МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

◁ Пусть k_1, k_2, k_3 – это какие натур. числа, тогда

1) $a^2 = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$,
2) $b^2 = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$,
3) $c^2 = k_3 \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$.

Перемножив (1), (2) и (3), получаем:

$$(abc)^2 = k_1 k_2 k_3 \, 2^{55} 7^{68}$$

Слева квадрат натур. числа,

т.е. и справа квадр. натур.

Тогда степени вкл. простых должны быть чётными.

[illegible]

Перемн. (1) и (2):

$$ac \cdot b^2 = k_1 k_2 \cdot 2^{32} \cdot 7^{29} = k_3 \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot b^2$$

$$k_1 k_2 \cdot 2^9 = k_3 \cdot 7^{10} \cdot b^2$$

$$k_1 k_2 \vdots 7^{10}$$

$$k_3 \cdot b^2 \vdots 2^9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

① $a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$

$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$

$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$

Пусть $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$:

$ab = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$

$bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$

$ac = k_3$

$k_1 = 1$

$k_2 = 7^{10}$

$k_3 = 2$

$c = 2^{13} \cdot 7^{28}$

$b = 2^4$

$k_1 k_2 = 7^{10}$

$k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$

$ab = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$

$bc = k_4 \cdot$

$ab = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$

$a \cdot 2^4 = 2^{15} \cdot 7^{11}$

$a = 2^{11} \cdot 7^{11}$

$ac = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = k_1 \cdot 2^{11} \cdot 7^{1}$

$c = k_2 \cdot 2^{13} \cdot 7^{18}$

$ac = 2^{24} \cdot 7^{39}$

$k_1 k_2 = 7^{10}$

$ac = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Например,

$k_1 = k_2 = 7^5$

$a = 7^{16} 2^{11}$

$c = 7^{23} \cdot 2^{13}$

$b = 2^4$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$.

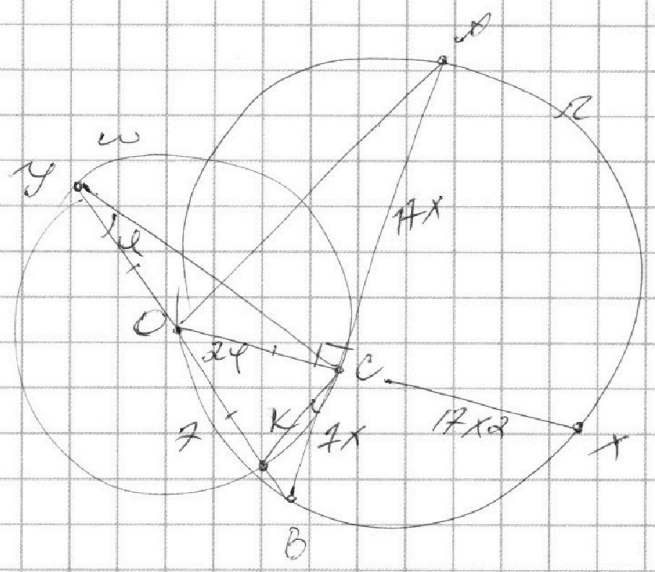
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3



AB - ?

Пусть
O - центр ω

r - рад. ω
R - рад. Ω

r = 7
R = 13

$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$

Пусть K и Y - точки пер. OB с ω
(см. рис.)

Пусть CB = 7x, AC = 17x.

AB = 24x - ?

Пусть ∠CYB = φ, тогда ∠COB = 2φ
(центр. опир. на ту же дугу).

Так как AB - кас. к ω в точке C,
а OC - рад., то OC ⊥ AB.

Пусть OC ∩ Ω = X

Запишем теорему Пифагора
для △AOC:

$OC^2 + AC^2 = AO^2$

$7^2 + (17x)^2 = AO^2$

$AO = \sqrt{7^2 + (17x)^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x\sqrt{17^2x^2+7^2}\cdot\sqrt{x^2+1}=26$

$(17^2x^2+7^2)(x^2+1)=26^2$

$|x^2=a|$

$(17^2a+7^2)(a+1)=26^2$

$17^2a^2+17^2a+7^2a+7^2-26^2=0$

$17^2a^2+a(17^2+7^2)+19\cdot33=0$

$D=(17^2+7^2)^2+17^2\cdot4\cdot19\cdot33$

$D=17^4+2(7\cdot17)^2+7^4+17^2\cdot4\cdot19\cdot33$

$D=17^2(17^2+4\cdot19\cdot33)+7^2(7^2+2\cdot17^2)$

$D=17^2(17^2+4\cdot627)+7^2\cdot627$

$D=17^4+4\cdot627\cdot17^2+7^2\cdot627=$

$=627(4\cdot17^2+7^2)+17^4=$

$=627\cdot1405+17^4$

$x^2=a=\dfrac{\sqrt{17^4+627\cdot1405}-(17^2+7^2)}{2\cdot17^2}$

$x=\sqrt{\dfrac{\sqrt{17^4+627\cdot1405}-(17^2+7^2)}{2}}\cdot\dfrac{1}{17}$

Ответ:

$AB=24x=\dfrac{24}{17}\sqrt{\dfrac{\sqrt{17^4+627\cdot1405}-(17^2+7^2)}{2}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(4) $\sqrt{3x^2-6x+2} = (1-9x) + \sqrt{3x^2+3x+1}$

$$\begin{cases} 1-9x+\sqrt{3x^2+3x+1} \geq 0, & (3) \\ 3x^2-6x+2 \geq 0, & (2) \\ 3x^2-6x+2 = (1-9x)^2+3x^2+3x+1+ \\ \quad +2(1-9x)\sqrt{3x^2+3x+1}, & (1) \end{cases} \Rightarrow (4)$$

1) $3x^2-6x+2 = x-18x+81x^2+3x^2+3x+1+$
$+2(1-9x)\sqrt{3x^2+3x+1}$

$-9x+81x^2+2(1-9x)\sqrt{3x^2+3x+1}=0$

$9x(9x-1)-2(9x-1)\sqrt{3x^2+3x+1}=0$

$(9x-1)(9x-2\sqrt{3x^2+3x+1})=0$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{9}, \\ 9x=2\sqrt{3x^2+3x+1}, & (*) \end{cases}$$

*) Заметим, что дискриминант $3x^2+3x+1$ равен $9-3\cdot 4<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2+3x+1>0 \ \forall x.$

$81x^2 = 4(3x^2+3x+1)$

$81x^2 = 12x^2+12x+4$

$69x^2-12x-4=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$D = 144 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = (4 \cdot 3)^2 + 4^2 \cdot 69 =$$

$$= 4^2(9 + 69) = 4^2 \cdot 78$$

$$x = \frac{6 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 3 \cdot 23}$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

Таким образом, (1) даёт 3 решения:

$$\begin{cases} x = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}, \\ x = \dfrac{1}{9}, \end{cases}$$

2) $3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

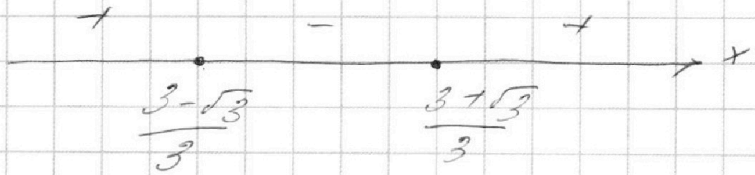
$$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2 - 2^2 \cdot 2 \cdot 3 =$$

$$= 2^2 \cdot 3(3 - 2) = 2^2 \cdot 3$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$3\left(x - \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right) \geq 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$

3) $\sqrt{3x^2+3x+1} \geq 9x-1$

Если $9x-1 \leq 0$, нер-во выполняется.

~~Ещё какой-то~~

Р-м случай, когда $9x-1 \geq 0$.

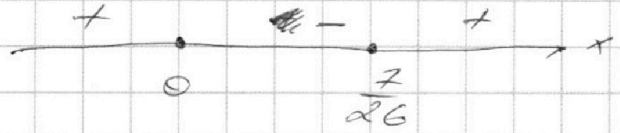
Поскольку левая и правая части нер-ва неотриц., возведём в квадрат без перемены знака.

$3x^2+3x+1 \geq 81x^2-18x+1$

$78x^2-21x \leq 0$

$x(78x-21) \leq 0$

$3x(26x-7) \leq 0$



$x \in \left[0; \frac{7}{26}\right]$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$,
$x \in \left[0; \frac{7}{26}\right]$.

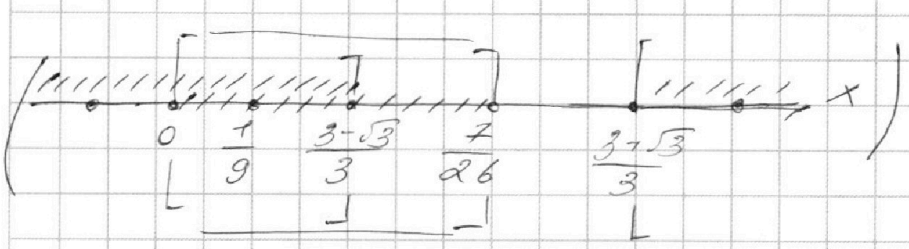
$x = \frac{1}{9}$;
$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

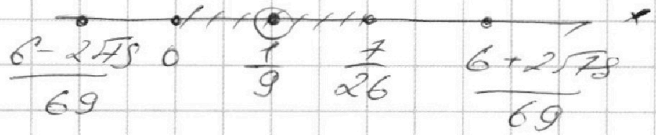
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Итого:



Ответ: $x = \frac{1}{9}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab = 7^{12} \cdot 2^{15}$

$bc = 7^{27} \cdot 2^{17}$

$ac = 2^{24} \cdot 7^{39}$

$a \cdot 2^{24} = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$

$24 \cdot c = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$

$ac = 2^{24} \cdot 7^{39}$

$k_1 k_2 : 7^{10}$

$k_1 k_2 = 7^{10}$

$k_1 = 7$

$k_2 = 7^9$

$k_3 = 2$

$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$

$bc = 7^{27} \cdot 2^{17}$

$ac = 2^{24} \cdot 7^{39}$

$bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$

$c = k_2 \cdot 2^{13} \cdot 7^{18} = 7^{23} \cdot 2^{13}$

$k_2 = 7^5 \quad k_1 = 7^5$

$a = 7 \cdot 2^{26}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Р-ие $k_1 k_2 = 7^{10}$, тогда $k_3 b^2 = 2^9$

$b = 2^4$, $k_3 = 2$ (1)

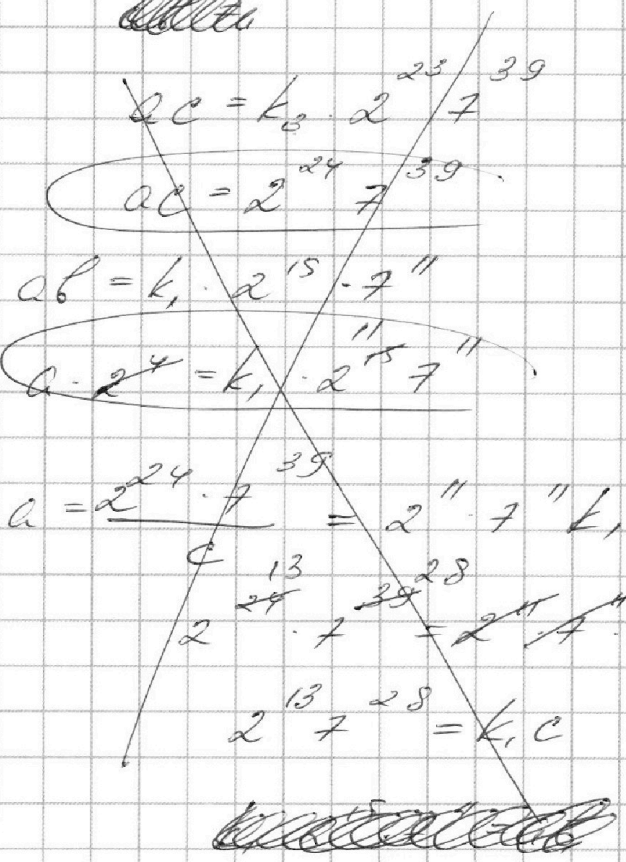
$b = 2^3$, $k_3 = 2^3$ (2)

$b = 2$, $k_3 = 2^7$ (3)

1) $k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$

$b = 2^4$

Если такой случай ЗЗ построить, то ур рассм не обяз, т.к. в ОА оптим, так как при min(ab) растет min $(k_1 k_2 k_3)$.

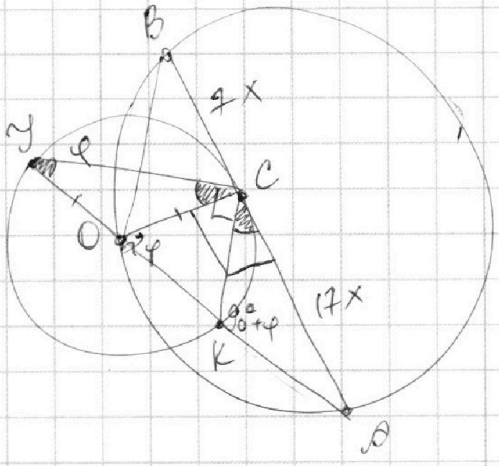


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle AOC$:

$$\frac{17x}{\sin\varphi} = \frac{AC}{\cos 2\varphi}$$

$\triangle AOC$:

$$\frac{AC}{\sin 2\varphi} = \frac{7}{\sin\varphi}$$

$$AC = \frac{7\sin 2\varphi}{\sin\varphi} = 14\cos\varphi$$

$$\frac{17x}{\sin\varphi} = \frac{14\cos\varphi}{\cos 2\varphi}$$

$\triangle OBD$: $\frac{OB}{\cos 2\varphi} = 2R$

$$\frac{7\sqrt{x^2+1}}{\cos 2\varphi} = 26$$

$$\cos 2\varphi = \frac{7\sqrt{x^2+1}}{26} = 2\cos^2\varphi - 1$$

Т. Пиф. для $\triangle OBC$:

$$OB^2 = 7^2 + 1^2 x^2$$

$$OB = 7\sqrt{x^2+1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$

3) $1-9x+\sqrt{31^2+3x+1} \neq 0$

$0 \neq 0$ — верно

Поскольку левая и правая части неотриц., возвед. в квадрат без перемены знака.

$\Leftrightarrow$

$x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$

$x = \frac{1}{9}$, $x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$

$81 \left| \frac{3}{27} \right.$
$\frac{6}{21}$

$54 - 17 = 44 - 7 = 40 - 3 = 37$

$\sqrt{\frac{1}{27} - \frac{18}{27} + \frac{54}{27}} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} =$

$= \sqrt{\frac{37}{27}}$

$= \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2}$

$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1} =$

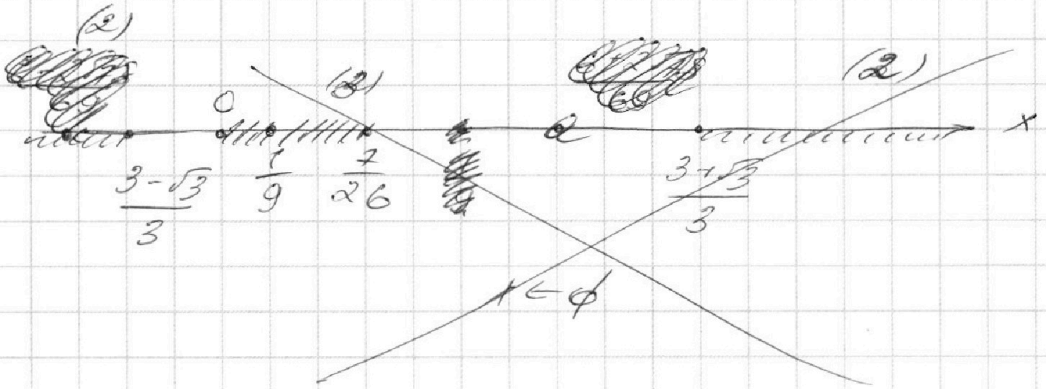
$= \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{9}{27} + \frac{27}{27}} = \sqrt{\frac{37}{27}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



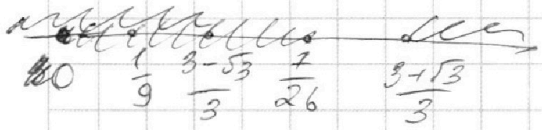
$$3\cdot\frac{1}{81}-6\cdot\frac{1}{9}+2=\frac{37}{27}$$

$$\frac{6+2\sqrt{78}}{69}$$

$$3x^2-6x+2<0$$

$$D=36-4\cdot6=36-24=12=4\cdot3$$

$$x=\frac{3\pm2\sqrt{3}}{3}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$$



$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$? $\frac{1}{9}$

$9-3\sqrt{3}$? 1

8 ? $3\sqrt{3}$

64 ? $9\cdot3=27$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle OBO'$:

$$\frac{OB}{\sin(90^\circ - 2\varphi)} = 2R$$

$$\frac{7\sqrt{1+x^2}}{\cos 2\varphi} = 26$$

$\triangle AOC$:

$$\frac{7}{\sin\varphi} = 2R$$

$$\frac{7}{\sin\varphi} = 14$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$14\sqrt{1+x^2} = 26$$

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{26}{14} = \frac{13}{7}$$

$$1+x^2 = \left(\frac{13}{7}\right)^2$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{13}{7}\right)^2 - 1}$$

$$x = \sqrt{\frac{169-49}{49}} = \sqrt{\frac{120}{49}} = \frac{2}{7}\sqrt{30}$$

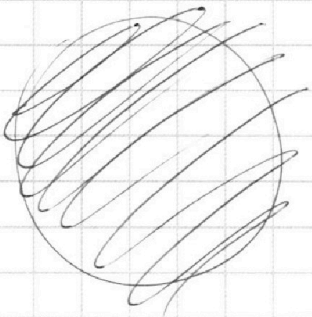
4.30

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Степень точки C для окр. w:

$$7 \cdot CX = 17x \cdot 7x$$

$$CX = 17x^2$$

По т. Пиф. для $\triangle BCX$:

$$BX^2 = CX^2 + BC^2$$

$$BX^2 = 17^2x^4 + 7^2x^2$$

$$BX = x\sqrt{17^2x^2 + 7^2}$$

Т. синусов для $\triangle OBX$:

$$\frac{BX}{\sin 2\varphi} = 2R$$

$$\frac{BX}{\sin 2\varphi} = 26$$

$\triangle CCB$:

$$\sin 2\varphi = \frac{BC}{OB} = \frac{7x}{7+kB}$$

По т. о квадрате кас.

$$7^2x^2 = kB^2(14+kB)$$

$$kB^2 + 14kB - 7^2x^2 = 0$$

$$D = 14^2 + 4 \cdot 7^2x^2 =$$

$$= 14^2(1+x^2)$$

$$kB = \frac{-14 + 14\sqrt{x^2+1}}{2}$$

$$kB = 7\sqrt{x^2+1} - 7$$

$$7 + kB = 7\sqrt{x^2+1}$$

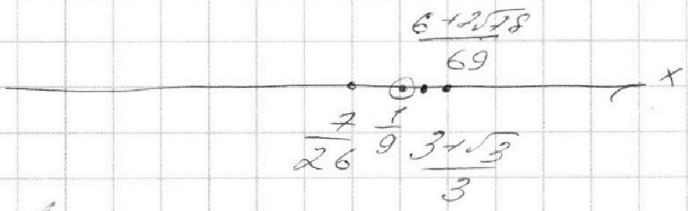
$$\sin 2\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\frac{7}{26} < \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

$21 < 26 \cdot 3 + 26\sqrt{3}$

$21 - 26 \cdot 3 < 26\sqrt{3}$

$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} < \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

$69 = 23 \cdot 3$

$6 + 2\sqrt{78} < 23 \cdot 3 + 23\sqrt{3}$

$2\sqrt{78} - 23\sqrt{3} < 23 \cdot 3 - 6 = 63$

$3 \cdot 21$

$2 \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{3} - 23\sqrt{3} < 3 \cdot 21$

$\sqrt{3}$

$2\sqrt{26} - 23 < 21\sqrt{3}$

$2\sqrt{26} - 21\sqrt{3} < 23$

$\frac{78}{6} \mid \frac{3}{26}$

$\frac{7}{26} < \frac{1}{9}$

$63 > 26$

$2\sqrt{26} < 21\sqrt{3}$

$4 \cdot 26 < 21^2 \cdot 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$6-2\sqrt{78} \lessgtr 0$

$6 \lessgtr 2\cdot\sqrt{78}$

$36 \lessgtr 4\cdot 78$

$\frac{7}{26} \vartriangleright \frac{6+2\sqrt{78}}{69}$

$7\cdot 69 \vartriangleright 26\cdot 6+26\cdot 2\sqrt{78}$

$7\cdot 69-26\cdot 6 \vartriangleright 26\cdot 2\sqrt{78}$

$\frac{3-\sqrt{3}}{3} \cup \frac{6-2\sqrt{78}}{69}$

$\frac{\sqrt{3}-3}{3} \cap \frac{2\sqrt{78}-6}{69}$

$69\sqrt{3}-$

$\frac{3-1,7}{3} \vartriangleright \frac{18-6}{69}$

$\frac{1,3}{3} \vartriangleright \frac{12}{69}$

$69\cdot 1,3 \vartriangleright 36$

$69\cdot 7$

$7^2\cdot 69^2+26^2 \vartriangleright 6^2-2\cdot 6\cdot 26\cdot 7\cdot 69$

$64 \quad 78 \quad 81$

$\vartriangleright 26^2 \vartriangleright 4\cdot 78$

$69\cdot 7(69\cdot 7-2\cdot 6\cdot 26) \vartriangleright$

$\cup 26^2(4\cdot 78-36)$

$\times \frac{69}{7}$

483

$\times \frac{12}{26}$

72

24

312

$\times \frac{78}{4}$

312

$-\frac{312}{36}$

276

$-\frac{483}{312}$

171

$69\cdot 7\cdot 171 \vartriangleright$

$\cup 26\cdot 276$

$\times \frac{171}{7}$

1197

$69\cdot 1197 \vartriangleright 26\cdot 276$

$\frac{3-1,7}{3} \cup \frac{16-6}{69}$

$\frac{1,3}{3} \cup \frac{10}{69}$

$69\cdot 1,3 \cup 30$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

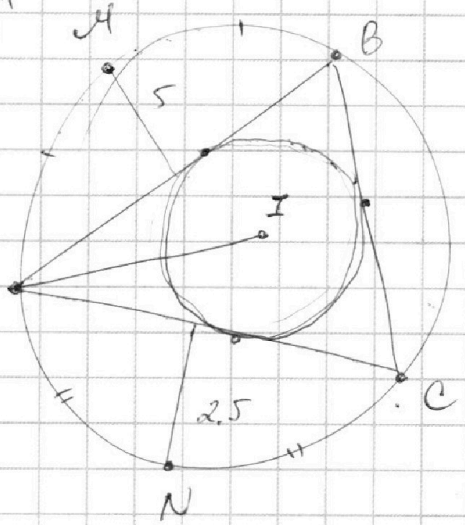
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

209 | 17
17 | 1
39
34

289

627 | 3
6 | 209
27



289 · 289

289 · 4
1356
49
1405

$\frac{BA}{\sin 2\varphi} = 2R$

$\frac{B1}{\sin 2\varphi} = 2R$

$\sin 2\varphi = \frac{7x}{7}$

$\frac{B1}{7x} \cdot 7 = 2R$

$B1^2 = (7x)^2 + (17x^2)^2$

$B1^2 = 7^2x^2 + 17^2x^4$

$B1 = x\sqrt{7^2 + 17^2x^2}$

$\frac{\sqrt{7^2 + 17^2x^2}}{7} \cdot 7 = 2R$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\frac{7\sqrt{x^2+1}}{26}+1}{2} = \cos^2\varphi = 1-\sin^2\varphi$$

$$1-\frac{\frac{7\sqrt{x^2+1}}{26}+1}{2} = \sin^2\varphi$$

$$\frac{2(17x)^2}{1-\frac{7\sqrt{x^2+1}}{26}} = \frac{7\cdot 4\cdot 7\cdot\left(\frac{7\sqrt{x^2+1}}{26}+1\right)}{\frac{7\sqrt{x^2+1}}{26}}$$

$$\left/\ \frac{7\sqrt{x^2+1}}{26} = a\ \right/$$

$$\frac{(17x)^2}{1-a} = \frac{7^2(a+1)}{a}$$

$$7^2(1-a^2) = (17x)^2\cdot a$$

$$7^2\left(1-\frac{49}{26}(x^2+1)\right) = 17^2x^2\,\frac{7\sqrt{x^2+1}}{26}$$

$$\left/\ \sqrt{x^2+1} = b\ \right/$$

$$x^2 = b^2-1$$

$$7^2-\frac{7}{26}\cdot b^2 = 17^2(b^2-1)\cdot\frac{7b}{26}$$

$$26\cdot 7-7^3\cdot b^2 = 17^2(b^2-1)\cdot b$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$14y + 3y^2 = y^2 + 7y$

$2y^2 + 7y = 0$

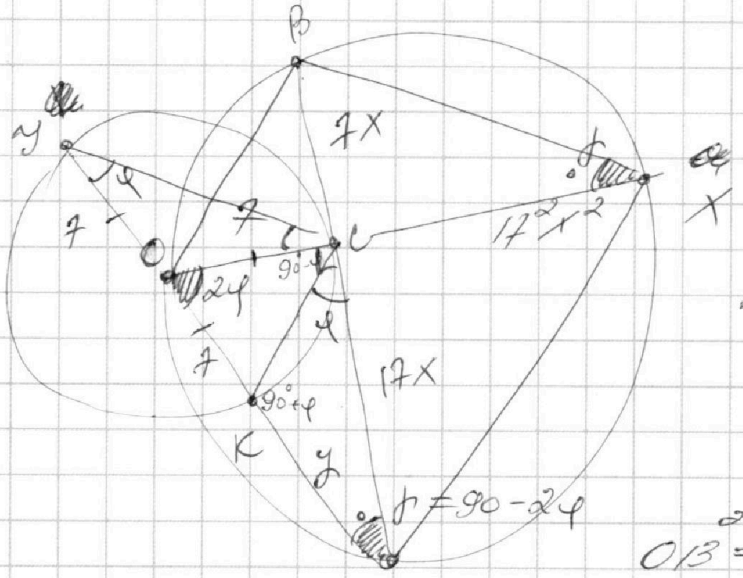
$2y + 7 = 0$

$y = -\frac{7}{2}$???

$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$

$r = 7$

$R = 13$



$\delta = 180 - 90 - \varphi - \varphi =$
$= 90 - 2\varphi$

$OB^2 = 7^2 + (Rx)^2$

$OB = 7\sqrt{1 + x^2}$

$y(y+14) = 17^2x^2$

$(7+y)^2 = 7^2 + 17^2x^2$

$7^2 + (17x)^2 = (7+y)^2$

$\sqrt{7^2 + (17x)^2} - 7 = y$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

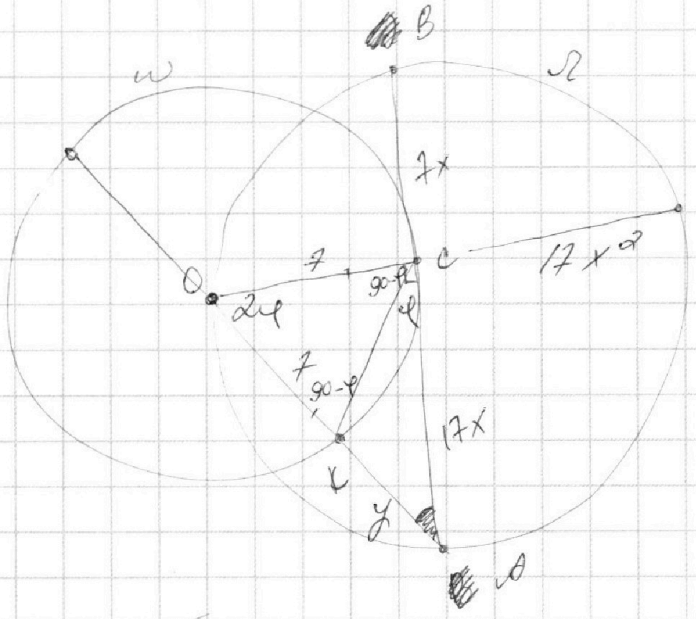
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$AC:CB=17:7$

$AB-?$

$r=7$

$R=13$



$\frac{180-24}{2}=90-\varphi$

$AK\cdot AO=AC^2$

$\frac{AK}{AC}=\frac{AC}{AO}$

$7\cdot CO=7\cdot 17x^2$

$CO=17x^2$

$AK\cdot AO=17x^2$

$AK(7+AK)=17x^2$

$x^2=\frac{AK(AK+7)}{17^2}$

$17^2x^2+7^2=(AK+7)^2$

$17^2x^2+7^2=AK^2+14AK+7^2$

$17^2x^2=AK^2+14AK$

$17^2\cdot\frac{AK(AK+7)}{17^2}=AK^2+14AK$

$AK^2+7AK=AK^2+AK\cdot 14$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

min abc - ?

$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$

$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$

$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$

$ab = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$

$bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$

$ac = k_3 \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$

$\frac{ab \cdot ac}{bc} = a^2 = \frac{k_1 k_3}{k_2} \cdot \frac{2^{38} \cdot 7^{50}}{2^{17} \cdot 7^{18}}$

$a^2 = \frac{k_1 k_3}{k_2} \cdot 2^{21} \cdot 7^{32}$

$\frac{k_1 k_3}{k_2}$

$(abc)^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$

$k_1 k_2 k_3 = 2$

$ac \cdot b^2 = k_1 k_2 \cdot 2^{32} \cdot 7^{29} = k_3 \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$

$k_1 k_2 \cdot 2^9 = k_3 \cdot 7^{10}$

$\frac{2}{k_3}$ $\quad \frac{2^{10}}{k_3} = k_3 \cdot 7^{10}$ $\quad \frac{2^{10}}{7^{10}} = k_3^2$

$k_3 = \frac{2^5}{7^5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle OCO$:

$7^2 + (17x)^2 = (y+7)^2$

$y(y+7) = (17x)^2$

$(y+7)^2 - 7^2 = y(y+7)$

$y^2 + 14y = y^2 + 7y$

$\triangle KCO$: $\frac{y}{\sin\varphi} = \frac{17x}{\sin(90-\varphi)}$

$\frac{y}{\sin\varphi} = \frac{17x}{\cos\varphi}$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{17x}$

$\triangle OCA$: $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{17x}{7+y} = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}$

$17x^2 = y(y+7)$

$\frac{17x}{7+y} = \frac{2y}{17x} \cdot \frac{1}{1-\frac{y^2}{17^2x^2}}$

$17^2x^2\left(1-\frac{y^2}{17^2x^2}\right) = 2y(7+y)$

$17^2x^2 - y^2 = 2y(7+y)$

$17^2x^2 - y^2 = 14y + 2y^2$

$17^2x^2 = 14y + 3y^2 = y(y+7) = y^2 + 7y$

$x-9$

$k_1k_2 = 7^{10}$

$k_3 = 1$

$7^{10}2^9 = 7^{10} \cdot 6^2$

$7^{10} \cdot 2^9 = k_3 \cdot 7^{10} \cdot 6^2$

$2^9 = k_3 \cdot 6^2$

$k_3 = 2 \quad 6 = 2^4$

$k_3 = 2^3 \quad 6 = 2^3$

$k_3 = 2^4 \quad 6 = 2$

18 | 3/26
16/18

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик

4

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$$

$$\geq 0$$

$$3x^2-6x+2=x-18x+81x^2+3x^2+3x+x+$$
$$+2(1-9x)\sqrt{3x^2+3x+1}$$

$$-6x=-18x+81x^2+3x+2(1-9x)\sqrt{3x^2+3x+1}$$

$$81x^2-9x+2(1-9x)\sqrt{3x^2+3x+1}=0$$

$$9x(9x-1)+2(9x-1)\sqrt{3x^2+3x+1}=0$$

$$(9x-1)(9x-2\sqrt{3x^2+3x+1})=0$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{9}, \\ 9x-2\sqrt{3x^2+3x+1}=0, \quad (1) \end{cases}$$

1) $9x=2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$$\begin{cases} x\geq 0, \\ 81x^2=4(3x^2+3x+1) \end{cases}$$

$$x=\frac{12\pm\sqrt{8}}{3\cdot 23}$$

$$x=\frac{12\pm 4\sqrt{78}}{2\cdot 3\cdot 23}$$

$36-4\cdot 6>0$

$9-12<0$

$81 \mid 3$
$27 \mid 3$
$9 \mid 3$
3

$-\frac{1}{6}\ 8\ |\ 2$
$\quad 3\ \ 9$
$\quad 1\ \ 8$

$39 \mid 3$
13

$3\cdot 100-60+2>0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик

$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \overset{?}{\leq} \frac{1}{9}$

$69 - 54 = 15$

$\overset{?}{\Leftrightarrow}$

$6\cdot 9 + 18\sqrt{78} \overset{?}{\leq} 69$

54

$18\sqrt{78} \overset{?}{\leq} 15$

$6\sqrt{78} \overset{?}{\leq} 5$

$\times$

не туда

$\frac{6-2\sqrt{78}}{69} \overset{?}{\leq} \frac{1}{9}$

$54 - 18\sqrt{78} \leq 69$

да

$\frac{6-2\sqrt{78}}{69} < 0$

$6 - 2\sqrt{78} < 0$

$3 < \sqrt{78}$

$9 < 78$

$\frac{3-\sqrt{3}}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

$\frac{3+\sqrt{3}}{3} \overset{?}{>} \frac{1}{9}$

$9 + 3\sqrt{3} > 1$

$3\sqrt{3} > -8$

$1 - 9x \geq -\sqrt{3x^2+3x+1}$

$5^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 41 \cdot 4 < 0$

225

$\sqrt{3x^2+3x+1}$

$\times 84$

168

$\times 168$

4

Одз

$1 - 18x + 81x^2 + 3x^2 + 3x + 1 +$

$+ 2(1-9x)\sqrt{3x^2+3x+1} \geq 0$

$\sqrt{6}$

$84x^2 - 18x + 2 + 2(1-9x)\sqrt{3x^2+3x+1} \geq 0$

$2(1-9x)\sqrt{8} \geq -9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

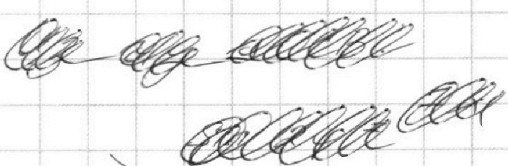
МФТИ

$\angle OBD = 90° - 2\varphi$ (из $\triangle$)

Запишем т. синусов для $\triangle ABD$:

$$\frac{AD}{\sin(90° - 2\varphi)} = 2R$$

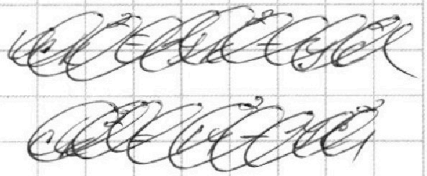
$$\frac{\sqrt{7^2 + (7x)^2}}{\cos 2\varphi} = 2R$$





По т. об угле м. хордой и кас.

$\angle KCB = \varphi$.

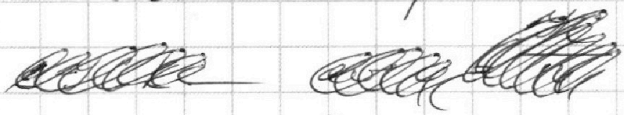


Т. синусов для $\triangle YOC$:

$$\frac{YC}{\sin 2\varphi} = \frac{YO}{\sin\varphi}$$

$$\frac{YC}{2\sin\varphi} = \frac{7}{\varphi}$$

$$YC = 14\cos\varphi$$



Т. синусов для $\triangle YBC$:

$$\frac{YC}{\sin(90° - 2\varphi)} = \frac{7x}{\sin\varphi}$$

$$\frac{14\cos\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{7x}{\sin\varphi}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\varphi \le 45^\circ$ (осн. в п/у Δ)

$\Downarrow$

$\sin\varphi,\ \operatorname{ctg}\varphi > 0$

$2\varphi \le 90^\circ$

$\sin 2\varphi,\ \operatorname{ctg} 2\varphi \ge 0$

$7x = \dfrac{14 \operatorname{ctg}\varphi \sin\varphi}{\operatorname{ctg} 2\varphi}$

$7^2 + (7x)^2 = 26 \operatorname{ctg}^2 2\varphi$

$(7x)^2 = 26 \operatorname{ctg}^2 2\varphi - 7^2$

$x^2 = \dfrac{26 \operatorname{ctg}^2 2\varphi - 7^2}{7^2} = \dfrac{14^2 \operatorname{ctg}^2\varphi \sin^2\varphi}{7^2 \operatorname{ctg}^2 2\varphi}$

$26(\operatorname{ctg}^2\varphi - \sin^2\varphi) - 7^2$