МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω.

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам
$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$
Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B, а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B.

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC, проходящую через вершину C, в точке Y; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω. Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть: $a = \alpha \cdot 3^{k_1} \cdot 7^{m_1}$; $b = \beta \cdot 3^{k_2} \cdot 7^{m_2}$; $c = \gamma \cdot 3^{k_3} \cdot 7^{m_3}$

$ab \vdots 3^{11} \cdot 7^{11}$, $bc \vdots 3^{18} \cdot 7^{16}$; $ac \vdots 3^{21} \cdot 7^{38}$

$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 \vdots 3^{11+18+21} \cdot 7^{11+16+38}$

$$\begin{array}{r} 11 \\ +38 \\ 16 \\ \hline 65 \end{array}$$

$\Rightarrow (abc)^2 \vdots 3^{50} \cdot 7^{65}$ – степень нечетная, но т.к. слева квадрат целых чисел +1 к степени 7

$\Rightarrow abc \vdots 3^{25} \cdot 7^{33}$

Однако $ac \vdots 7^{38}$ (усл.) $\Rightarrow abc \vdots 3^{25} \cdot 7^{38} \Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$ оценка

$abc = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot 3^{k_1+k_2+k_3} \cdot 7^{m_1+m_2+m_3}$, т.к. нужно наименьшее натур. число $\Rightarrow$ ~~α~~ $\alpha = \beta = \gamma = 1$

Подберём ~~и~~ k_1, k_2, k_3, ~~m~~ m_1, m_2, m_3 чтобы условия выполнялись.

$a = 3^7 \cdot 7^{11}$; $b = 3^4$; $c = 3^{14} \cdot 7^{27}$

Не трудно проверить, что все условия выполняются, т.к.:

$$\begin{cases} 7+4 \geq 11 \\ 4+14 \geq 18 \\ 7+14 \geq 21 \\ 11+0 \geq 11 \\ 11+27 \geq 38 \\ 0+27 \geq 16 \end{cases}$$
все выполняется.

Причём $abc = 3^{7+4+14} \cdot 7^{11+0+27} = 3^{25} \cdot 7^{38} \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$

Оценка доказана выше.

Ответ: $abc = 3^{25} \cdot 7^{38}$ – наименьшее произведение

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a \not\vdots b$; $b \not\vdots a$, т.к. $\frac{a}{b}$ - несократима

НОД$(a,b)=1$

Если $\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$ можно сократить на $m \Rightarrow$

$\Rightarrow$ НОД$(a+b,\ a^2-8ab+b^2)=m$

НОД$(a+b,\ \underbrace{(a+b)^2}_{\vdots\, a+b}-10ab)=m$

НОД$(a+b,\ -10ab)=m$

Заметим, что $m \not\vdots a$, т.к. $a+b \not\vdots a \Leftarrow$ т.к. $b \not\vdots a \Leftarrow$ т.к. $\frac{a}{b}$ несократ.

Заметим, что $m \not\vdots b$, т.к. $a+b \not\vdots b$, т.к. $a \not\vdots b$, т.к. $\frac{a}{b}$ - несократ.

$\Rightarrow m \leqslant 10$, т.к. одно из слаг.: $-10ab$, причем в НОД от него идёт не a и не b, а значит 10 - максимум.

$\Rightarrow$ Оценка: $m \leqslant 10$

Найдем $m=10$: при $a=7;\ b=3$, дробь $\frac{a}{b}=\frac{7}{3}$ - несократима

$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}=\frac{7+3}{49+9-8\cdot 21}=\frac{10}{58-168}=\frac{10}{-110}$, видно, что ~~мо~~ можно сократить на $m=10$

Пример дан для $m=10$

Ответ: $m=10$ - наибольшее число, на которое можно сократить дробь $\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$, при $\frac{a}{b}$ - несократ. дроби.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(□) $\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$

Замена: $t = 2x^2+x+3$; $k = 1-4x$

$\sqrt{t+k} - \sqrt{t} = k$

$\sqrt{t+k} = k+\sqrt{t} \quad |\uparrow^2$

(□) $\begin{cases} t+k = k^2+2k\sqrt{t}+t \quad (*) \\ t \geq 0 \\ t+k \geq 0 \end{cases}$

1) Рассм. (*):

$\cancel{t}+\cancel{k} = k^2+2k\sqrt{t}+\cancel{t}$

$\left[\begin{array}{l} k=0 \\ k+2\sqrt{t}-1=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} k=0 \\ \cancel{k-1} = 2\sqrt{t} = 1-k \quad |\uparrow^2 \end{array}\right.$

(*) $\left[\begin{array}{l} k=0 \\ \begin{cases} 4t = k^2-2k+1 \\ t \geq 0 ; \cancel{1-k} \cancel{1-k \geq} 0 \end{cases} \end{array}\right.$

2) Вернемся в (□):

$\cancel{\begin{cases} k=0 \\ t+k \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} k=0 \\ t+k \geq 0 \\ t \geq 0 ; \cancel{1-k \geq 0} \end{cases} (*1) \\ \begin{cases} 4t = \cancel{4}k^2-2k+1 \\ t+k \geq 0 \\ t \geq 0 ; \cancel{1-k} \geq 0 \end{cases} (*2) \end{array}\right.$

2.1) Решим (*1) с ~~зам~~ обратной заменой:

$\begin{cases} 4x=1 \\ 2x^2-3x+4 \geq 0 \\ 2x^2+x+3 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ 2\cdot\frac{1}{16} - 3\cdot\frac{1}{4} + 4 \geq 0 \text{ - верно} \\ 2\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 3 \geq 0 \text{ - верно} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}}$

2.2) Решим (*2) с обратной заменой:

$\begin{cases} 8x^2+4x+12 = 16x^2 \cancel{-8x} \\ 2x^2-3x+4 \geq 0 \\ 2x^2+x+3 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2-x-3=0 \\ 2x^2-3x+4 \geq 0 \\ 2x^2+x+3 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{3}{2} \end{array}\right. \\ 2x^2-3x+4 \geq 0 \\ 2x^2+x+3 \geq 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ 2\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+4 \geq 0 \text{ - верно} \\ 2\cdot(-1)^2-1+3 \geq 0 \text{ - верно} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=-1} \\ \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ 2\cdot\frac{9}{4} - 3\cdot\frac{3}{2} + 4 \geq 0 \text{ - верно} \\ 2\cdot\frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 3 \geq 0 \text{ - верно} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}} \end{array}\right.$

3) Проверим каждый из полученных корней подстановкой:

3.1) $x=\frac{1}{4} \rightarrow$ (□): $\sqrt{2\cdot\frac{1}{16} - \frac{3}{4} + 4} - \sqrt{2\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 3} = 1 - \frac{4}{4}$

$\sqrt{3\frac{3}{8}} - \sqrt{3\frac{3}{8}} = 0$ - верно $\Rightarrow$ $x = -\frac{1}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.2) $x=-1 \to (\square)$: $\sqrt{2(-1)^2-3\cdot(-1)+4}-\sqrt{2(-1)^2+3-1}=1-4\cdot(-1)$

$\sqrt{9}-\sqrt{4}=5$

$1=5$ - неверно $\Rightarrow x=-1$ - не корень

3.3) $x=\frac{3}{2} \to (\square)$: $\sqrt{2\cdot\frac{9}{4}-3\cdot\frac{3}{2}+4}-\sqrt{2\cdot\frac{9}{4}+\frac{3}{2}+3}=1-4\cdot\frac{3}{2}$

$\sqrt{4}-\sqrt{9}=1-6$

$-1=-5$ - неверно $\Rightarrow x=\frac{3}{2}$ - не корень

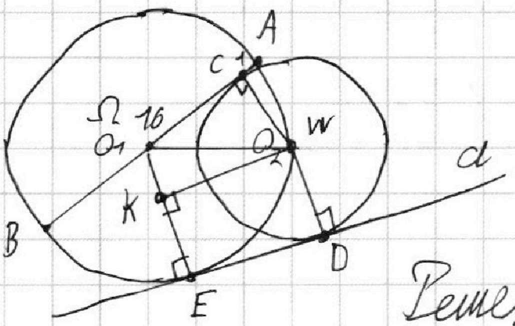
Ответ: $x=\frac{1}{4}$ - корень уравнения.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Дано: окр. Ω · AB - диаметр
AB касается окр. w в C.
$AC=1$; $BC=16$; $O_2 \in \Omega$.
Прям. a касается w в т. D;
a касается Ω в т. E
Найти: DE.

Решение:

1) AB - диаметр. в $\Omega(O_1; R_1) \Rightarrow R_1 = \frac{AB}{2} = \frac{AC+BC}{2} = 8{,}5$.

2) Д.п. O_2D; O_1E; O_1O_2. $O_1E \perp a$, $O_2D \perp a$ (по св-ву касательной)

3) $O_2 \in \Omega(O_1; R_1) \Rightarrow O_1O_2 = R_1 = 8{,}5$

4) $E \in \Omega(O_1; R_1) \Rightarrow O_1E = R_1 = 8{,}5$

5) $\underset{R_1}{BO_1} + O_1C = BC \Rightarrow O_1C = BC - BO_1 = BC - R_1 = 7{,}5$.

6) Д.п. O_2C, причем $O_2C \perp AB$, т.к. AB - касается $w(O_2; R_2)$ в т. C

7) Рассм. $\triangle O_1O_2C$ - прям/уг. (т.к. $O_2C \perp AB$ (по пункту 6)

$\Rightarrow O_1O_2^2 = O_2C^2 + O_1C_1^2$ (по т. Пифагора)

$O_2C^2 = O_1O_2^2 - O_1C_1^2 = 8{,}5^2 - 7{,}5^2 = 1 \cdot 16 > 0$

$O_2C = 4 = R_2$, т.к. C - точка касания $w \Rightarrow O_2C = R_2$ *.

8) $O_2D = R_2 = 4$ (по т.к. $D \in w(O_2; R_2)$.

9) Д.п. $K \in O_1E$, причем $O_2K \perp O_1E$

10) $O_1E \perp a$ (п.2), $O_2D \perp a$ (п.2) $\Big\} \Rightarrow O_1E \parallel O_2D$ (по св-ву 2 ~~парал~~ перпед. прям. в ~~пло~~ плоскости)

11) $O_1E \perp a$ (п.2), $O_1E \perp KO_2$ (п.9) $\Big\} \Rightarrow$ ~~EK~~ $KO_2 \parallel ED$ (по св. в 2 прям. перпенд. третьей.)

12) $ED \parallel KO_2$ (п.11), $O_1E \parallel O_2D$ (п.10) $\Big\} \Rightarrow EKO_2D$ - пар/мм (по опр.)

13) EKO_2D - пар/мм (п.12) $\Rightarrow EK = O_2D = 4$ (по св-ву пар/мма)

14) $O_1K + KE = O_1E \Rightarrow O_1K = O_1E - KE = 8{,}5 - 4 = 4{,}5$

Страница 7

15) Рассм. ΔO_1KO_2 – прям/уг. (т.к. $O_2K \perp O_1E$ (по п. 9)

$\Rightarrow O_1O_2^2 = O_1K^2 + O_2K^2$ (по т. Пифагора)

$O_2K^2 = O_1O_2^2 - O_1K^2 = 8,5^2 - 4,5^2 = 4 \cdot 13$

$O_2K = 2\sqrt{13}$

16) EKO_2D – пар-мм (п. 12)

$\Rightarrow O_2K = ED$ (по св-ву пар-мма)

$= \boxed{2\sqrt{13}}$

<u>Ответ</u>: $ED = 2\sqrt{13}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$3x+2y=z$; $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$; Найти: Максимум $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$

$\Downarrow$

$$\frac{3y+x}{xy}=\frac{2}{3x+2y} \Rightarrow \frac{6y^2+3x^2+9xy+2xy-2xy}{xy(3x+2y)}=0$$

$$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ x\neq 0 \\ y\neq 0 \\ 3x+2y\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+y)(x+2y)=0 \\ x\neq 0 \\ y\neq 0 \\ 3x+2y\neq 0 \end{cases}$$

1) Если $x+y=0$:

$\Rightarrow x=-y \Rightarrow 3x+2y=-3y+2y=-y=z$

$\Rightarrow \frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}=\frac{3y^2-4y^2-y^2}{y^2-6y^2}=\frac{-2y^2}{-5y^2}=\underline{0,4}$

2) Если $x+2y=0 \Rightarrow 3x+2y=-6y+2y=-4y=z$

$\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}=\frac{12y^2-4y^2-16y^2}{4y^2-6y^2}=\frac{-8y^2}{-2y^2}=\underline{4}$

3) Т.к. $4>0,4$ (полученных в 1 и 2 пунктах) и рассмотрены все случаи $\Rightarrow$

<u>Ответ:</u> $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ максимум равно 4, с выполнением условий $3x+2y=z$ и $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$l \cdot \frac{x-y}{xy} = 2$ - первое условие

$l \cdot \frac{30-18}{30 \cdot 18} = 2 \Rightarrow l \cdot 12 = 2 \cdot 18 \cdot 30$

$l = \frac{36 \cdot 30}{12} = 90$ км. - расстояние между А и В.

Ответ: расстояние $AB = 90$ км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) Пусть скорость велосипедиста y км/ч; скорость мотоциклиста x км/ч; расстояние $AB = \ell$ км

Тогда: $\frac{\ell}{y} - \frac{\ell}{x} = 2$, т.к. велосипед приезжает на 2 часа позже велосипеда

• $\ell \frac{x-y}{xy} = 2$

$x\frac{\ell}{y} - y\frac{\ell}{x} = 96$, т.к. мотоцикл проехал бы на 96 км больше, чем велосипедист, если бы ехал столько же, сколько он в AB, а мот. - столько же, сколько велосипед.

• $\ell \frac{x^2-y^2}{xy} = 96$

$\frac{\ell}{y+6} - \frac{\ell}{x+6} = \frac{5}{4}$ (тоже из усл.) ~~последн~~

$\times\, 48 \cdot 6 = 288$; $288 + 36 = 324$

• $\ell \frac{x-y}{xy+6(x+y)+36} = \frac{5}{4}$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \ell \frac{x-y}{xy} = 2 \\ \ell \frac{(x-y)(x+y)}{xy} = 96 \end{array}\right\} \Rightarrow (x+y)\cdot \frac{\ell(x-y)}{xy} = 96 \Rightarrow x+y = \frac{96}{2} = 48 \ (\#) \\ \qquad y = 48 - x \\ \ell \frac{x-y}{xy+6(x+y)+36} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{8xy}{xy+6(x+y)+36} = 5 \Rightarrow \frac{8xy}{xy+324} = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8xy = 5xy + 324\cdot 5 \Rightarrow 3xy = 3\cdot 108\cdot 5 \Rightarrow xy = 540 \ (\#) \\ xy + 324 \neq 0 \text{ верно, т.к. скорости } > 0 \end{cases}$$

Решим систему из (#): $\begin{cases} x+y=48 \\ xy=540 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=48 \\ x^2-48x+540=0 \ (*) \end{cases}$

Решим (*):

$D = 48^2 - 4\cdot 540 = 4(24^2-540) = 16(12^2-135) = 16\cdot 9 > 0$; 2 действ. реш.

$x_{1,2} = \frac{48\pm 12}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 30 \text{ км/ч} \\ x = 18 \text{ км/ч} \end{array}\right.$

Если $x = 30$ км/ч - скорость мотоциклиста, то $y = 18$ км/ч - скорость велосипедиста, не трудно проверить, что все условия выполнены.

Если $x = 18$ км/ч $\Rightarrow y = 30$ км/ч; но тогда $\ell \frac{x-y}{xy} = \ell \frac{-12}{30\cdot 18} = 2$, что не возможно, т.к. расстояние AB - неотрицательное. $\Rightarrow$ эта пара скоростей не подходит.

~~Ответ: Скорость мотоциклиста - 30 км/ч; скорость велосипедиста~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15) Д.п. $XK \perp \alpha$; $K \in \alpha$; $XL \perp BC$; $L \in BC$

16) Рассм. $\triangle XKY$ — прямоуг. треуг. ($XK \perp \alpha$)

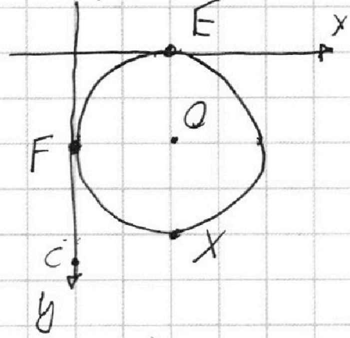
$\angle CYF = 45° \Rightarrow \angle YXK = 45°$ (по т. о сум. углов треуг.)

$\Rightarrow XK = KY = XY \cdot \sin 45° = \frac{XY}{\sqrt{2}} = x$

17) $LC = XK = x$, т.к. $\angle YCB = 90° = \angle CLX = \angle CKX$, а значит (по доп. построен. и усл.) $CLXK$ — ~~пар~~ прям~~мм~~ уг. (по опр.)

~~18) $BL = 4x$~~

~~$BL = XE$~~



18) Докажем, что XE — диаметр.: методом координат. Пусть $F(0; r)$; $E(r; 0)$, где r — радиус $w(O; r)$

$\angle CFX$ ~~$\angle FXC$~~ $= 45°$ (уже было доказано) (пункт 11)

$\Rightarrow O(r; r)$

Уравн. w: $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$

XF: $y = r + x$, т.к. угол наклона $45°$ (угол $\angle FXC$)

$\Rightarrow$ коэф. перед x, $k = 1$; $F \in XF \Rightarrow$ ~~y~~ $= 0 \cdot 1 + b \Rightarrow b = r$

$\begin{cases} y = r + x \\ (x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = r + x \\ x^2 + (x-r)^2 = r^2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = r + x \\ 2x^2 - 2xr = 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = r \end{cases} \text{ — точка } F \\ \begin{cases} x = r \\ y = 2r \end{cases} \text{ — точка } X \end{array}\right.$ теперь $EX = \sqrt{(2r-0)^2 + (r-r)^2} = 2r$ — диаметр.

19) BL ~~$= XE = 4x$~~, т.к. $OE \perp AB$ (по пункту 7)
~~т.к. $OF \perp BC$ (по п. 7)~~
т.к. $XL \perp BC$ (п. 15)
т.к. $\angle ABC$ — прямой

$\Rightarrow BEXL$ — прям. уг.
$\Rightarrow BL = XE = 4x$
$BE = XL = r = 2x$
(по св-ву пар. мма)

20) $XL = 2x$, т.к. $FO = 2x$ (как радиус) (к п 19) и они равны, как против. ст. ~~пар. мма~~ прямоугольника

21) $BC = CL + BL = x + 4x = 5x$

22) Пусть $AE = y$, тогда $AD = y$ (по пункту 3); 23) $AB = AE + BE = y + 2x$

24) $S_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AB}{2} = \frac{5x \cdot (y+2x)}{2}$, по св-ву площадей)

25) $S_{\triangle ABC} = \frac{P_{\triangle ABC}}{2} \cdot r =$ (т.к. в $\triangle ABC$ вписана $w(O; r)$)

$= \frac{5x + y + \cancel{2x} + y + 5x}{2} \cdot 2\cancel{x} = (2y + 12x)x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

26) Из п. 24 ÷ 25 $\Rightarrow \frac{5\cancel{x}(y+2x)}{2} = \cancel{x}(2y+10x)$

$5y + 10x = 4y + 20x$
$y = 10x$ $\Rightarrow \frac{y}{x} = 10 \Rightarrow \frac{y}{3x} = 3\frac{1}{3}$

27) $AD = AE = y$ (п. 22)

$DC = CF = \cancel{3x}\ BC - FL = \cancel{2x} = 5x - FL = 3x$

$2x$, т.к. $OX = 2x$; $OX \parallel FL$ (по перпенд. кул.) $FO \parallel LX$ (т.к. они перпенд. к BC)

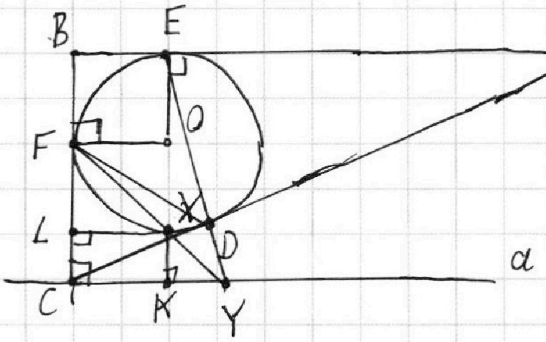
$\frac{AD}{DC} = \frac{y}{3x} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ (по п. 26)

<u>Ответ</u>: $AD : DC = 10 : 3$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$ - прямоуг. треуг.
$\angle B$ - прямой.
$w(O;R)$ вписана в $\triangle ABC$.
$D, E, F \in w$; $D \in AC$; $E \in AB$; $F \in BC$
~~a~~ прямая $a \perp BC$.
$C \in a$.
$ED \cap a = Y$. $FY \cap w = X$
причем F и X несовпадают.
$EX = 2\sqrt{2}\, XY$.
Найти: $AD : DC$

Решение.

1) Д.п. FD.
2) Пусть $x = \frac{XY}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}XY}{2}$, тогда $EX = 4x$
3) w вписана в $\triangle ABC$; D, E, F - точки касания (усл.)
$\Rightarrow FC = FD \Rightarrow \triangle FCD$ - р/б, причем $\angle CFD = \angle CDF$
$\Rightarrow AE = AD \Rightarrow \triangle AED$ - р/б, причем $\angle AED = \angle ADE$.
4) Пусть $\angle ACB = \alpha \Rightarrow \angle BAC = 90 - \alpha$, т.к. сумма углов треуг. равна $180°$
5) $\triangle CFD$ - р/б (п.3) $\Rightarrow \angle CFD = \angle CDF = 90 - \frac{\alpha}{2}$, по т. о сумме углов треуг.
6) $\triangle AED$ - р/б (п.3) $\Rightarrow \angle AED = \angle ADE = 45 + \frac{\alpha}{2}$, по т. о сумме углов треуг.
7) Д.п. OE; OF, причем $OF \perp BC$, т.к. F т. касания
$OF \perp AB$, т.к. E - т. касания
8) $\angle XED + \angle DEA = \angle ADX$
$\angle XED = 90 - (45 + \frac{\alpha}{2}) = 45 - \frac{\alpha}{2}$
9) $\angle XED$ - вписан. $\Rightarrow \smile XD = 2\angle XED = 90 - \alpha$ (по св-ву впис. углов)
10) $\angle XFD$ - вписан. $\Rightarrow \angle XFD = \frac{\smile XD}{2} = 45 - \frac{\alpha}{2}$.
11) $\angle XFD + \angle XFC = \angle CFD \Rightarrow \angle XFC = 90 - \frac{\alpha}{2} - (45 - \frac{\alpha}{2}) = 45°$
12) $\angle XFO + \angle XFC = \angle CFO = 90°$, т.к. $OF \perp BC$
$\angle XFO = 90 - 45° = 45°$.
13) Рассм. $FO \perp BC$ (по пункту 7), $a \perp BC$ (услов.) $\Big\} \Rightarrow FO \parallel a$ (по св-ву парал. прям.)
14) Рассм. $FO \parallel a$ (п.13), FY - ~~сек~~ секущая, $\angle OFY$ и $\angle FYC$ - накрест леж. $\Big\} \Rightarrow \angle CYF = \angle OFY = 45°$ (по св-ву нак парал. прям.)

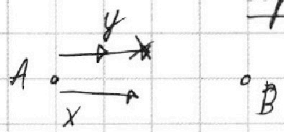
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик.



$\frac{l}{y} - \frac{l}{x} = 2 \qquad l\,\frac{x-y}{xy} = 2$

$\frac{xl}{y} - \frac{yl}{x} = 96$

$\frac{x^2-y^2}{xy}\,l = 96 \qquad (x+y)\cdot 2 = 96 \qquad x+y = 48 \qquad y = 48-x$

$\frac{l}{y+6} - \frac{l}{x+6} = 1{,}25 \qquad l\,\frac{x-y}{xy+6x+6y+36} = 1{,}25$

$\frac{2xy}{xy+324} = \frac{5}{4}$

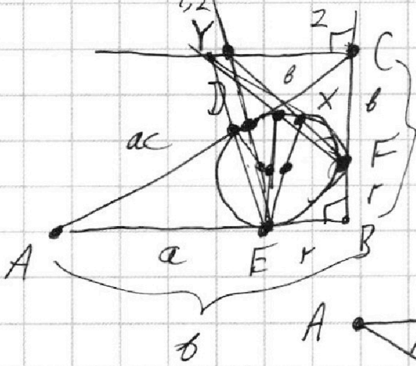
$8xy = 5xy + 5\cdot 324$

$\begin{cases} xy = 540 \\ x+y = 48 \end{cases} \qquad 48x - x^2 = 540 \qquad x^2 - 48x + 540 = 0$

$D = 48^2 - 4\cdot 540 = 4(24^2 - 540) = 16(12^2 - 135) = 16\cdot 9 =$

$x_{1,2} = \frac{48 \pm 12}{2} = \left[\begin{array}{l} x = 30 \Rightarrow y = 18 \\ x = 18 \Rightarrow y = 30 \end{array}\right.$

$48 \cdot 6 = 288 \qquad 288 + 36 = 324 \qquad 270 : 2 = 135$

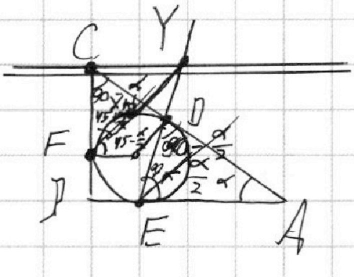


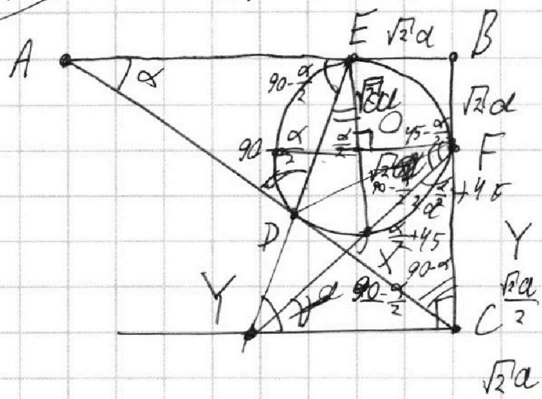
$a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + 2ar + r^2 + b^2 + 2ab + r^2$

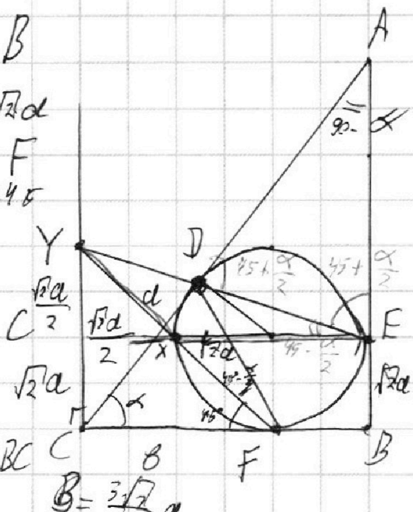
$\cancel{ab = ar + br + r^2}$

$a^2 + b^2 = c^2$

$a + b = c + 2r$







$\frac{5\sqrt{2}\,a}{2} = BC$

$B + A = C + 2\sqrt{2}\,a$

$B = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$

$(A+B)\cos\alpha = B + \sqrt{2}\,a$

$A + B = \frac{B+\sqrt{2}a}{\cos\alpha}$

$A = \frac{B+\sqrt{2}a}{\cos\alpha} - B = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}a}{\cos\alpha} - \frac{3\sqrt{2}}{2}a$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X					

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

1 2 3 4 5 6 7 — ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓

$\sqrt{2x^2-3x+4} = 1-4x+\sqrt{2x^2+x+3}$

$t = 2x^2+x+3$

$\sqrt{t}+k=\sqrt{t+k} \quad |^2$

$t+k^2+2tk = t+k$

$k=1-4x$

$\frac{1}{8}-\frac{3}{4}=-\frac{5}{8}+4=3\frac{3}{8}$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+3=3\frac{3}{8}$

$\left[\begin{array}{l} k=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \\ k+2t-1=0 \end{array}\right.$

$k+2t-1=0$

$1-4x+4x^2+2x+6-1=0$

$4x^2-2x+6=0$

$D<0$

$\frac{9}{2}+\frac{3}{2}+3=9$

$\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ $\quad 2-3=1-4x$

$\frac{3y+x}{xy}=\frac{2}{z}$

$3yz+xz-2xy=0$

$3y(3x+2y)+x(3x+2y)-2xy=0$

$9xy+6y^2+3x^2+2xy-2xy=0$

$x^2+3xy+2y^2=0$

$(x+2y)(x+y)=0$

$x=-2y;\ x=-y$

1) $\frac{3}{-2y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{-4y}$ $\quad 2+3+4=9$

$-0{,}5=-0{,}5$

$2-1+3=4$

2) $\frac{3}{-y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{-y}$ $\quad 1=1$

1) $z=-4y$ $\quad$ 2) $z=-y$

1) $\frac{12y^2-4y^2-16y^2}{4y^2-6y^2}=\frac{-8y^2}{-2y^2}=\boxed{4}$ $\quad$ 2) $\frac{3y^2-4y^2-y^2}{y^2-6y^2}=\frac{-2y^2}{-5y^2}=\frac{2}{5}$

$a \vdots b \quad \frac{a}{b}=k$

$\frac{a+b}{a^2+b^2-8ab}$ $\quad =\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$

$\text{НОД}(a+b, (a+b)^2-10ab)=m$

$(a+b, 10ab)=m \quad \frac{10}{9+49-8\cdot 21}=$

$(\frac{a}{b}+1;\ 10a)=m$

$(a+b,\ 10ab)=m$ $\quad b \vdots a$

$\frac{10}{110}=10$

$ab \vdots 3^{11}7^{11};\ bc: 3^{18}7^{16};\ ac: 3^{21}7^{38}$

$\frac{c}{a}: 3^7 7^5;\ \frac{c}{b}: 3^{10}7^{27};\ \frac{a}{b}: 3^3 7^{22}$

$\cancel{b=1,\ a=3^{11}7^{11}},\ c$

$a=3^{k_1}7^{m_1} \quad b=3^{k_2}7^{m_2} \quad c=3^{k_3}7^{m_3}$

$ab=3^{k_1+k_2}7^{m_1+m_2}$

$\left\{\begin{array}{l} k_1+k_2\geq 11 \\ m_1+m_2\geq 11 \\ k_1+k_3\geq 21 \\ m_1+m_3\geq 38 \\ k_2+k_3\geq 18 \\ m_2+m_3\geq 16 \\ k_1+k_2+k_3 \end{array}\right.$

$m_2=0 \Rightarrow m_1\geq 11 \quad m_1=11$

$m_3\geq 27 \Rightarrow m_3=27$

$m_3\geq 38$

$a+b,\ b+c,\ a+c$

$11 \quad 18 \quad 21$

$a+b+c=25$

$\cancel{5 \ 6 \ 12}$

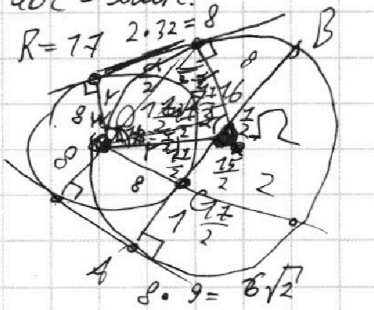
$6 \ 5 \ 12$

$7 \ 4 \ 14$

$3^{25}\cdot 1$

abc — мин.

$R=17$ $\quad 2\cdot 32=8$

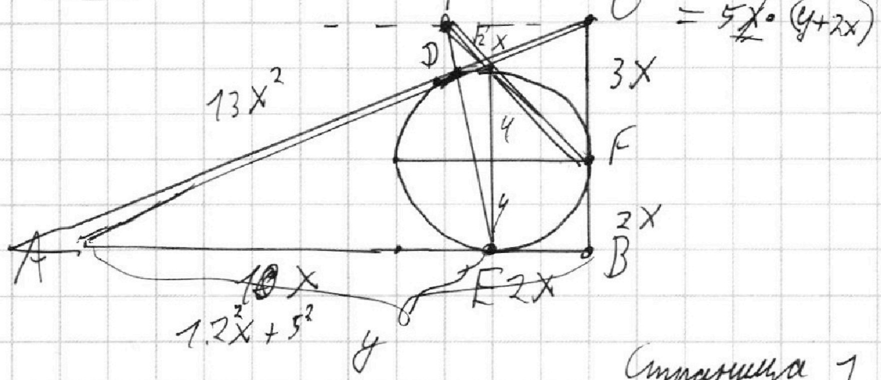


$8\cdot 9 = 6\sqrt{2}$

$\frac{a+b+c}{2}=$

$\cancel{5x+2y}(10x+2y)2x=$

$=5x\cdot(y+2x)$



Страница 1