МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N1

Мы знаем, что $ab \vdots 2^{14} \cdot 7^{10}$, $bc \vdots 2^{17} \cdot 7^{17}$, $ac \vdots 2^{20} \cdot 7^{37}$.

Перемножим эти три произведения и получим, что

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{(14+17+20)} \cdot 7^{(10+17+37)}$

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{51} \cdot 7^{64}$

т.к. слева мы имеем полный квадрат, то он ~~делится~~ в разложении на простые множители имеет двойку в чётной степени. 51 нечёт., тогда двойка обязана быть как минимум в 52 степени. То есть

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{52} \cdot 7^{64}$

$abc \vdots 2^{26} \cdot 7^{32}$, ~~если abc делится~~

~~Из этого следует, т.к. ни a, ни b, ни c не нули, что~~

~~$abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$~~

~~Для $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$ есть пример, а значит минимальное значение достигается:~~

$a = 2^8$

$b = 2^6$

$c = 2^{12}$

Но известно, что в разложении ac семёрка входит в 37 степени, т.е. и в abc она будет как минимум в 37 ст.

Тогда $abc \vdots 2^{26} \cdot 7^{37}$

т.е. $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$, т.к. ни a, ни b, ни c $\neq 0$ и есть пример:

$a = 2^8 \cdot 7^{20}$

$b = 2^6 \cdot$

$c = 2^{12} \cdot 7^{17}$

Ответ: $abc_{наим} = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

Т.к. $\frac{a}{b}$ несократима, то НОД$(a,b)=1$

Преобразуем выражение:

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ Во-первых, числитель $\neq 0$, т.к. $a, b > 0$

Во вторых, если числитель $\vdots m$, то и $(a+b)^2-8ab \vdots m$

Но т.к. $(a+b)^2 \vdots m$, то $8ab \vdots m$.

~~Пусть БОО~~ ~~НОД~~,

$m = 2^\alpha \cdot n$

$8ab \vdots 2^\alpha \cdot n$, $n \not\vdots 2$

Пусть $\alpha > 3$

Тогда как минимум $ab \vdots 2$ и либо a, либо $b \vdots 2$.

БОО $a \vdots 2$. Но поу. $b \not\vdots 2$ то тогда $a+b \not\vdots 2$ (!?)

Тогда $\alpha \leq 3$

Пусть $n \vdots p$

Тогда, т.к. $p \neq 2$, то либо a, либо $b \vdots p$. БОО $a \vdots p$. Но поу $b \not\vdots p$ и $a+b \not\vdots p$ (!?)

Значит m может быть либо 1, либо 2, либо 4, либо 8.

Для $m=8$ есть пример: $a=1$, $b=7$, то

$\frac{1}{7}$ - несократимая $\frac{1+7}{1-6\cdot 7+49} = \frac{8}{8}$ - сокращается на 8.

Ответ: $m_{наиб.} = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

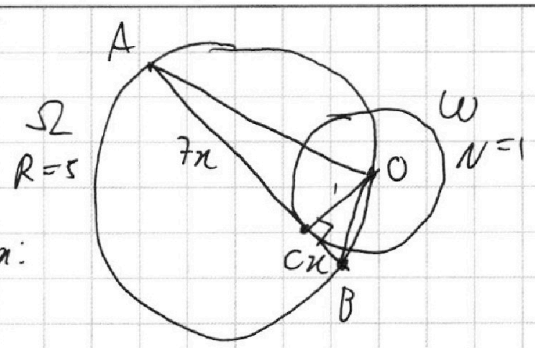
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

Пусть центр $\omega = O$.



Т.к. AB-кас, то $OC \perp AB$.

в $\triangle OCB$, $\angle C = 90^\circ$ по т. Пифагора:

$OB^2 = x^2 + 1 \Rightarrow OB = \sqrt{x^2+1}$

в $\triangle OAB$ по т. синусов:

(*) $\frac{OB}{\sin\angle BAO} = 2R = 2\cdot 5 = 10$

в $\triangle OAC$, $\angle C = 90^\circ$:

$\sin\angle BAO = \frac{OC}{AO} = \frac{1}{\sqrt{1+49x^2}}$

по т. Пифагора

Тогда если подставить в (*) две найденных равенства:

$\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{1+49x^2} = 10$ Пусть $x^2 = a$, $a \geq 0$

$\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{49a+1} = 10$

$(a+1)(49a+1) = 100$

$49a^2 + 50a - 99 = 0$

$D = 50^2 + 49\cdot 99\cdot 4 = 2500 + 4851\cdot 4 = 2500 + 19404 = 21904 =$
$= 148^2$ иначе $a<0$ (!?)

$a = \frac{-50 \pm 148}{2\cdot 49} = \frac{148-50}{2\cdot 49} = \frac{98}{2\cdot 49} = 1$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

$AB = 8x = 8$

Ответ: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

Обозначим $2x^2-5x+3=a$, $2x^2+2x+1=b$

Заметим, что $a-b = 2x^2-5x+3-2x^2-2x-1 = 2-7x$

Тогда равенство можно переписать, как:

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a-b$

Пусть $\sqrt{a}=c$ $\sqrt{b}=d$, то

$c-d = c^2-d^2$

$c-d=(c-d)(c+d)$ $(c-d)(c+d-1)=0$

I Если $c=d$, $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ $\begin{cases} a=b \\ a>0 \end{cases}$ $\begin{cases} a-b=0 \\ a>0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2-7x=0 \\ 2x^2-5x+3>0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{2}{7} \\ 2\cdot\frac{4}{49} - 5\cdot\frac{2}{7}+3>0 \end{cases}$ $\frac{8-70+3\cdot 49}{49}>0$

Проверим значение $x=\frac{2}{7}$ подстановкой: $8-70+147>0$ – верно

$\sqrt{2\cdot\frac{4}{49}-5\cdot\frac{2}{7}+3} - \sqrt{2\cdot\frac{4}{49}+2\cdot\frac{2}{7}+1} \overset{?}{=} 2-\frac{7\cdot 2}{7}$

$\sqrt{2\cdot\frac{4}{49}-5\cdot\frac{2}{7}+3} \overset{?}{=} \sqrt{2\cdot\frac{4}{49}+2\cdot\frac{2}{7}+1}$

$2\cdot\frac{4}{49}-5\cdot\frac{2}{7}+3 \overset{?}{=} 2\cdot\frac{4}{49}+2\cdot\frac{2}{7}+1$

$2=7\cdot\frac{2}{7}$ – верно, т.е. $x=\frac{2}{7}$ – корень

II ~~Если $c \neq d$. Тогда можно~~ Если $c+d=1$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$

По ур. $\sqrt{a}-\sqrt{b}=a-b$, сложим:

$2\sqrt{a}=a-b+1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Возведём в квадрат:

$$\begin{cases} 4a = \cancel{a^2-2ab+b^2+1}\ (a-b+1)^2 \\ a-b+1 \geq 0 \end{cases}$$ ← а сразу >0 отсюда

$$\begin{cases} 8x^2-20x+12 = (2-7x+1)^2 \\ 2-7x+1 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x^2-20+12 = (3-7x)^2 \\ 7x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2-20+12 = 9-42x+49x^2 \\ x \leq \frac{3}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} 41x^2-22x-3=0 \\ x \leq \frac{3}{7} \end{cases}$$

$$D = 22^2+12\cdot 41 = 484+492 = 976 = (4\sqrt{61})^2$$

$$x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{2\cdot 41} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{11+2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{11-2\sqrt{61}}{41} \end{array}\right. \\ x \leq \frac{3}{7} \end{cases}$$

Проверим оба корня:

$$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \leq \frac{3}{7}$$

$$77+14\sqrt{61} \leq 123$$

$$14\sqrt{61} \leq 46$$

$\vee\!\!\!| \qquad \wedge$ неверно, т.е. при $x = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$ выражение не будет иметь смысла

$14\cdot\sqrt{49} = 14\cdot 7$

$$\frac{11-2\sqrt{61}}{41} \leq \frac{3}{7}$$

$$77-14\sqrt{61} \leq 123$$

$-14\sqrt{61} \leq 46$ – верно

$b<0$ быть не может, т.к. $D<0$ и коэф. при старшем члене >0

$x = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$ подходит, ~~при подстановке в корни~~

т.к. все переходы были равносильными

Ответ: $x = \frac{2}{7}$, $x = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5

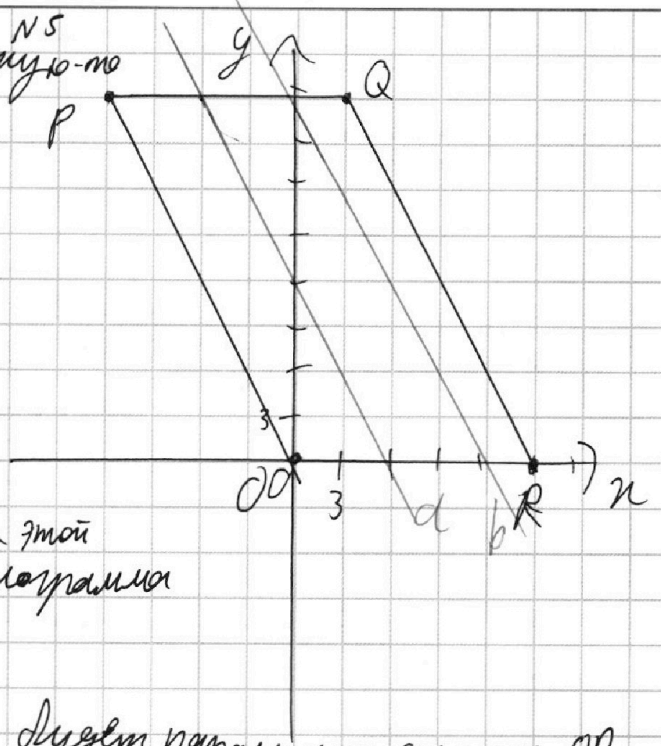
Пусть мы выбрали какую-то точку A внутри OPQR
$(x_1; y_1)$

~~Тогда $y_2 = 12 - 2x_1 + y_1$~~

То $y_2 = -2x_2 + 12 + 2x_1 + y_1$

Это уравнение прямой

Любая целочисленная точка этой прямой внутри параллелограмма будет подходить.



-2 - наклон, эта прямая будет параллельна стороне OP парал-мма.

$+12 + 2x_1 + y_1$ - сдвиг.

Рассмотрим любую прямую a вида: $y = -2x + C$.

Узнаем, какими могут быть x_1 и y_1, чтобы точка B попала на эту пр.

Иксы при x равны, приравняем сдвиг:

$12 + 2x_1 + y_1 = C$

$y_1 = C - 12 - 2x_1$ - ур.-ие прямой для точек A, при которых B попадёт на прямую a.

Она будет параллельна a.

Сдвиг: $C - 12$, у a: C

C никогда не равно $C - 12$, значит прямые всегда разные.

Тогда мы можем задать координаты точек A и B параметрически:

$$\begin{cases} y_2 = -2x_2 + C \\ y_1 = -2x_1 + C - 12 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

При этом $c \in \mathbb{Z}$, чтобы все корни были целыми.

На каждой прямой всегда внутри параллелограмма будет располагаться ровно 13 целых точек, при каждом увеличении x на 1 y уменьшается на 2, тогда если начать с точки пересечения прямой и верхней стороны парал-мма, то можно сделать ровно 12 сдвигов вниз и получить ровно 13 различных точек

~~Все~~ Для одного значения параметра c нам будет подходить $13 \cdot 13 = 169$ возможных пар точек.

Найдём все допустимые значения c.

Нижняя прямая со сдвигом вниз на $c-12$, верхняя — c.

Если $c-12<0$, то прямая не имеет общих точек с парал-мом и одна точка из пары не может быть определена.

То $c-12 \geq 0$ $c \geq 12$.

Аналогично $c \leq 27$, иначе точка не будет одной из точек.

Тогда $c \in [12; 27]$ и принимает 16 целых значений

То вариантов $169 \cdot 16 = 2704$

Ответ: 2704

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6

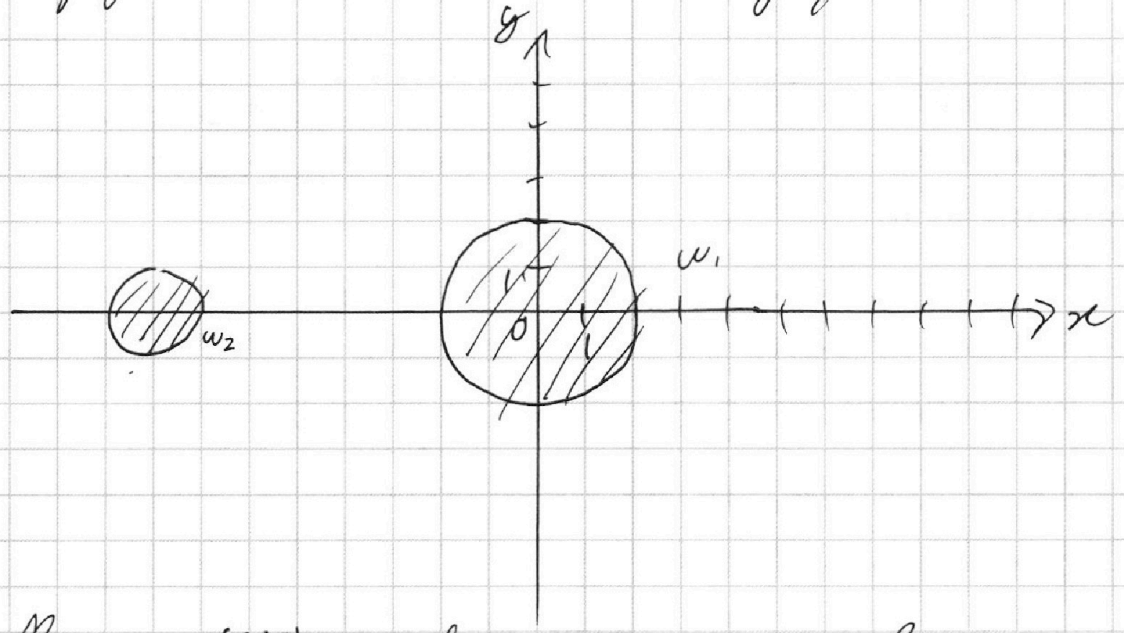
$$\begin{cases} ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \\ ax-y+10b=0 \end{cases}$$

← рассмотрим отдельно каждую скобку и определим сначала границы фигур, которые они отчерчивают

$(x+8)^2+y^2=1$ – уравнение окр-ти ω_1 с ц. $(-8;0)$ и рад. 1

$x^2+y^2=4$ – уравнение окр-ти ω_2 с ц. $(0;0)$ и рад. 2

Начертим эти две окружности на коорд-ой плок-ти и определим, какие области нам подходят:



В точке $(0;0)$ произв-ие <0, значит в силу непрерывности границ фигур, знак будет чередоваться при каждом переходе через границу.

$y=ax+10b$ – ур-ие прямой. ~~Система~~ Если рассмотреть все положения прямой на этой плоскости, то очевидно, что если прямая пересекает модуль окр-ть, то система будет иметь бесконечное кол-во решений. При касании мы получаем один валидный корень системы. Коснуться каждую окр-ть прямая может единожды, значит для двух корней надо, чтобы

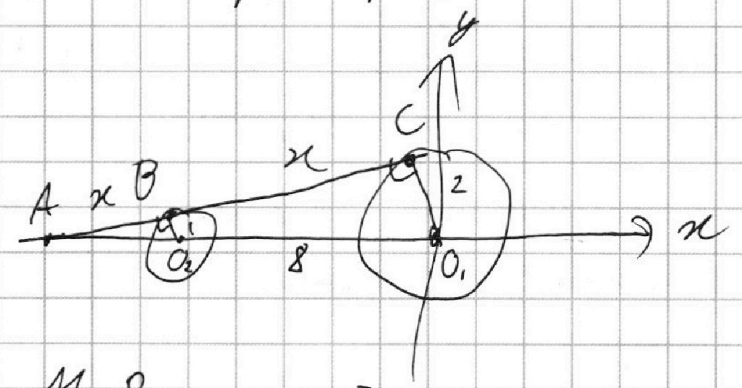
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

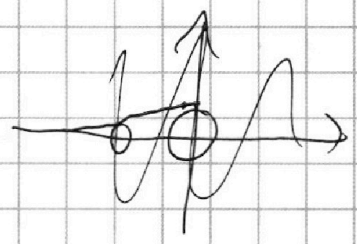
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

прямая была общей касательной двух окр-тей.
Таких возможных прямых 4 штуки
Сделаем набросок рисунка для внешней общей кас-ой





Необходимо найти значения α. в уравнении прямой $y = ax + ob$ a это тангенс угла наклона прямой к O_x.

Обозначим некоторые точки пересечений на рисунке. Пусть $AB = x$. Т.к. ω_2 можно перевести в ω_1 гомотетией с ц. A и $k = \frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{1} = 2$, то

$AC = 2x$ и $BC = x$ на этом рисунке

По построению $O_1O_2 = 8$

в $\triangle ABO_2$ по т. Пифагора $AO_2 = \sqrt{x^2+1}$

Из гомотетичности картинки получаем отношение:

$\frac{AO_2}{BO_2} = \frac{AO_1}{CO_1}$ $\quad \frac{\sqrt{x^2+1}}{1} = \frac{\sqrt{x^2+1}+8}{2}$ $\quad 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1}+8$

$\sqrt{x^2+1} = 8$

$x^2+1 = 64$ $\quad x^2 = 63$ $\quad x = \pm 3\sqrt{7}$ т.к. x это длина отрезка

$tg \underset{\alpha}{\underset{\parallel}{\angle BAO_2}} = \frac{1}{x} = \frac{1}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$

$\alpha = \frac{\sqrt{7}}{21}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

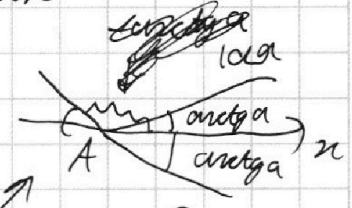
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Вторая внешняя общая кас-ая будет симметрична первой отн-о линии центров, т.е O_x.

Значит O_x будет бис-ой двух кас-ых

и ~~вторая~~ тангенс второго угла будет $-a = -\frac{\sqrt{7}}{21}$. В этом несложно



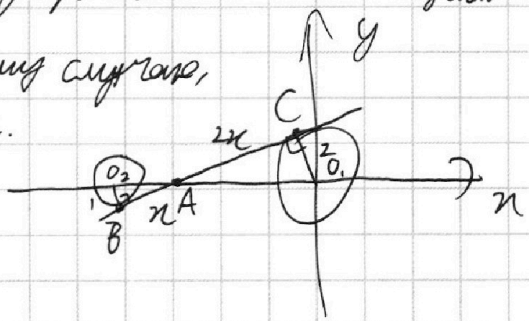
убедиться, если рассмотреть рисунок ↗

(мне прямая 1ая подписалась с x↗, а вторая опускалась с x↘) Но то же знак. из симм-ии

Теперь рассмотрим случай внутренней кас-ой

Рассуждения аналогичны первому случаю,

только каждо-ны тангенсы $k=-2$.



Всё тот же $AO_2 = \sqrt{x^2+1}$

$AB = x$ $AC = 2x$

Из отношения $\frac{AO_2}{BO_2} = \frac{AO_1}{CO_1}$ получаем

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{1} = \frac{4-\sqrt{x^2+1}}{2}$$

$$3\sqrt{x^2+1} = 8$$

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{8}{3}$$

$$x^2+1 = \frac{64}{9}$$

$$x^2 = \frac{55}{9}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{55}}{3} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

Но $\underset{\underset{a}{\parallel}}{tg\angle O_2AB} = \frac{1\cdot 3}{\sqrt{55}} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$

аналогично первым рассуждениям $a = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$ подходит.

b найдётся, т.к. это просто сдвиг вверх вниз, он всегда ∃ единственный. Ответ: $a = \pm\frac{\sqrt{7}}{21}$, $a = \pm\frac{3\sqrt{55}}{55}$

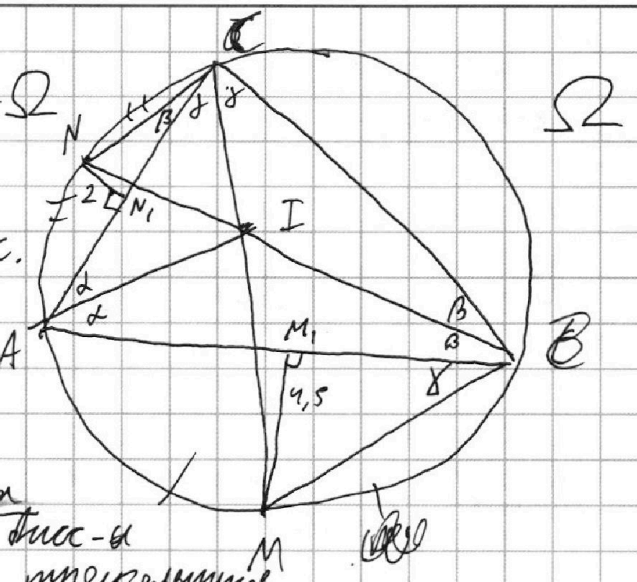
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7



Пусть опис. окр-ть $\triangle ABC$ – Ω

I – инцентр, M_1 и N_1 – основания перп-ов на AB и AC соотв

$\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$

AI, BI, CI – бисс-ы, делят углы пополам.

Точки C I M и B I N лежат на одной прямой, т.к. бисс-ы пересекают впис. окр-ти треугольников в серединах дуг.

$\angle NCA = \angle NBA = \beta$, как опир. на одну дугу Ω

Аналогично $\angle ABM = \angle ACM = \gamma$.

Тогда в $\triangle N_1NC$, $\angle N_1 = 90^\circ$ $\sin\beta = \frac{2}{NC}$

в $\triangle M_1MB$, $\angle M_1 = 90^\circ$ $\sin\gamma = \frac{4,5}{MB}$ (*)

Заметим, что по лемме о трезубце $NA = NI = NC$, т.е. $\triangle AIC$ вписан в окр-ть с ц. N.

Аналогично $AM = IM = BM$ и AIB вписан в окр-ть с ц. M.

Тогда в $\triangle ACI$ по т. синусов

$$\frac{AI}{\sin\gamma} = 2R_{опис} = 2\cdot NC$$

в $\triangle AMB$:

$$\frac{AI}{\sin\beta} = 2R_{опис} = 2MB$$

Перемножим: $\frac{AI^2}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} = 4MB\cdot NC$

Подставим равенства (*):

$$\frac{AI^2}{\frac{2}{NC}\cdot\frac{4,5}{MB}} = 4MB\cdot NC \qquad \frac{AI^2\cdot MB\cdot NC}{9} = 4\cdot MB\cdot NC \qquad AI^2 = 36$$

$AI = \pm 6$ т.к. это длина отрезка Ответ: $AI = 6$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$4(2x^2-5x+3)=9-42x+49x^2$

$8x^2-20x+12=9-42x+49x^2$

$41x^2-22x-3=0$

$D=484+492=976$

$\begin{array}{r} 22 \\ \cdot\ 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$

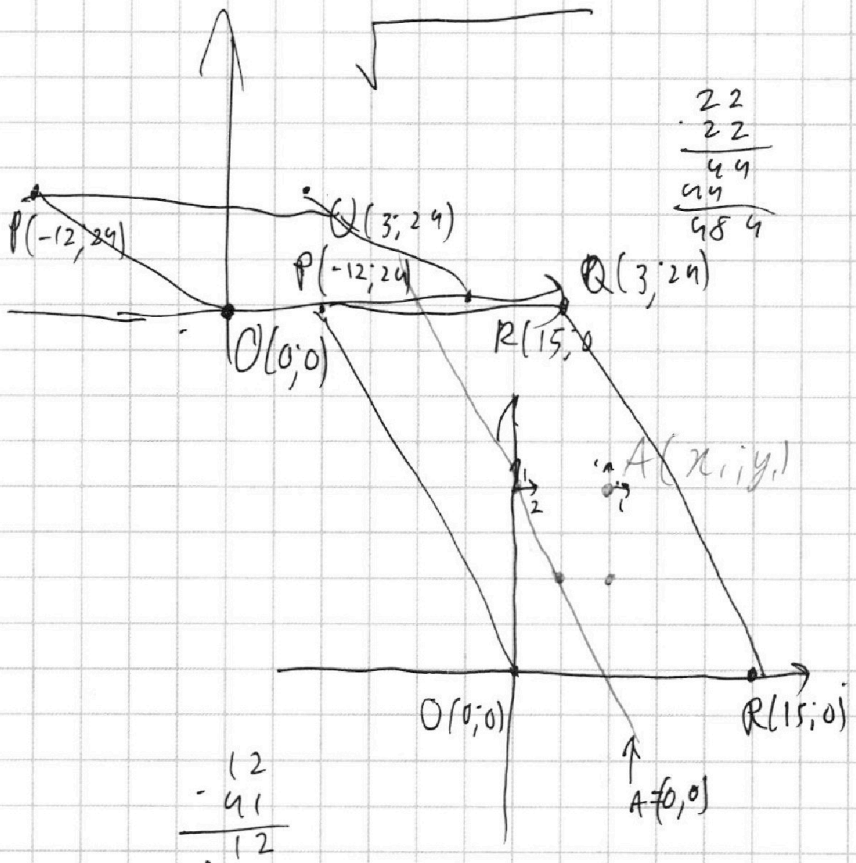
$\begin{array}{r} 123 \\ -\ 77 \\ \hline 46 \end{array}$

$\begin{array}{r} 41 \\ \cdot\ 12 \\ \hline 82 \\ 41 \\ \hline 492 \end{array}$

$\begin{array}{r} 22 \\ \cdot\ 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$

$\begin{array}{r} +\ 484 \\ \hline 976 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 976 & 2 \\ 488 & 2 \\ 244 & 2 \\ 122 & 2 \\ 61 & \end{array}$



$(4\cdot 7$

$y_2-y_1=12-2x_2+2x_1$

$\begin{array}{r} 14 \\ \cdot\ 7 \end{array}$

$y=12-2x$

$\begin{array}{r} 12 \\ \cdot\ 41 \\ \hline 12 \\ 48 \\ \hline 492 \end{array}$

$\begin{array}{r} +\ 484 \\ \hline 976 \end{array}$

$2x_2\ \ y_2=12+2x_1+y_1$ $B(x_2;y_2)$

$y_2=12+2x_1+y_1-2x_2$ $A(x_1;y_1)$

$x_2-x_1=x$

$y_2-y_1=y$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$

$\begin{array}{r|l} 976 & 4 \\ 244 & 4 \\ 61 & \end{array}$

$\begin{array}{r} 32 \\ \cdot\ 32 \end{array}$

$2\cdot$ —

$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}$

$2x+y=12$

$2x+y-12=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

a b a − b

$\sqrt{(2x-1)(x-2)}$

$(2x-1)(x-2) =$
$= 2x^2 - 4x - x + 2 =$
$= 2x^2 - 5x + 2$

$D = 25 - 8\cdot 3 = 1$

$x = \frac{5\pm 1}{4}$ $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1{,}5 \end{array}\right.$

$\sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{}$

$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

c d

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a-b$

$\sqrt{2x^2}$

$\sqrt{\frac{a+b}{2}}$

$2(x-1)(x-1{,}5)$

$(x-1)(2x-3)$

$(2x^2-5x+3) - (2x^2+2x+1) =$
$= 2-7x$

$\cancel{2x^2-5x+3 = 4 - 28x + 49x^2}$

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2-5x+7x+1} = 2-7x$

$2x^2-5x+1 = a$

$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a-b}{2}}$

$\cancel{\sqrt{a+2} - \sqrt{a+7x} = 2-7x}$

$2x^2-5x+3 - 2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} + 2x^2+2x+1 = 4-28x+49x^2$

$c, d \geq 0$

$-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} =$

$2\sqrt{2x^2-5x+3} = 3-7x$

$c-d = c^2-d^2$

$c-d = (c-d)(c+d)$

$\cancel{a - 2\sqrt{ab} + b = a^2 - 2ab + b^2}$

I $c = d$

$\sqrt{a} = \sqrt{b}$

$a = b$

$a \geq 0$

$b \geq 0$

$\cancel{2x^2} - 5x + 3 = \cancel{2x^2} + 2x + 1$

$\cancel{2 = 7x}$

$\boxed{x = \frac{2}{7}}$

II $c \neq d$

$1 = c+d$

$1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$1 - 2\sqrt{a} + a = b$

$\cancel{1 = a + 2\sqrt{ab} + b}$

$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$

$1 - 2\sqrt{2x^2-5x+3} + \cancel{2x^2} - 5x + 3 = \cancel{2x^2} + 2x + 1$

$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{a}{b}$ $(a,b)=1$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2-4ab}$$

$a+b \vdots m$

$a^2-6ab+b^2 \vdots m$

$(a+b)^2 \underbrace{-8ab}_{\vdots m}$

$a+b \vdots m$

$8ab \vdots m$

$m \le 8$

если есть p : $m \vdots p$ $\Rightarrow$ $a+b \vdots p$

$\left[\begin{array}{l} a \vdots p \\ b \vdots p \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} b \vdots p \\ a \vdots p \end{array}\right.$

$m=8$

$\boxed{7}$

$$\frac{1+7}{1-6\cdot 7+49} = \frac{8}{50-42} = \frac{8}{8} = 1$$

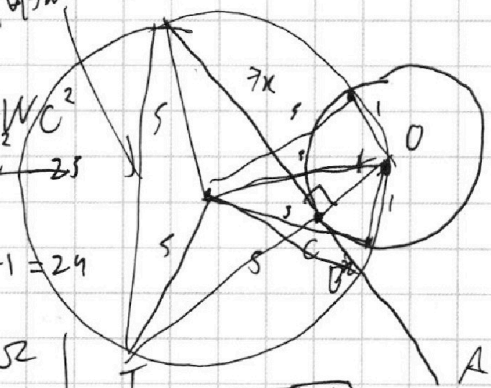
$\cancel{NC^2 = NO^2 - 1}$

$\cancel{NC^2+1 = NO^2}$

$a+b$ $\cancel{\sqrt{49x^2+CT^2}}$ A

$AC \cdot CB = CO \cdot CT$

$7x^2 = CT$



$25 - WC^2$

$7x^2 = \cancel{WC^2 - 25}$

$CT \cdot (CT+2)$

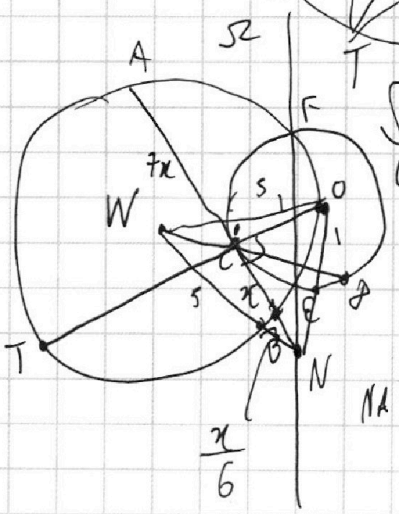
$WC \cdot WP = 25 - 1 = 24$

$\cancel{\sin\alpha = \frac{7x}{4x^2}} = \cancel{\sqrt{4x}}$

$NB = \frac{x}{6}$

$6x\,NB = x^2$

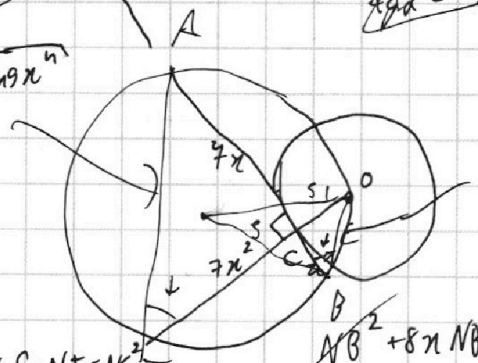
$\sqrt{1+8x^2}$



$\sqrt{49x^2+49x^4}$

ω

$\frac{x}{6}$



$7x^2$

$NA \cdot NB = NE \cdot NF = NC^2$

$NA \cdot NB = NC^2$

$\cancel{NB^2} + 8x\,NB = \cancel{NB^2} + 2x\,NB + x^2$

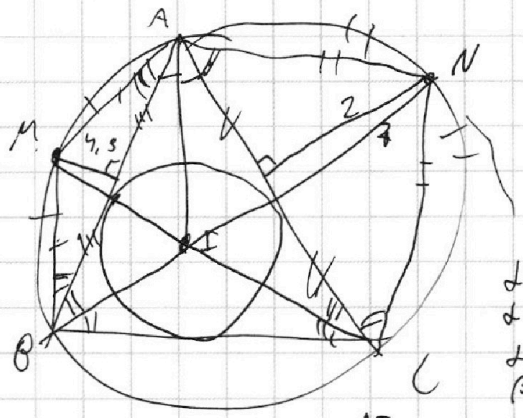
$NB \cdot (NB + 8x) = (NB + x)^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$= 64$
$= 20+44$
$= 27+37$
$10+17+37=$

$14+17+20=$
$= 34+17 = 41+10 =$
$= 51$

$\alpha+\beta+\gamma=26$
$\alpha+\beta \geq 14$
$\alpha+\gamma \geq 20$
$\beta+\gamma \geq 17$

$\begin{cases} \alpha=8 \\ \gamma=12 \\ \beta=6 \end{cases}$

$\frac{AI}{\sin\angle ICA} = 2R = \frac{4,5}{\sin\angle MBA}$

$AI^2 = 4,5\cdot 2$

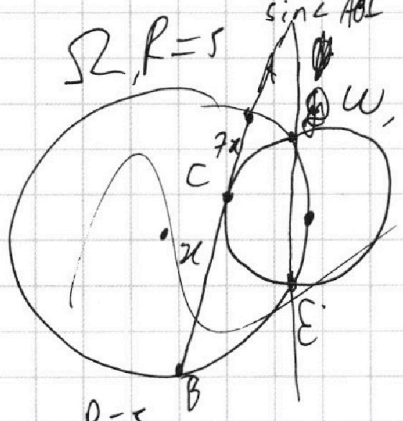
$AI^2 = 9$

$AI = 3$

$\frac{AI}{\sin\angle AOI} = 2R = \frac{2}{\sin\angle ACN}$

~~α β один~~
~~β γ один~~

$\Omega, R=5$



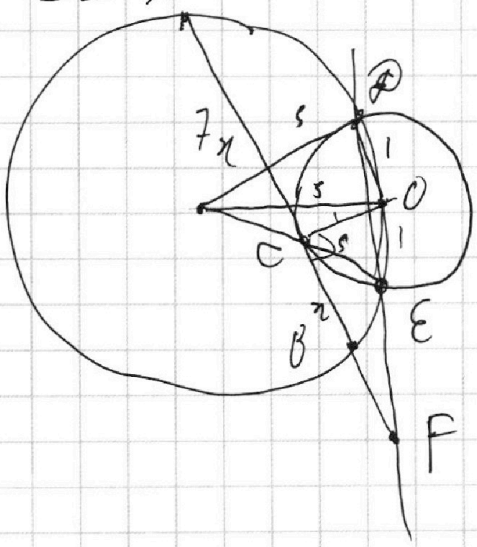
$\omega, r=1$

$\begin{cases} \alpha+\beta=14 \\ \alpha+\gamma=17 \\ \beta+\gamma=20 \end{cases}$ ~~$\gamma=\alpha=6$~~

$\alpha+\beta+\gamma=32$
$\alpha+\beta=14$
~~$\gamma=18$~~
$\alpha=9$
$\alpha+\beta=10$
$\beta+\gamma=17$
$\alpha+\gamma=37$

$ab : 2^{14}\cdot 7^{10}$
$bc : 2^{17}\cdot 7^{17}$
$ac : 2^{20}\cdot 7^{37}$
$a^2b^2c^2 : 2^{51}\cdot 7^{64}$
$a^2b^2c^2 : 2^{52}\cdot 7^{64}$
$abc : 2^{26}\cdot 7^{32}$
$abc \geq 2^{26}\cdot 7^{32}$

$\Omega, R=5$



$\omega, r=1$

$FE\cdot FD = FB\cdot FA = FC^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ax - y + 10b = 0$ прямая

$y = ax + 10b$ ~~вторая решение~~

$\cancel{tg}\ \alpha$

$x^2 + y^2 \quad 4$

$a = \pm \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2\sqrt{14}}\right)$

$x = \frac{2\sqrt{14}}{3}$

$x^2 = \frac{56}{9}$

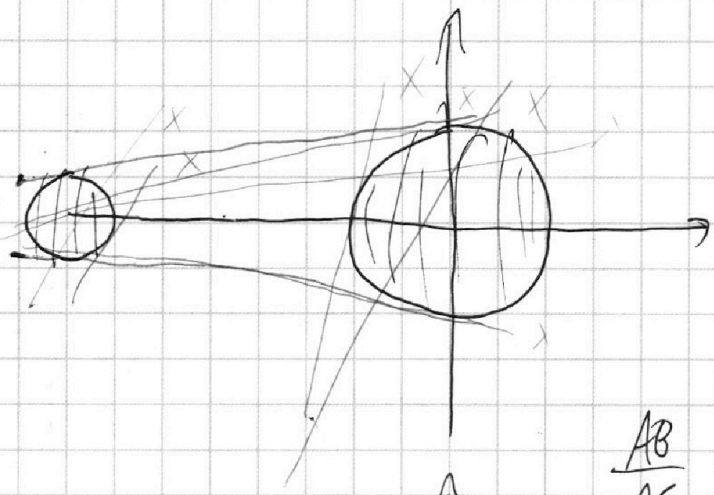
$x^2 + 1 = \frac{64}{9}$

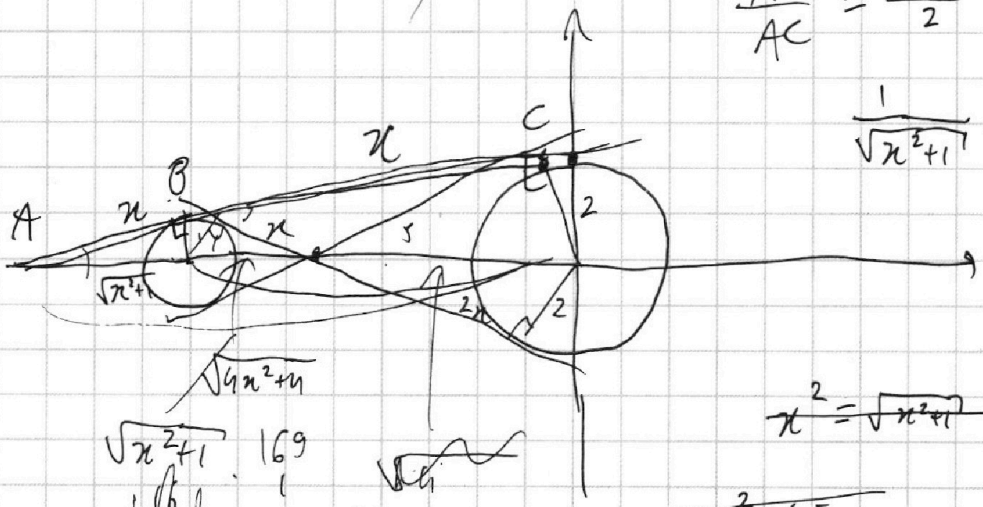
$\sqrt{x^2+1} = \frac{8}{3}$

$8 - \sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{x^2+1}$

$16 \cdot 9 = 144$

$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$





$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{8 - \sqrt{x^2+1}}$

$2704 : 16 = 169$

16

110

96

144

$\cancel{x^2 = \sqrt{x^2+1} = 1}$

$\sqrt{x^2+1} \cdot 169$

16

160

$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + 5}$

$\cancel{4x^2 + 4 =}$

$a = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$

$a = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$

$\sqrt{x^2+1} + 5 = 2\sqrt{x^2+1}$

$5 = \sqrt{x^2+1}$

$25 = x^2 + 1 \qquad x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$169 \cdot 16 = 54$

36

6

169

$169 \cdot 16 = 36$

6

169

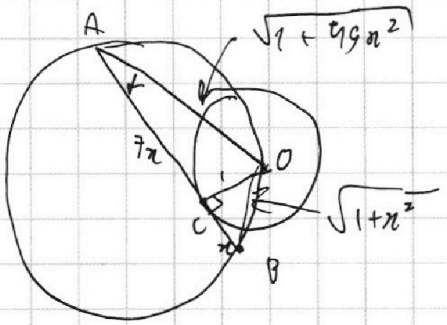
2704

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\frac{OB}{\sin\alpha} = 10$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+49x^2}}$$

$$\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+49x^2} = 10$$

$$(1+x^2)\cdot(1+49x^2) = 100$$

$$(1+a)\cdot(1+49a) = 100$$

$$49a^2 + 50a - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 19404 = 21904$$

$$a = \frac{-50 \pm 2\cdot 37}{49\cdot 2} = \frac{74-50}{49\cdot 2} = \frac{24}{49\cdot 2} = \frac{12}{49}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{7}$$

$$AB = \frac{16\sqrt{3}}{7}$$

19404
+ 2500
21904

99
99
81
81
36
36
4851
4
204
32
16
19404

49
+99
81
81
36
36
4851

1369

33
+33
66

37
37
49
21
21
9
1369

4851
4
204
32
16
19404

4
37
28
12
148
148
64
32
8
32
16
4
148
80 4

21904 | 4

74
74

148
8
64
32
8
1184
592
148
21904

74
74
16
28
28
49
5476

21904 | 4
5476 | 4
1369

1184 | 2
10 | 592
18

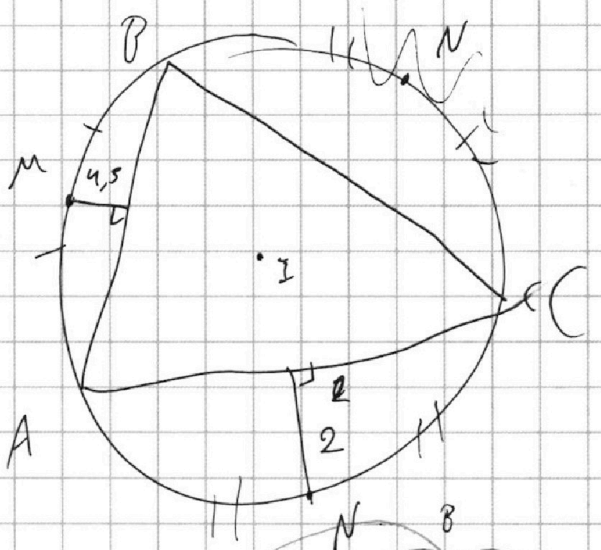
2
37
74

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\sin\beta = \frac{2}{NC}$

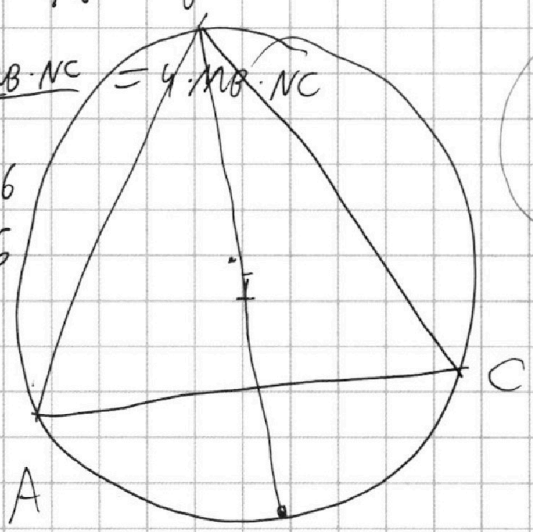
$\sin\gamma = \frac{4,5}{MB}$

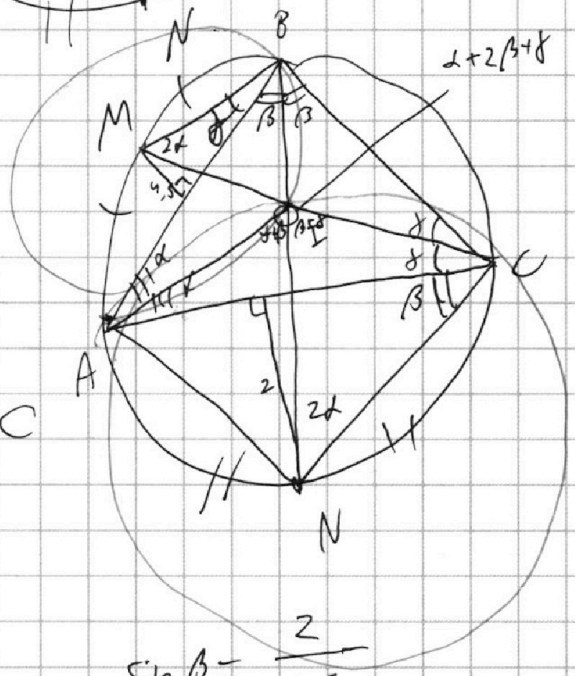
$\frac{AI^2}{\frac{2}{NC}\cdot\frac{4,5}{MB}} = 4MB\cdot NC$

$\frac{AI^2\cdot MB\cdot NC}{9} = 4\cdot MB\cdot NC$

$AI^2 = 36$

$AI = 6$





$\frac{AI^2}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} = 4MB\cdot NC$

$\frac{AI}{\sin\gamma} = 2NC$

$\frac{AI}{\sin\beta} = 2MB$

$\sin\beta = \frac{2}{NC}$

$\frac{NC}{\sin\beta} = 2R =$

$\frac{NC^2}{2} = \frac{MB^2}{4,5} = \frac{MB}{\sin\gamma}$

$4,5NC^2 = 2MB^2$

$\sin\gamma = \frac{4,5}{MB}$

$\frac{MB}{\sin\gamma} = 2R$ $\frac{NC}{\sin\beta} = 2R$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{2\cdot\frac{121-44\sqrt{61}+4\cdot 61}{41\cdot 41}-5\cdot\frac{}{41\cdot 41}}$$

$$\sqrt{3518+322\sqrt{61}}=5+14\sqrt{61}+\sqrt{3313-252\sqrt{61}}$$

$$x^2$$

$$x=\frac{11-2\sqrt{61}}{41}$$

$$\sqrt{3518+322\sqrt{61}}-\sqrt{3313-252\sqrt{61}}=5+14\sqrt{61}$$

$$x^2=\frac{121-44\sqrt{61}+244}{1681}$$

$$\begin{array}{r}41\\ \cdot\ 41\\ \hline 41\\ 164\\ \hline 1681\end{array}$$

$$\sqrt{\frac{242-88\sqrt{61}+488-55\cdot 41+10\cdot 41\sqrt{61}+3\cdot 1681}{1681}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3518+322\sqrt{61}}{1681}}$$

$$\begin{array}{r}410\\ -\ 88\\ \hline 322\end{array}$$

$$\sqrt{\frac{242-88\sqrt{61}+488+22\cdot 41-4\cdot 41\sqrt{61}+1681}{1681}}$$

$$\begin{array}{r}55\\ \cdot\ 41\\ \hline 55\\ 220\\ \hline 2255\end{array}\qquad \begin{array}{r}1681\\ \cdot\ 3\\ \hline 2443\\ 18\\ \hline 5043\end{array}\qquad \begin{array}{r}82\\ -\ 77\\ \hline 5\end{array}$$

$$5+14\sqrt{61}$$

$$\sqrt{\frac{3313-252\sqrt{61}}{1681}}$$

$$\begin{array}{r}5043\\ -\ 2255\\ \hline 2788\\ +\ 242\\ \hline 3030\\ +\ 488\\ \hline 3518\end{array}$$

$$2-\frac{77-14\sqrt{61}}{41\cdot 1681}$$

$$\begin{array}{r}2583\\ +\ 242\\ \hline 2825\\ +\ 488\\ \hline 3313\end{array}\qquad \begin{array}{r}14\\ \cdot\ 41\\ \hline 164\\ +\ 88\\ \hline 252\end{array}\qquad \frac{3362-77+14\sqrt{61}}{1681}$$

$$\begin{array}{r}1681\\ +\ 902\\ \hline 2583\end{array}\qquad \begin{array}{r}22\\ \cdot\ 41\\ \hline 22\\ 88\\ \hline 902\end{array}\qquad \begin{array}{r}1681\\ \cdot\ 2\\ \hline 3362\end{array}$$

$$\begin{array}{r}3362\\ -\ 77\\ \hline 3285\end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ