь  $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$  - несократимая

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{7+3}{49+9-8 \cdot 21} = \frac{10}{58-168} = \frac{10}{-110}, \text{ видно, что } m=10 \text{ можно сократить на}$$

Пример для  $m=10$

Ответ:  $m=10$  - наибольшее число, на которое можно сократить дробь  $\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$ , при  $\frac{a}{b}$  - несократимой дроби.

Страница 3



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(2) \sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

Замена:  $t = 2x^2 + x + 3$ ;  $k = 1 - 4x$

$$\sqrt{t+k} - \sqrt{t} = k$$

$$\sqrt{t+k} = k + \sqrt{t} \quad |^2$$

1) Рассмотрим  $(*)$ :

$$\begin{cases} t+k = k^2 + 2k\sqrt{t} + t \\ t \geq 0 \\ t+k \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} k=0 \\ k+2\sqrt{t}-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k=0 \\ k+2\sqrt{t}-1 \geq 0 \end{cases} \quad \cancel{k+2\sqrt{t}-1} = 1-k \quad |^2$$

$$\begin{cases} k=0 \\ \begin{cases} 4t = k^2 - 2k + 1 \\ t \geq 0; \cancel{1-k} \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

2) Решим  $(*)$ :

$$\begin{cases} k=0 \\ \cancel{t \neq 0} \\ t \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k=0 \\ t+k \geq 0 \quad (*)_1 \\ t \geq 0; \cancel{t+k \geq 0} \\ 4t = k^2 - 2k + 1 \\ t+k \geq 0 \quad (*)_2 \\ t \geq 0; \cancel{t+k \geq 0} \end{cases}$$

2.1) Решим  $(*_1)$  с обратной заменой:

$$\begin{cases} 4x = 1 \\ 2x^2 - 3x + 4 \geq 0 \\ 2x^2 + x + 3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ 2 \cdot \frac{1}{16} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \geq 0 - \text{верно} \\ 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 3 \geq 0 - \text{верно} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

2.2) Решим  $(*_2)$  с обратной заменой:

$$\begin{cases} 8x^2 + 4x + 12 = 16x^2 = 8x \\ 2x^2 - 3x + 4 \geq 0 \\ 2x^2 + x + 3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - x - 3 = 0 \\ 2x^2 - 3x + 4 \geq 0 \\ 2x^2 + x + 3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{2} \\ 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 4 \geq 0 - \text{верно} \Rightarrow x = -1 \\ 2 \cdot (-1)^2 - 1 + 3 \geq 0 - \text{верно} \Rightarrow \\ x = \frac{3}{2} \\ 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 \geq 0 - \text{верно} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ 2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 3 \geq 0 - \text{верно} \end{cases}$$

3) Проверим корни из полученных корней подстановкой:

$$3.1) x = \frac{1}{4} \rightarrow (\square): \sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{4} + 4} - \sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 3} = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{\frac{3}{8}} = 0 - \text{верно} \Rightarrow x = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Страница 4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3.2) x = -1 \rightarrow (\square): \sqrt{2(-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 4} - \sqrt{2(-1)^2 + 3 \cdot 1} = 1 - 4 \cdot (-1)$$

$$\sqrt{9} - \sqrt{4} = 5 \\ 1=5 - \text{неверно} \Rightarrow x = -1 - \text{не корень}$$

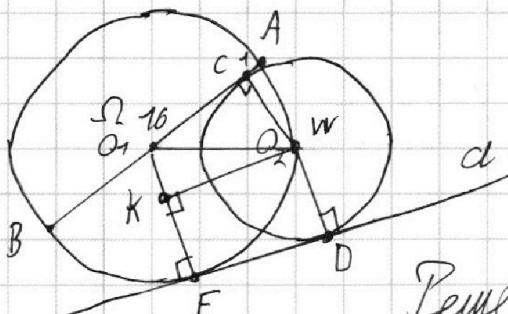
$$3.3) x = \frac{3}{2} \rightarrow (\square): \sqrt{2 \cdot \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4} - \sqrt{2 \cdot \frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 3} = 1 - 4 \cdot \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{9} = 1 - 6 \\ -1 = -5 - \text{неверно} \Rightarrow x = \frac{3}{2} - \text{не корень}$$

Ответ:  $x = \frac{1}{4}$  - корень уравнения.

Страница 5

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!**Решение:**

Дано: окр.  $\Sigma$ . АВ-диаметр.  
 $AB$  касается окр.  $W$  в  $C$ .  
 $AC=1$ ;  $BC=16$ ;  $O_2 \in \Sigma$ .  
Треуг.  $a$  касается  $W$  в т.  $D$ ;  
 $a$  касается  $\Sigma$  в т.  $E$   
Найти:  $DE$ .

- 1) АВ-диаметр. В  $\Sigma$  ( $O_1; R_1$ )  $\Rightarrow R_1 = \frac{AB}{2} = \frac{AC+BC}{2} = 8,5$ .
- 2) Д.н.  $O_2D$ ;  $O_1E$ ;  $O_1O_2$ .  $O_1E \perp a$  (но сб. бы недоказанной)
- 3)  $O_2 \in \Sigma$  ( $O_1; R_1$ )  $\Rightarrow O_1O_2 = R_1 = 8,5$
- 4)  $E \in \Sigma$  ( $O_1; R_1$ )  $\Rightarrow O_1E = R_1 = 8,5$
- 5)  $BO_1 + O_1C = BC \Rightarrow O_1C = BC - BO_1 = BC - R_1 = 7,5$ .
- 6) Д.н.  $O_2C$ , причем  $O_2C \perp AB$ , м.в. АВ-радиус  $w(O_2; R_2)$  Вт.ч.
- 7) Рассл.  $\Delta O_1O_2C$ -прям./гр. (м.в.  $O_2C \perp AB$  (но пункту 6))
  - \*  $O_1O_2^2 = O_2C^2 + O_1C^2$  (но т. Тиофагора)
  - $O_2C^2 = O_1O_2^2 - O_1C^2 = 8,5^2 - 7,5^2 = 1 \cdot 16 > 0$
  - $O_2C = 4 = R_2$ , м.в. С-точка касания  $w \neq O_2C = R_2$ .
- 8)  $O_2D = R_2 = 4$  (но м.в.  $D \in w(O_2; R_2)$ ).
- 9) Д.н.  $K \in O_1E$ , причем  $O_2K \perp O_1E$
- 10)  $O_1E \perp a$  (п.2)  $\left\{ \begin{array}{l} O_1E \parallel O_2D \text{ (но сб. бы 2 паралл. прям.)} \\ O_2D \perp a \text{ (п.2)} \end{array} \right\} \Rightarrow O_1E \perp O_2D$  (но сб. бы 2 паралл. прям. вертикаль)  
недоказано
- 11)  $O_1E \perp a$  (п.2)  $\left\{ \begin{array}{l} O_1E \perp KO_2 \text{ (п.9)} \\ O_2D \perp KO_2 \text{ (п.10)} \end{array} \right\} \Rightarrow EK \parallel O_2D \parallel FD$  (но сб. бы 2 паралл. прям. вертикаль)
- 12)  $FD \parallel KO_2$  (п.11)  $\left\{ \begin{array}{l} FD \parallel KO_2 \\ O_1E \parallel O_2D \text{ (п.10)} \end{array} \right\} \Rightarrow EKO_2D$  - паралл.мн (но окр.)
- 13)  $EKO_2D$  - паралл.мн (п.12)  $\Rightarrow EK = O_2D = 4$  (но сб. бы паралл.мн)
- 14)  $O_1K + KE = O_1E \Rightarrow O_1K = O_1E - KE = 8,5 - 4 = 4,5$

Страница 7



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15) Рассмотрим  $O_1KO_2$  - прямой угл. (м.р.  $O_2K \perp O_1E$  (но н. 9))

$$\Rightarrow O_1O_2^2 = O_1K^2 + O_2K^2 \text{ (по т. Пифагора)}$$

$$O_2K^2 = O_1O_2^2 - O_1K^2 = 8,5^2 - 4,5^2 = 4 \cdot 13$$

$$O_2K = 2\sqrt{13}$$

16) ~~EKO<sub>2</sub>D~~ - параллелограмм (н. 12)

$$\Rightarrow O_2K = ED \text{ (но сб. ву паралл.)}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{13}$$

Ответ:  $ED = 2\sqrt{13}$

Справочная

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x+2y = z ; \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} ; \text{Найти: Максимум } \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$\frac{3y+x}{xy} = \frac{2}{3x+2y} \Rightarrow \frac{6y^2 + 3x^2 + 9xy + 2xy - 2xy}{xy(3x+2y)} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \\ (x+y)(x+2y) = 0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ 3x+2y \neq 0 \end{cases}$$

1) Если  $x \neq y < 0$ :

$$\Rightarrow x = -y \Rightarrow 3x+2y = -3y+2y = -y = z$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3y^2 - 4y^2 - y^2}{y^2 - 6y^2} = \frac{-2y^2}{-5y^2} = \underline{0,4}$$

2) Если  $x+2y=0 \Rightarrow 3x+2y = -6y+2y = -4y = z$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{72y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 - 6y^2} = \frac{-8y^2}{-2y^2} = \underline{4}$$

3) И.к.  $y > 0,4$  (полученный в 1 и 2 пунктах)  
и рассмотрены все случаи  $\Rightarrow$

Ответ:  $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$  максимум равно 4, с выполнением

Условий  $3x+2y = z$  и  $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ .

Страница 6



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ell \cdot \frac{x-4}{xy} = 2 - \text{ первое условие}$$

$$\ell \cdot \frac{30-18}{30 \cdot 18} = 2 \Rightarrow \ell \cdot 12 = 2 \cdot 18 \cdot 30$$

$$\ell = \frac{36 \cdot 30}{12} = 90 \text{ км.} - \text{расстояние между}$$

A и B.

Ответ: расстояние AB = 90 км.

Страница 11



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть скорость велосипедиста  $y \text{ км/ч}$ ; скорость  
мотоциклистка  $x \text{ км/ч}$ ; расстояние  $AB = l \text{ км}$

Тогда:  $\frac{l}{y} - \frac{l}{x} = 2$ , т.к. велосипедист проезжает на 2  
часа позже мотоциклиста

$$\bullet \frac{l}{y} - \frac{l}{x} = 2$$

$$\frac{l}{y} - \frac{l}{x} = 96, \text{ т.к. мотоциклист проходит бы на 96 км}$$

больше, чем велосипедист, если бы ехали  
стаком же, сколько он в  $AB$ , а в  
мотоцикле - сколько велосипедиста.

$$\bullet \frac{l}{y} - \frac{l}{x} = 96$$

$$\frac{l}{y+6} - \frac{l}{x+6} = \frac{5}{4} \quad (\text{также из } y \text{ и } x)$$

$$\bullet \frac{l}{y+6(x+y)+36} = \frac{5}{4}$$

$$\begin{array}{r} x^4 \\ \times 4 \\ \hline 6 \\ + 288 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{l}{y+6} - \frac{l}{x+6} = \frac{5}{4} \\ \frac{l}{y+6(x+y)+36} = \frac{5}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow (x+y) \cdot \frac{l(x-y)}{xy} = 96 \Rightarrow x+y = \frac{96}{2} = 48 (\#)$$

$$y = 48 - x$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{l}{y+6} - \frac{l}{x+6} = \frac{5}{4} \\ \frac{l}{y+6(x+y)+36} = \frac{5}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{8xy}{xy+6(x+y)+36} = 5 \Rightarrow \frac{8xy}{xy+324} = 5$$

$$\Rightarrow 8xy = 5xy + 324 \cdot 5 \Rightarrow 3xy = 3 \cdot 102 \cdot 5 \Rightarrow xy = 540 (\#)$$

$\neq$   $xy + 324 \neq 0$  - верно, т.к. скорости  $> 0$

Решим систему из (#):  $\begin{cases} x+y=48 \\ xy=540 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=48 \\ x^2-48x+540=0 \end{cases} (\star)$

Решим (\*):

$$D = 48^2 - 4 \cdot 540 = 4(24^2 - 540) = 16(12^2 - 335) = 16 \cdot 9 > 0, \text{ реш.}$$

$$x_{1,2} = \frac{48 \pm \sqrt{144}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=30 \text{ км/ч} \\ x=18 \text{ км/ч} \end{cases}$$

Если  $x=30 \text{ км/ч}$  - скорость мотоциклистки, то  $y=18 \text{ км/ч}$  -  
скорость велосипедиста, но тут что-то прошлое, что все усло-  
вия выполнены.

Если  $x=18 \text{ км/ч}$   $\Rightarrow y=30 \text{ км/ч}$ ; но тогда  $\frac{l}{y} - \frac{l}{x} = \frac{18-12}{30-18} = 2$ ,  
что не возможно, т.к. расстояние  $AB$  - неизменное  
км.  $\neq$  эта пара скоростей не подходит.

Ответ: скорость мотоциклистки -  $30 \text{ км/ч}$ ;  
скорость велосипедиста

Страница 10

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15)  $\angle n. XK \perp \alpha$ ;  $K \in \alpha$ ;  $XK \perp BC$ ;  $L \in BC$

16) Доказ.  $\Delta XKY$ - правильный треугл. ( $XK \perp \alpha$ )

$$\angle CYF = 45^\circ \Rightarrow \angle YXK = 45^\circ \text{ (по т. о смущ. ушов. треуг.)}$$

$$\Rightarrow XK = KY = XY \cdot \sin 45^\circ = \frac{XY}{\sqrt{2}} = x$$

17)  $\angle C = XK = x$ , м.к.  $\angle YCB = 90^\circ = \angle CLX = \angle CKX$ , значит одинаковы (но доп. построен. и ущл.)

18)  $BL = 4x$

~~BL = 4x~~

18) Докажем, что  $XE$ -диаметр:

Методом координат. Пусть  $F(0; r)$ ,

$E(r; 0)$ , где  $r$ - радиус  $w(O; R)$

$$\angle CFX \neq FXC = 45^\circ \text{ (чтобы было доказано) (пункт 17)}$$

~~O(r; r)~~

Уравн.  $w$ :  $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$

$XF: y = r + x$ , м.к. угол наклона  $45^\circ$  ( $\angle FOC = \angle FXC$ )

$$\Rightarrow \text{коэф. перед } x, k = 1; F \in X \Rightarrow r = 0 \cdot 1 + b \Rightarrow b = r$$

$$\begin{cases} y = r + x \\ (x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = r + x \\ x^2 + (r-x)^2 = r^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = r + x \\ 2x^2 - 2xr = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=r \end{cases} \text{ - точка } F \quad \text{и } \overline{EX} = \sqrt{(2r-0)^2 + (r-r)^2} = 2r \text{ - диаметр.}$$

$$\begin{cases} x=r \\ y=0 \end{cases} \text{ - точка } X$$

19)  $BL = XE = 4x$ , м.к.  $OE \perp AB$  (но пункту 7)

~~и~~   $OF \perp BC$  (но п. 7)

м.к.  $XL \perp BC$  (п. 15)

и  $\angle ABC$ - прямой

$\Rightarrow BEXL$ - прям. уг.

$$\Rightarrow BL = XE = 4x$$

$$BE = XL = r = 2x$$

(но сб. ву не могут иметь)

20)  $XL = 2x$ , м.к.  $FO = 2x$  (как радиус)

(к п. 19) и она равна, как промтв. см. ~~не~~ не иметь

21)  $BC = CL + BL = x + 4x = 5x$

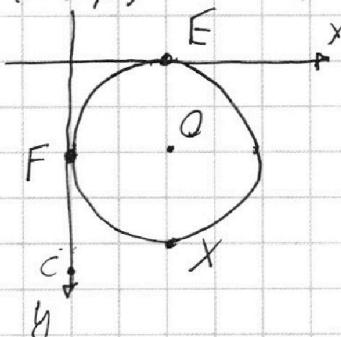
22) Пусть  $AE = y$ , тогда  $AD = y$  (но пункту 3); 23)  $AB = AE + BE = y + 2x$

24)  $S_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AB}{2} = \frac{5x \cdot (y+2x)}{2}$ , но сб. ву могут иметь)

25)  $S_{\triangle ABC} = \frac{P_{\triangle ABC}}{2} \cdot r = (m.k. \delta \triangle ABC \text{ описано } w(0; r))$

$$= \frac{5x + y + 2x + y + 5x}{2} \cdot 2x = (2y + 10x)x$$

Страница 13





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$26) \text{ Уз } n. 24 \div 25 \Rightarrow \frac{5x(y+2x)}{2} = x(2y+10x)$$

$$\begin{aligned} 5y + 10x &= 4y + 20x \\ y &= 10x \end{aligned} \Rightarrow \frac{y}{x} = 10 \Rightarrow \frac{y}{3x} = 3\frac{1}{3}$$

$$27) AD = AE = y \text{ (n. 22)}$$

$$DC = CF = BC - FL \Rightarrow 1 = 4x - FL = 3x$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{y}{3x} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ (m n. 26)}$$

2x, m.r. OX = 2x; OX \parallel FL \text{ (по первому)}

FO \parallel X \text{ (m.r.,}

эти первы. к BC)

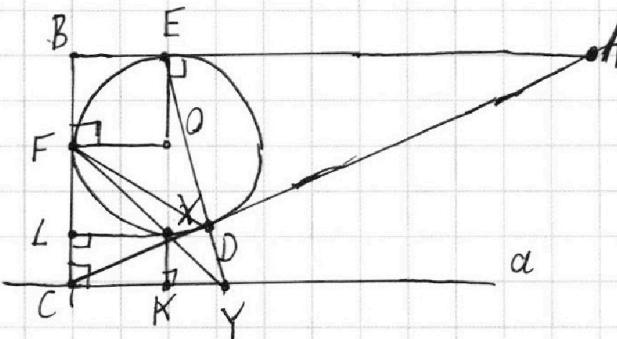
Ответ: AD:DC = 10:3.

Страница 14

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\triangle ABC$  - прямой треугольник.

$\angle B$  - прямой.

$w(O; R)$  касается  $\triangle ABC$ .

$D, E, F \in w$ ;  $D \in AC$ ;  $E \in AB$ ;  $F \in BC$

$\alpha$  ~~прямая~~  $\alpha \perp BC$ .

Сед.

$ED \cap \alpha = Y$ .  $FY \cap w = X$

причем  $F$  и  $X$  не совпадают.

$$EX = 2\sqrt{2}XY.$$

Найти:  $AD : DC$

1)  $\text{D. n. } FD$ .

2) Пусть  $x = \frac{XY}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}XY}{2}$ , тогда  $EX = 4x$

3)  $w$  касается  $\triangle ABC$ ;  $D, E, F$  - точки касания (чсл.)

$\Rightarrow FC = FD \Rightarrow \triangle FCD - \text{Vfz}$ , причем  $\angle CFD = \angle CDF$

$\Rightarrow AE = AD \Rightarrow \triangle AED - \text{Vfz}$ , причем  $\angle AED = \angle ADE$ .

4) Пусть  $\angle ACB = \alpha \Rightarrow \angle BAC = 90 - \alpha$ , м.к. сумма углов треуг. равна  $180^\circ$

5)  $\triangle CFD - \text{Vfz}$  (н.з)  $\Rightarrow \angle CFD = \angle CDF = 90 - \frac{\alpha}{2}$ , но т. о сумме углов

6)  $\triangle AED - \text{Vfz}$  (н.з)  $\Rightarrow \angle AED = \angle ADE = 45 + \frac{\alpha}{2}$ , но т. о сумме углов

7)  $\text{D. n. } OE; OF$ , причем  $OF \perp BC$ , м.к.  $F$  - т. касания

$OF \perp AB$ , м.к.  $E$  - т. касания

8)  $\angle XED + \angle DEA = \angle ADX$

$$\angle XED = 90 - (45 + \frac{\alpha}{2}) = 45 - \frac{\alpha}{2}$$

9)  $\angle XED - \text{англ.} \Rightarrow \angle XD = 2\angle XED = 90 - \alpha$  (но сб-бы анигл.)

10)  $\angle XFD - \text{англ.} \Rightarrow \angle XFD = \frac{XD}{2} = 45 - \frac{\alpha}{2}$

11)  $\angle XFD + \angle XFC < \angle CFD \Rightarrow \angle XFC = 90 - \frac{\alpha}{2} - (45 - \frac{\alpha}{2}) = 45^\circ$

12)  $\angle XFO + \angle XFC = \angle CFO = 90^\circ$ , м.к.  $OF \perp BC$

$$\angle XFO = 90 - 45^\circ = 45^\circ$$

13) Доказ.  $FO \perp BC$  (но пытаемся?)  $\Rightarrow FO \parallel \alpha$  (но сб-бы паралл.)

$\alpha \perp BC$  (чсл.)

найд.

14) Доказ.  $FO \parallel \alpha$  (н.з)

$FY$  - ~~секущая~~ секущая.

$\angle OFY \text{ и } \angle FYC$  - ~~известны~~ известны.

$$\Rightarrow \angle CYF = \angle OFY = 45^\circ$$

(но сб-бы ~~известны~~ известны. н.з.)

Страница 12

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$A \circ \begin{array}{l} x \\ \times \end{array} \quad B \circ \begin{array}{l} l \\ \times \end{array} \quad \frac{l}{x} - \frac{l}{y} = 2 \quad \cancel{\frac{l}{x}} \quad l \frac{x-y}{xy} = 2$$

$$\cancel{\frac{l}{y}} \quad \frac{xl}{y} - \frac{yl}{x} = 96$$

$$\begin{array}{r} \frac{y}{6} \\ \times 288 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\frac{x^2 - y^2}{xy} \quad l = 96 \quad (x+y) \cdot 2 = 96$$

$$x+y = 48 \quad y = 48-x$$

$$\frac{l}{y+6} - \frac{l}{x+6} = 1,25 \quad l \frac{x-y}{xy+6x+6y+36} = 1,25$$

$$\begin{array}{r} 270 \\ 135 \end{array}$$

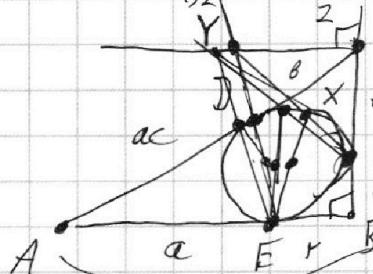
$$\frac{2xy}{xy+324} = \frac{5}{9}$$

$$8xy = 5xy + 5 \cdot 324$$

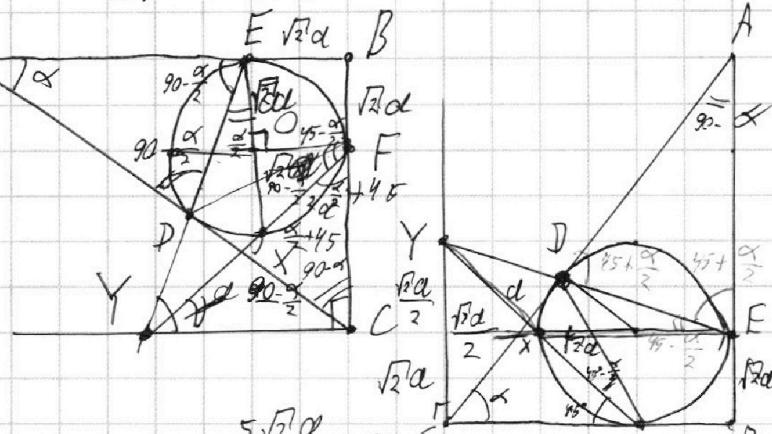
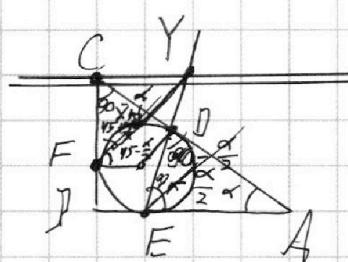
$$\begin{cases} xy = 540 \\ x+y = 48 \end{cases} \quad 48x - x^2 = 540$$

$$x^2 - 48x + 540 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{48 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x=30 \\ x=18 \Rightarrow y=30 \end{cases} \quad y=78 \quad D = 48^2 - 4 \cdot 540 = 4(24^2 - 540) = 16(12^2 - 135) = 16 \cdot 9 =$$



$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 2ab &= a^2 + 2ab + r^2 + b^2 + 2ab + r^2 \\ ab &= ar + br + r^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2 \\ a + b &= c + 2r \end{aligned}$$



$$B+A = C+2\sqrt{2}\alpha \quad \frac{5\sqrt{2}\alpha}{2} = BC \quad B = \frac{3\sqrt{2}\alpha}{2}$$

$$(A+B)\cos\alpha = B + \sqrt{2}\alpha^2$$

$$A+B = \frac{B+\sqrt{2}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$A = \frac{B+\sqrt{2}\alpha}{\cos\alpha} - B = \frac{3\sqrt{2}\alpha}{2} - \frac{\frac{5\sqrt{2}\alpha}{2}}{\cos\alpha} - \alpha$$

Страница 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} = 1 - 4x + \sqrt{2x^2 + x + 3}$$

$$t = 2x^2 + x + 3$$

$$\frac{1}{8} - \frac{3}{4}k = 1 - 4x \\ \frac{1}{8} - \frac{3}{4}k = -\frac{5}{2} + 4 \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{2}k = 3\frac{3}{8}$$

$$\frac{7}{8} + \frac{1}{2}k = 3\frac{3}{8}$$

$$K = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$K + 2t - 1 = 0$$

$$\frac{9}{2} + \frac{1}{2} + 2t - 1 = 0$$

$$3x^2 - 4y^2 - z^2$$

$$x^2 - 6y^2$$

$$2 - 3 = 1 - 4x$$

$$-0,5 = -0,5$$

$$2 + 3 + 4 = 9$$

$$2 - 7 + 3 = 8$$

$$1 = 1 -$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$-\frac{1}{4}y + \frac{1}{4}y = -y$$

$$1) 12y^2 - 4y^2 - 16y^2$$

$$4y^2 - 6y^2$$

$$abc \cdot 3^{71} \cdot 7^{11} \cdot 6c : 3^{78} \cdot 7^{10} \cdot ac : 3^{21} \cdot 7^{38}$$

$$\frac{c}{a} : 3^{7} \cdot 7^{5} ; \frac{c}{b} : 3^{10} \cdot 7^{27} ; d : 3^{3} \cdot 7^{22}$$

$$\theta = 7 \cdot 11 \quad a = 3^{77} \cdot 7^{77} \cdot c$$

$$a = 3^{K_1} \cdot 7^{m_1} \quad b = 3^{K_2} \cdot 7^{m_2} \quad c = 3^{K_3} \cdot 7^{m_3}$$

$$ab = 3^{K_1+K_2} \cdot 7^{m_1+m_2}$$

$$abc = 3^{K_1+K_2+K_3} \cdot 7^{m_1+m_2+m_3}$$

$$m_1 + m_2 \geq 71$$

$$m_2 + m_3 \geq 71$$

$$K_1 + K_2 \geq 71$$

$$m_1 + m_3 \geq 30$$

$$K_2 + K_3 \geq 78$$

$$m_1 + m_2 + m_3 \geq 165$$

$$(K_1 + K_2 + K_3)$$

### Черновик

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 16 & 15 \\ \checkmark & \frac{3}{2} & \frac{5}{5} \\ & & & & & & & \frac{13-48}{77-58} & = \\ & & & & & & & = & \end{array}$$

$$10(a+b)(a+b)^2 - 10ab = m$$

$$(a+b, 10ab) = m - \frac{10}{10} =$$

$$(\frac{a+b}{8+1}, 10ab) = m - \frac{9+49-8 \cdot 21}{10} = 108$$

$$3yz + xz - 2xy = 0 \quad (a+b, 10ab) = m - \frac{210}{10} = 108$$

$$3y(3x+y) + x(3x+2y) - 2xy = 0 \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{210}{10} = 108$$

$$9xy + 6y^2 + 3x^2 + 3xy - 3xy = 0 \quad \frac{110}{110} = 10$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$1) z = -4y \quad 2) z = -y$$

$$1) -4y^2 = \boxed{y} \quad 2) 3y^2 - 4y^2 - y^2 = \frac{-2y^2}{-5y^2} = \frac{2}{5}$$

$$abc - \text{мин.}$$

$$R = 77 \cdot 2 \cdot 32 = 8$$

$$B$$

$$8 \cdot 9 = 8\sqrt{2}$$

$$\frac{a+b+c}{2} =$$

$$5x - 2y (10x+2y) \cdot 2x =$$

$$C = 5x \cdot (4+2x)$$

$$3x$$

$$2x$$

$$y$$

$$13x^2$$

$$10x$$

$$12x^2 + 5^2$$

$$4$$

$$2x$$

$$F$$

$$D$$

$$A$$

$$B$$

$$E$$

$$C$$

$$Y$$

$$X$$

$$x$$

$$y$$

$$z$$

$$1$$

Страница 1